АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

7038—7843

*

№ 10

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

И. В. Ареев, В. В. Альтов, Г. Д. Афанасьев, В. И. Дикунин, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покинтелевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биография 1
Основания математики и математическая логика 3
Теория чисел 7
Алгебра 11
Многочлены и линейная алгебра 11
Группы 15
Поля, кольца и структуры 24
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 34
Теория функций действительного переменного 40
Теория множеств 42
Приближения функций полиномами и их обобщениями 43
Теория функций комплексного переменного 45
Дифференциальные уравнения 57
Обыкновенные дифференциальные уравнения 57
Уравнения в частных производных 64
Приложения к физике, технике и естественным наукам 70
Интегральные уравнения 73
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 74
Числовые ряды 78
Специальные функции 78
Интегральные преобразования и операционное исчисление 80
Приложения общих методов математического анализа . . . . . —
Функциональный анализ 82
Теория вероятностей 92
Математическая статистика 94
Теория игр и математическая экономика . . 102
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 103
Геометрия 104
Приложения геометрии 106
Проективная и начертательная геометрия . 106
Алгебраическая геометрия 108
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 111
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 114
Метрические методы в геометрии 119
Геометрия выпуклых многообразий 122
Численные и графические методы 123
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 132
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 144
Новые книги поступившие в редакцию 147
Авторский указатель 148

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*,
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров*, *И. Н. Векуа*, *А. Н. Колмогоров*,
Ю. В. Линник, *А. И. Маркушевич*, *В. В. Немыцкий*, *С. М. Никольский*,
П. С. Новиков, *Д. Ю. Панов*, *М. М. Постников*, *С. П. Фиников*

Рефераты 7038—7843 **№ 10** **Октябрь 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

7038. Организация научно-исследовательской работы в области математики в ПНР. Куратовский (波蘭人民共和國數學研究工作的組織. K. 庫拉托夫斯基), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 3, 595—600 (кит.)

7039. Математический институт (Instytut Matematyczny), Sprawozd. czynności i prac, PAN, 1954 (1955), 497—501 (польск.)

Сообщается о деятельности Математического института Польской АН.

7040. Второй съезд математиков и физиков РНР (Congresul al II-lea al P. M. R. despre matematică şi fizica), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A7**, № 2, 57—59 (рум.)

7041. Достижения Института математики АН РНР в первой пятилетке. Теодореску (Realizările institutului de matematică al Academiei R. P. R. în primul cincinal. Teodorescu N.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 12, 640—645 (рум.)

7042. Достижения физико-математического факультета Университета им. Пархона. Михок (Din realizările facultăţii de matematica si fizică dela Universitatea C. I. Parhon. Mihoc Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 12, 645—647 (рум.)

7043. Преподавание анализа на физико-математических факультетах. Николеску (Predarea analizei la facultăţile de fisico-matematici. Nicolescu Miron), Gaz. mat. şi fiz., 1956, **A7**, № 1, 31—36 (рум).

7044. Влияние новых математических методов на развитие классических математических дисциплин. Важевский (近代數學方法對經典數學理論的影響. 瓦日夫斯基.), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 4, 801—820 (кит.)

Доклад, прочитанный на съезде польских математиков, происходившем в Варшаве 6—12 сентября 1953 г.

7045. О некоторых типах ситуаций, возникающих при математических исследованиях. Булиган (Quelques types de situations dans la recherche mathématique. Bouligand Georges), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte I, 1955, 24, 53—69 (франц.)

Соображения по методологии математического исследования в ее историческом развитии. Отмечается современная тенденция подробнее останавливаться на примененных методах исследования с целью максимального исключения возможности дублирования работ другими математиками. Выдвигаемые положения иллюстрируются многочисленными примерами из творчества автора и математиков прежних времен. Имеются ссылки на ряд аналогичных статей последних лет, а также на последнюю книгу Пойа (Polya G., Mathematics and plausible reasoning, I, II). В. П. Левин

7046. Аналитическая геометрия и учение о функциях в гимназии. Сандгрен (Analytisk geometri och funktionslära på gymnasiet. Sandgren Lennart), Elementa, 1956, **39**, № 1, 23—28 (швед.)

7047 К. 13-я научная сессия (Киевск. ун-т). Тезисы докладов. Сек. матем. (13-я наукова сесія (Київськ. ун-т). Тези доповідей. Секція матем. Київ, Ун-т, 1956, 10 стор., безпл.) (укр.)

Приводятся, в частности, тезисы следующих докладов: Белоусова (В. П. Білоусова), Развитие идей Лобачевского в современной геометрии. Митропольский (Ю. О. Мітропольський), Нестационарные процессы в некоторых нелинейных колебательных системах. Положий (Г. М. Положій), Интегрирование p-аналитических функций по сопряженным переменным. Гихман (И. І. Гіхман), Принцип инвариантности в случае сходимости к процессу Маркова. Бондаренко (П. С. Бондаренко), О сходимости метода сеток для основной бигармонической задачи. Михалевич (В. С. Михалевич), Оптимальные методы статистического приемочного контроля Танцура (М. А. Танцюра), Электронная вычислительная машина для измерения и подсчета шкур (ЕМІК-1), Королюк (В. С. Королюк), Асимптотическое разложение для функций распределения максимальных отклонений в схеме Бернулли.

7048 К. Основы математики. Аллендорфер, Окли (Principles of mathematics. Allendoerfer Carl Barnett, Oakley Cletus Odia. New York — London, McGraw-Hill, 1955, XV + 448 pp., ill., 37sh6d), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 292, 12 (англ.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

7049. Цзу Чун-чжи (429—500 гг.), Китай, 1955, № 11, 29

Справка о китайском астрономе и математике V в., нашедшем приближенное значение числа π, равное $\frac{355}{113}$, дающее 7 правильных десятичных знаков. Указываются также астрономические открытия Цзу Чун-чжи. Приводятся фотоснимки книги «Суйчжи», в которой го-

ворится о вычислении числа π этим ученым, и соответственной части текста этой книги. Б. А. Розенфельд

7050. Кеплер. Кагл (Kepler. Cagle William R.), Navigation, 1955, 4, № 7, 278—280 (англ.)

Биография Кеплера и хронологический перечень его сочинений. И. Я. Депман

7051. **О первом периоде исследований Л. Эйлера в области обыкновенных дифференциальных уравнений. Симонов Н. И.,** Успехи матем. наук, 1955, 10, № 4, 184—187

Краткое содержание доклада на заседании Московского математического общества 17 мая 1955. Отмечается большой вклад Л. Эйлера в теорию дифференциальных уравнений. Автор останавливается на двух ранних работах Л. Эйлера, опубликованных в Комментариях Петербургской академии наук (Comm. Acad. Imp. Sci. Petrop., 3, 124—137, Opera omnia, 1—22; 6, 231—246, Opera omnia, 1—22), и более подробно на там же опубликованной работе (10, 40—55; Opera omnia, 1—22), в которой излагаются способы нахождения частных решений весьма общего уравнения

$$(a + bx^n)\, x^2 d^2v + (c + fx^n)\, x\, dxdv + (g + hx^n)\, vdx^2 = 0,$$

коэффициенты которого суть действительные числа.

Далее автор подчеркивает, что Л. Эйлеру наряду с Ж. Даламбером принадлежат первые исследования линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Указана, в частности, работа Л. Эйлера о распространении колебаний в модели упругой среды (Novi Comm. Acad. Imp. Sci. Petrop., 1, 67—105, Opera omnia, II — 10), в которой рассмотрена система такого вида. Г. К. Михайлов

7052. **Николай Иванович Лобачевский. Нагаева В. М.,** Вестн. высш. школы, 1955, № 10, 50—55

Краткий обзор деятельности Н. И. Лобачевского как одного из выдающихся педагогов отечественной высшей школы и руководителя школьного образования Казанского учебного округа в первой половине XIX в.; отмечается прогрессивный характер педагогических взглядов Лобачевского, представляющих большой интерес и в настоящее время. Г. Ф. Рыбкин

7053. **Новые документы о Лобачевском. Беспамятных Н. Д.,** Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 3—12

Сообщается о документах, относящихся к служебной переписке Казанского учебного округа и Казанского университета с Белорусским учебным округом и Пермской дирекцией училищ.

Только один, приводимый в тексте заметки, документ—о назначении (и увольнении) Лобачевского управляющим Казанским учебным округом — является «документом о Лобачевском»; документы, приводимые в приложениях, лишь подписаны им, как могли бы быть подписаны и другими должностными лицами.

Г. Ф Рыбкин

7054. **Памяти Альфреда Капелли. Натуччи** (In memoria di Alfredo Capelli (1855 — 1910). Natucci A.), Period. mat., 1955, **33**, № 5, 257—275 (итал.)

Капелли, ученик Кремоны, Бельтрами, Вейерштрасса и Кронекера, с 1891 г. состоял профессором в Палермо и Неаполе и с 1894 г. редактором «Giorn mat. Battaglini» Он оставил большое число трудов: по теории алгебраических форм (27), по теории подстановок (5), по теории алгебраических уравнений (10), по теории эллиптических функций (13) Среди его трудов имеются Лекции алгебры (1895), выдержавшие при жизни автора 4 издания (Istituzioni di Analizi algebrica), и систематическое изложение теории функции Якоби. В статье воспроизведено изложение теоремы Капелли о системах линейных уравнений и комбинаторное изложение оснований арифметики рациональных чисел, не требующее, по его мнению, введения новых аксиом (Giorn. mat. Battaglini, 1901, 39).

И. Я. Депман

7055. **130-я годовщина со дня рождения Франтишка Тилшра. Зедек** (Ke 130. výročí narození Františka Tilšra. Zedek Miloslav), Mat. ve škole, 1955, 5, № 10, 621—629 (чеш.)

Ф. Тилшер (1825—1913) был профессором начертательной геометрии в Военно-инженерной академии и на чешском отделении Политехнического института в Праге со дня его создания (1864) Он первый на чешском языке писал руководства по этому предмету и создал свою систему его изложения. Усердный борец за культурные права чешского народа, он полемизировал по этому вопросу с историком Моммзеном и выступал с разными предложениями перед австрийским правительством. И. Я. Депман

7056. **Джулиан Лоуэлл Кулидж. Стройк** (Julian Lowell Coolidge. In memoriam. Struik D. J.), Amer Math. Monthly, 1955, 62, № 9, 669—682 (англ.)

Очерк о творчестве профессора Харвардского университета Кулиджа (1873—1954), геометра школы Штуди и Сегре, автора крупных работ по неевклидовой геометрии (1909 г.), по геометрии круга и сферы (1916 г.), по геометрии комплексной области (1924 г.), по алгебраическим кривым (1931 г). Последние годы жизни Кулидж посвятил историческим исследованиям, в результате которых появились его «История геометрических методов» (1940 г.) и «Конические сечения и поверхности второго порядка» (1943 г.). Его «Введение в математическую теорию вероятности» (1925 г.) трактует в английской литературе впервые понятие вероятности на основе понятия частоты, в духе взглядов Мизеса и его школы в Германии. К статье приложен список 81 важнейших работ Кулиджа (81 назв.) И. Я. Депман

7057. **Энрике де Рафаэль-Верхюлст. Санчес-Перес** (Necrologia del R. P. Enrique de Rafael Verhulst. Sánchez Pérez José Augusto), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1955, 49, № 3, 213—222 (исп.)

Испанский математик Рафаэль-Верхюлст (1885—1955), иезуит, занимал посты в обсерваториях и институтах ордена в Испании, Бельгии, Индии Автор работ по математике (задача Мальфатти, теория простых чисел, теория поверхностей, операционное исчисление), теории относительности, философии точных наук.

И. Я. Депман

7058. **Энрикес — ученый и философ. Куццер** (Enriques scienziato e filosofo. Cuzzer Otto), Civiltà macchine, 1956, 4, № 1, 73—76 (итал.; рез. англ.)

Алгебраическая геометрия является гордостью итальянской математики благодаря достижениям в ней Кремоны, Бетти, Кастельнуово, Севери и др. Существенные вклады в эту дисциплину внес Федериго Энрикес, построив инвариантные относительно бирациональных преобразований теории кривых и поверхностей и установив условие рациональности для алгебраических поверхностей. И. Я. Депман

7059. **Джон Валлис об итальянских математиках. Тенка** (Giovanni Wallis e gli italiani. Tenca Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 3, 412—418 (итал.)

Приводятся два письма Валлиса (1616—1703), в которых он выражает свое глубокое уважение к итальянским математикам Коммандино, Гвидобалди, Кардано, Тарталья, Галилео, Торричелли, Кавальери, Вивиани (которому адресовано второе письмо). И. Я. Депман

7060. Изучение сумерийско-аккадянской, египетской и греческой математики. Френкян (Studii de matematică sumero-accadiană, egipteană şi greacă. Frenkian Aram), Rev. Univ. «C. I. Parhon» şi Politehn. Bucureşti. Ser ştiinţ. natur.), 1953, № 3, 9—20 (рум.; рез. русс., франц.)

Краткий обзор вычислительной арифметики древних вавилонян, египтян и греков (у греков логистика) и ее влияния на развитие западноевропейской науки.

Б. А. Розенфельд

7061. Участие П. Л. Чебышева в работе съездов русских естествоиспытателей. Беспамятных Н. Д., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1955, вып. 1, 13—16

Сообщается, что Чебышев на I съезде высказал интересные мысли о возможности широкого использования автоматических средств для регистрации физических свойств атмосферы, на II съезде сделал доклады «О функциях, наиболее подходящих к нулю в данных пределах» и «О параллелограммах», показав параллелограмм, преобразующий прямолинейное попеременное движение в постоянное круговое, который «может заменить собою в паровых машинах и параллелограммы, ныне употребляемые, и мотыль с шатуном». На III съезде Чебышев, применяя способ, изложенный в его мемуаре о простых числах (см. Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, 1944, т. I, 191—207), указал пределы, в которых заключена предложенная Н. В. Бугаевым функция, выражающая «число первичных чисел до данного числа n», а в одном из сообщений высоко оценил данный В. П. Ермаковым признак сходимости рядов. На VI съезде Чебышев сделал сообщение «О простейших параллелограммах» и заявление о деятельности Московского математического общества с целью получить ходатайство Съезда перед Министерством народного просвещения об увеличении средств Общества для организации печатания его трудов.

Г. Ф. Рыбкин

7062 К. Описание изданий гражданской печати 1708—январь 1725 г. Сост. Быкова Т. А., Гуревич М. М. Ред. **Берков П. Н.**, М.—Л., АН СССР, 1955, 627 стр., илл., 15 р. 15 к.

Дается библиографическое описание математических книг, напечатанных гражданским шрифтом в России за указанный период, и уточняются сведения о них.

И. Я. Депман

См. также: 7535, 7536, 7539, 7540, 7591 К

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

7063. Арифметические предикаты и кванторы по функциям. Клини (Arithmetical predicates and function quantifiers. Kleene S. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 2, 312—340 (англ.)

Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_l$ — конкретные, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — переменные теоретико-числовой (т.-ч.) (РЖМат, 1956, 1910) функции и пусть т.-ч. функция $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$, зависящая от $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, общерекурсивна относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ равномерно по $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; тогда функция $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ записывается в виде $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, a_1, \ldots, a_n)$ и называется общерекурсивной относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$ (при $l=0$ — просто общерекурсивной) функцией от m функциональных и n числовых переменных. При помощи представляющих функций это определение переносится на предикаты. Предикат от двух видов переменных (чисел и т.-ч. функций) называется аналитическим (относительно т.-ч. функций $\psi_1, \ldots, \psi_l$) как скоро он может быть построен из общерекурсивных (относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$) предикатов (также от двух видов переменных) посредством явных определений, пропозициональных связок и кванторов по числам: (Ex), (x) — и функциям: $(E\alpha)$, (α); если при этом не используются кванторы по функциям, то предикат называется арифметическим (относительно $\psi_1, \ldots, \psi_l$). При помощи представляющих предикатов это определение переносится на т.-ч. функции.

Строится иерархия аналитических предикатов, аналогичная иерархии Клини — Мостовского для арифметических предикатов.

Теорема 1. Каждый аналитический предикат представим в одной из следующих форм, где A для каждой формы означает арифметический предикат:

$$A(a) \quad (\alpha)A(a,\alpha) \quad (E\alpha)(\beta)A(a,\alpha,\beta),$$
$$(E\alpha)A(a,\alpha) \quad (\alpha)(E\beta)A(a,\alpha,\beta).$$

Теорема 2. Для каждой из форм теоремы 1, следующих за первой, существует предикат, представимый в этой форме и перенумеровывающий все предикаты этой формы.

Теорема 3. Для каждой из форм теоремы 1, следующих за первой, существует предикат, представимый в данной форме, но не представимый в двойственной.

Оказывается (следствие теоремы 5 и теорема 6), что всякий предикат, арифметический относительно предикатов, каждый из которых представим в одной из k-кванторных форм, представим в обеих $(k+1)$-кванторных формах, но обратное неверно. Строится рекурсивный предикат $R(\alpha, x)$, для которого утверждение $(E\alpha)(x)R(\alpha, x)$ истинно, но для каждой арифметической функции α утверждение $(x)R(\alpha, x)$ ложно.

Изучается иерархия предикатов, возникающая в связи с системой O обозначений для конструктивных трансфинитов (Kleene S. C., J. Symbolic Logic, 1938, 3, 150—155); при этом на стр. 327 вводится представляющее самостоятельный интерес понятие гомологичности двух обозначений. Для каждого $y \in O$ строится предикат $H_y(a)$. Именно $H_1(a) \equiv a = a$;

$$H_{2^z}(a) = (Ex)T_1^{B^z}(a, a, x); \quad H_{3.5^z}(a) \equiv H_{z(a)_1}((a)_0).$$

Здесь

$$z_n = \{z\}(n_O), \quad O_O = 1, \quad (n+1)_O = 2^{n_O}.$$

Доказывается, что при каждом $y \in O$ предикат $H_y(a)$ представим в обеих одноквантурных формах и что получаемое благодаря этим предикатам расширение арифметической иерархии эквивалентно расширению, рассмотренному Мостовским (Mostowski A., Studia Philosophica, 1951, 4, 237—274).

В работе описываются также степени неразрешимости (РЖМат, 1956, 1910) предикатов, получающихся при расширениях арифметики, предложенных Ваном (Wang H., РЖМат, 1954, 1533) и Майхиллом (Myhill J., РЖМат, 1954, 3944).

В. А. Успенский

7064. Заметка о примитивно-рекурсивных функциях. Робинсон (A note on primitive recursive func-

tions. Robinson Julia), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 667—670 (англ.)

Существует такая пара примитивно-рекурсивных функций, что все примитивно-рекурсивные функции одного переменного могут быть получены, отправляясь от них путем применения лишь двух операций: $F(x) = B[A(x)]$; $F(x) = B^x(0)$. Эти две функции сложнее исходных функций, фигурирующих в теореме Робинсона (реф. 7065). Б. А. Трахтенброт

7065. Примитивно-рекурсивные функции. II. Робинсон (Primitive recursive functions. II. Robinson Raphael M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 663—666 (англ.)

Функция $x = J(u, v)$ такая, что $2J(u, v) = (u + v)^2 + 3u + v$, отображает множество всех пар натуральных чисел на натуральный ряд; пусть $u = K(x)$, $v = L(y)$ обозначают функции, дающие обратное отображение. Все примитивно-рекурсивные функции одного переменного могут быть построены, отправляясь от функций $x + 1$, K (или $x + 1$, L) посредством многократного применения операций:

$F(x) = A(x) + B(x)$; $F(x) = B[A(x)]$; $F(x) = B^x(0)$, или посредством операций

$F(x) = J[A(x), B(x)]$; $F(x) = B[A(x)]$; $F(x) = B^x(0)$, где A, B — ранее построенные функции; формула $F(x) = B^x(0)$ означает: $F(0) = 0$; $F(x + 1) = B[F(x)]$. Аналогичные результаты были получены автором в 1947 г. (Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 925—942). Б. А. Трахтенброт

7066. Полнота функционального исчисления первого порядка. Рейхбах (O pełności węższego rachunku funkcyjnego. Reichbach Juliusz), Studia log., 1955, 2, 213—250 (польск.; рез. русс., англ.)

Излагается доказательство гёделевской теоремы о полноте функционального исчисления первого порядка и доказательство теоремы Сколема — Лёвенгейма, основанное на доказательстве теоремы Гёделя — Сколема. За последние годы было опубликовано большое множество работ, связанных с доказательствами этих теорем (Mostowski A., Logika Matematyczna, 1948; Henkin L., J. Symbolic Logic, 1949, 14, Rasiowa H. Sikorski R., Fundam. math., 1950, 37; Rieger L., Časop. pěstov. mat., 1951, 1; Beth Ind. Math., 1951, 13; Łoś J., Studia log., 1955, 2). В реферируемой статье дается доказательство, сходное с доказательством Расёвой — Сикорского. Существенная трудность состоит в доказательстве существования простого идеала (построенного в булевой алгебре из формул функционального исчисления), сохраняющего бесконечные операции, соответствующие кванторам. Расёва и Сикорский пользуются для этой цели так называемым методом категорий. Их доказательство было впоследствии упрощено Тарским (Tarski A., J. Symbolic Logic, 1952, 17), который устранил метод категорий. Автор нашел простой метод для построения надлежащего простого идеала. Таким образом, он также устранил метод категорий из доказательства Расёвой — Сикорского. Другой метод построения надлежащего простого идеала был дан Ригером.

Опечатки: на стр. 219, вместо $[W\{\{s_m\}(s_k/n), \alpha\} = 0]$ следует читать $[W\{\{s_m\}(s_k/s_n), \alpha\} = 0]$. H. Rasiowa

7067. О бесконечных суммах моделей. Лось Е., Сушко Р., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 4, 199—200

О бесконечных суммах моделей. Лось, Сушко (On the infinite sums of models Łoś J., Suszko R.), Bull. Acad. Polon. Sci., 1955, 3, Cl. 3, № 4, 201—202 (англ.)

Последовательность моделей $\{\mathfrak{M}_n\}_{n=1,2,\ldots}$ некоторой элементарной теории называется возрастающей, если $\mathfrak{M}_n$ является подмоделью $\mathfrak{M}_{n+1}$ для любого n. Модель $\mathfrak{M}$ называется суммой $\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$ возрастающей последовательности моделей $\mathfrak{M}_n$, если она является наименьшей моделью, для которой каждая $\mathfrak{M}_n$ служит подмоделью. Формула α называется устойчивой (persistent) в последовательности $\mathfrak{M}_n$, если α истинна в модели $\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$ или α не истинна в некоторой модели $\mathfrak{M}_n$. Авторы формулируют следующую теорему: Замкнутая формула α устойчива во всякой возрастающей последовательности моделей тогда и только тогда, когда существует замкнутая формула β вида:

$$\prod_{x_{i_1}}\ldots\prod_{x_{i_n}}\sum_{x_{j_1}}\ldots\sum_{x_{j_m}}\gamma(x_{i_1},\ldots,x_{i_n},x_{j_1},\ldots,x_{j_m}), \quad (1)$$

не содержащая никаких других кванторов и такая, что $\alpha \equiv \beta$ является тавтологией. Отсюда следует, что для произвольного элементарно определенного класса $\mathfrak{A}_0$ моделей эквивалентны следующие условия: а) сумма всякой возрастающей последовательности моделей, принадлежащих $\mathfrak{A}_0$, также принадлежит $\mathfrak{A}_0$. б) существует множество замкнутых формул вида (1), которое образует множество аксиом класса $\mathfrak{A}_0$. H. Rasiowa

7068. Неразрешимые предложения, порожденные семантическими парадоксами. Ван Хао (Undecidable sentences generated by semantic paradoxes. Wang Hao), J. Symbolic Logic, 1955, 20, № 1, 31—43 (англ.)

Пусть S — система аксиом теории множеств, Con (S) — арифметическая формула, выражающая непротиворечивость этой системы. Бернайс доказал (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, Berlin, 1939, v 2, 234—253), что после присоединения Con (S) к арифметике в полученной системе становятся доказуемыми все формулы, являющиеся арифметическими моделями теорем системы S (и построенные согласно доказательству гёделевской теоремы о полноте). (Бернайс получил этот результат для произвольной системы S, не обязательно теории множеств). Пусть $\mathfrak{A}$ — формула системы S; через $\mathfrak{A}^z$ обозначается ее арифметическая модель. Пусть S' получается из S присоединением ε-термов с ε-аксиомами $\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(\varepsilon_x\mathfrak{A}(x))$; в полученной системе содержится часть S_0, изоморфная арифметике и образ в S_0 арифметической формулы $\mathfrak{A}$ обозначается $\mathfrak{A}^s$; таким образом, каждая формула $\mathfrak{A}$ из S' имеет «бернайсову модель» $\mathfrak{A}^{zs}$ и аналогично для термов. (Формулы $\mathfrak{A}$ из S' также имеют модель $\mathfrak{A}^z$ и формализация доказательства второй ε-теоремы дает Con $(S) \supset$ Con (S')).

Система S' называется ω-непротиворечивой, если $[(\exists_m) \neg \mathfrak{A}(m)]^s$ может быть доказуема в S' для всякой арифметической формулы $\mathfrak{A}(a)$ только при условии, что одна из формул $[\mathfrak{A}(0)]^s$, $[\mathfrak{A}(1)]^s$, ... не доказуема в S'. Говорят, что S' имеет ω-непротиворечивую модель, если все замкнутые формулы S' можно таким образом разбить на два класса — истинных и ложных формул, что все теоремы S' истинны, выполнены обычные условия для логических операторов и истинности, и если для арифметической формулы $\mathfrak{A}(a)$ с единственной свободной переменной a из истинности $[(Em) \neg \mathfrak{A}(m)]^s$ следует существование ложной формулы в перечне $[\mathfrak{A}(0)]^s$, $[\mathfrak{A}(1)]^s$, ...

Если система S' имеет ω-непротиворечивую модель, то для каждой ее теоремы $\mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{A}^{zs}$ истинна. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{zs}$ имеют разные значения истинности, то $\mathfrak{A}$ не-

разрешима в S'. Истинны также все теоремы системы $S\#$, полученной присоединением к S', формулы $[\mathrm{Con}\,(S')]^S$.

Для обычных теоретико-множественных систем S выполнены следующие три условия: существует формула $W(x)$ из S' такая, что для каждой формулы $\mathfrak{A}$ из S_0 с гёделевым номером n в S' доказуема формула $W(n^S) \equiv \mathfrak{A}$. В S' определима функция D такая, что для каждого терма t из S_0, не содержащего свободных переменных, в S' доказуема формула $D(n^S) = t$, где n — гёделев номер терма t. Каждый предикат из S_0 представим некоторым термом из S'.

В предположении наличия у S' ω-непротиворечивой модели каждое из этих условий используется для построения неразрешимого предложения. Доказательства неразрешимости этих предложений имеет прототипами парадоксы Эпименида, Ришара и Рассела соответственно.

При рассмотрении первого из этих парадоксов («парадокса лжеца») выясняется, что неразрешимая формула $\mathfrak{A}$ имеет как истинную, так и ложную бернайсову модель $\mathfrak{A}^{ts}$. Эти результаты верны и для системы S.

Ошибки: на стр. 38, строка 15 снизу, следует читать t вместо t^s. В определении C 2.6 на стр. 35—36 следует считать, что $\mathfrak{A}$ может быть формулой или термом S' (см. стр. 40, строки 15—16 сверху). А. С. Есенин-Вольпин

7069. Непротиворечивая система анализа, не содержащая типов. Шютте (Ein widerspruchsloses System der Analysis auf typenfreier Grundlage. Schütte Kurt), Math. Z., 1954, 61, № 2, 160—179 (нем.)

Работа примыкает к предыдущей статье автора (РЖМат, 1954, 5421). Рассматривается система, родственная «кодификату» цитированной работы; основное различие состоит в отсутствии свободных переменных (основные формулы образуют произвольное множество элементарных формул и их отрицаний, не содержащее одновременно никакой формулы с ее отрицанием). Эта система содержит, в частности, все правила интуиционистской логики для имеющихся в ней логических операторов. Среди правил вывода содержится одно неэлементарное — правило бесконечной индукции (переход от всех $\mathfrak{A}[.] \vee \mathfrak{N}$, где t — любой постоянный терм, к $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee \mathfrak{N}$). Затем расширяется понятие формулы за счет введения новых формул вида $B(\mathfrak{A})$ (содержательно: формула $\mathfrak{A}$ доказуема) таким образом, что вместе с любой формулой $\mathfrak{A}$ формулой является также $B(\mathfrak{A})$. Полученная система обозначается Σ_0. Затем по индукции для каждого натурального $n > 0$ следующим образом определяется система Σ_n: Доказуемыми формулами Σ_n являются все формулы, выводимые в Σ_0 после присоединения в качестве B_n-«аксиом» всех формул, полученных по следующему B-правилу:

Если в Σ_{n-1} из посылок $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_r$, $(x)\,\mathfrak{B}_1[x], \ldots, (x)\,\mathfrak{B}_s[x]$ выводима формула $\mathfrak{C}$, то

$$\overline{B}(\mathfrak{A}_1) \vee \ldots \vee \overline{B}(\mathfrak{A}_n) \vee \overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_1[x]) \vee \ldots \vee \overline{(x)}\,B(\mathfrak{B}_s[x]) \vee B(\mathfrak{C})$$

является B_n-аксиомой.

(Здесь формула $\mathfrak{C}$ может отсутствовать, дизъюнкция без членов считается ложной).

На последовательность этих систем Σ_n переносится доказательство непротиворечивости, состоящее в устранении сечений. Для этих систем справедливо утверждение: Если $B(\mathfrak{F})$ доказуема в Σ_n, то и $\mathfrak{F}$ доказуема в Σ_n. Затем определение этих систем изменяется за счет присоединения в определении B_n-аксиом правила перехода от $B(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ к числу исходных правил Σ_0. Объединяя в одну совокупность все аксиомы B_n полученных таким образом систем Σ_n, автор получает непротиворечивую систему, которую мы здесь назовем Σ; элементарные правила вывода в применении к теоремам Σ дают снова теоремы Σ, для правила же бесконечной индукции соответствующее утверждение справедливо лишь в предположении, что все посылки $\mathfrak{A}[t] \vee \mathfrak{N}$ доказуемы в некоторой системе Σ_n.

К имеющимся в Σ логическим операторам —, $\vee$, (x) затем на основе обычных классических сокращений присоединяются операторы &, →, (Ex). Закон исключенного третьего в виде $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ не выводим в Σ.

Несмотря на дедуктивное равенство формул $\mathfrak{F}$ и $B(\mathfrak{F})$, для надлежаще выбранных формул $\mathfrak{F}$ каждая из импликаций $B(\mathfrak{F}) \to \mathfrak{F}$ и $B(\mathfrak{F}) \to B(B(\mathfrak{F}))$ не выводима в Σ. Если для формулы $\mathfrak{A}$ выводимы обе формулы $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{U})$ и $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(\mathfrak{U})$, то формула $\mathfrak{A}$ называется замечательной (*ausgezeichnet*) (в символах: $A(\mathfrak{A})$). Для замечательной формулы $\mathfrak{A}$ доказуемы эквивалентность $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ и $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{B}(\overline{\mathfrak{A}})$, а также $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$. Справедливы утверждения: Если для основного терма φ одна из формул $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ или $\overline{\varphi}(t_1, \ldots, t_n)$ является основной, то $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ — замечательная формула; если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}[t_1, \ldots, t_n]$ — замечательные формулы, то и формулы $B(\mathfrak{A})$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\lambda_{x_1 \ldots x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n] \times (t_1, \ldots, t_n)$ являются замечательными. Если для каждого терма t в некоторой Σ_n доказуема замечательность $\mathfrak{A}(t)$, то формула $(x)\,\mathfrak{A}[x]$ замечательна. Доказуема формула $(x)\,A(\mathfrak{A}[x]) \to A((x)\,\mathfrak{A}[x])$.

Для построения теории множеств вводится следующее понятие: терм m называется множественным термом (в символах $M(m)$), если для каждого терма $\mathfrak{A}$ формула $\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$ замечательна (в символах $M(m) \equiv (x)A(m(x))$), где $A(\mathfrak{A}) \equiv_{dt} B(\{\overline{\mathfrak{A}} \vee B(\mathfrak{A})\} \wedge \{\mathfrak{A} \vee B(\mathfrak{A})\})$. Для любых двух множественных термов $\mathfrak{b}$ и t определяется множественный терм-сумма как $\lambda_x(t(x) \vee t(x))$ и аналогично вводятся пересечение и дополнение $\mathfrak{b} \subset t \equiv_{dt} (x)\,(\mathfrak{b}(x) \to t(x))$; доказуемы формулы

$$M(t) \to B(t \subset t), \quad M(\mathfrak{b}) \wedge M(t) \to B(\overline{\mathfrak{b} \subset t} \vee \mathfrak{b} \subset t)$$

и аналогичная формула (с одним B) для транзитивности $\subset$: $\mathfrak{b} =_\mu t \equiv \mathfrak{b} \subset t \wedge t \subset \mathfrak{b}$.

Предикатом называется выражение $\mathfrak{P}[a]$, получающееся из некоторой формулы $\mathfrak{P}(i)$ заменой терма t в некоторых местах на переменную a. Свойство предикатов называется логически прогрессивным, если оно всегда переносится с $\mathfrak{P}[a]$, $Q[a]$ и $R[t_1[a], \ldots, t_n[a], a]$ на $\overline{\mathfrak{P}}[a]$, $\mathfrak{P}[a] \vee Q[a]$, $\lambda x_1 \ldots x_n \mathfrak{R}[x_1, \ldots, x_n, a]\,(t_1[a], \ldots, t_n[a])$, и из доказуемости в некоторой Σ_n наличия этого свойства для каждого выражения $\mathfrak{P}[t.a]$, где t — любой терм, следует, что и для $(x)\,\mathfrak{P}[x, a]$ в некоторой Σ_n доказуемо наличие этого свойства. Предикат $\mathfrak{P}[a]$ называется множественным, если для любых термов $\mathfrak{b}$ и t доказуемы формулы

$$M(t) \to A(\mathfrak{P}[t]) \text{ и } M(\mathfrak{b}) \wedge M(t) \to B(\mathfrak{b} =_\mu t \to \{\mathfrak{P}[\mathfrak{b}] \sim \mathfrak{P}[t]\}).$$

(Например, таковы все $a \subset m$ и $m \subset a$ для множественного терма m). Свойство предиката быть множественным является логически прогрессивным.

Множества множеств представляются множественным термом таким, что $m(\mathfrak{A})$ имеет место только для мно-

жественных термов $\mathfrak{A}$ в точной формулировке $M^2(\mathfrak{m}) \equiv \equiv M(\mathfrak{m}) \wedge (x) B(\mathfrak{m}(x) \to (y) \{\{\overline{x}(y) \vee B(x(y))\} \wedge \{x(y) \vee \vee B(\overline{x}(y))\}\})$. Для любого множества множеств $\mathfrak{m}$ образуются суммы $\bigcup \mathfrak{m} \equiv \lambda_x (Ey) \{\mathfrak{m}(y) \wedge y(x)\}$ и пересечение $\bigcap \mathfrak{m} \equiv \lambda_x (y) \{\mathfrak{m}(y) \to y(x)\}$, причем доказуемы формулы $M^2(\mathfrak{m}) \to M(\bigcup \mathfrak{m})$ и $M^2(\mathfrak{m}) \to M(\bigcap \mathfrak{m})$.

Невозможен не только пересчет всех множественных термов, но и отображение всех термов на множества какой-либо системы Σ_n, осуществляемое каким-либо функциональным термом $\mathfrak{t}[a]$.

Затем выделяется часть полученной системы, аналогичная разветвленной теории типов. Именно, вводятся типы и порядки: число «0» служит типом порядка 0 и если $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — типы порядков $< \nu$, то $\nu(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ — тип порядка ν. Затем совместной рекурсией вводятся понятия τ-терма и τ-формулы. Для этих определений существенно рассмотрение некоторого множества основных термов, разделяющихся на индивидуальные, предикатные и типовые; для каждого типа ρ имеется равно один типовой основной терм τ_ρ. Если $\mathfrak{A}[\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n]$ — τ-формула порядка ν, а $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ τ-термы типов $\rho_1, \ldots, \rho_n$ порядков $\mu_1, \ldots, \mu_n$, то

$$\lambda_{x_1, \ldots, x_n} \{\tau_{\rho_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \tau_{\rho_n}(x_n) \wedge \mathfrak{A}[x_1, \ldots, x_n]\}$$

τ-терм типа $\nu^*(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, где $\nu^* = \max(\nu, \mu_1 + 1, \ldots \ldots, \mu_n + 1)$; если $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}]$ — формула порядка ν, а A — τ-терм типа ρ порядка μ, то $(x) \{\overline{\tau}_\rho(x) \vee \mathfrak{A}[x]\}$ τ-формула порядка $\max(\nu, \mu + 1)$. В остальном τ-формулы получаются из элементарных формул, составленных из τ-термов, при помощи операций и $\forall$; τ-формуле при этом приписывается порядок, равный наибольшему из порядков (или порядков типов) тех частей, из которых она построена. Первичными τ-термами служат все индивидуальные основные термы — им приписывается тип 0, и все n-местные предикатные основные типы — им приписываются типы $1(0, \ldots, 0)$ (n нулей).

Для каждого предикатного n-местного основного типа и индивидуальных основных термов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ одна из формул $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ или $\overline{\varphi}(a_1, \ldots, \alpha_n)$ резрешимым образом должна быть аксиомой. Кроме того, аксиомой должна быть $\tau_\rho(\mathfrak{t})$ или $\overline{\tau}_\rho(\mathfrak{t})$, смотря по тому, является ли $\mathfrak{t}$ τ-термом типа ρ, или нет. Доказываются утверждения: Каждый τ-терм вида $\lambda_x \mathfrak{P}[x]$ является множественным термом. Каждая τ-формула замечательна. (Тем самым закон исключенного третьего распространяется на все τ-формулы).

Затем рассматривается формальная арифметика; в основу кладутся термы, соответствующие вычислимым функциям. Существенную роль играет свойство предиката $\mathfrak{P}[a]$ быть арифметическим, которое состоит в доказуемости для всех термов $\mathfrak{t}$ формулы $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \to [\mathfrak{P}(\mathfrak{b}) \sim \sim \mathfrak{P}(.)]$. Закон исключенного третьего верен для широкого класса формул, содержащего все равенства и неравенства между термами, все формулы вида $B(\mathfrak{A})$, вместе с любыми формулами $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, содержащего формулы $\overline{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \lambda_{x_1, \ldots, x_n} \mathfrak{C}[x_1, \ldots, x_n](\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n)$, а также содержащего формулу $(x) \mathfrak{A}[x]$, коль скоро в некоторой системе Σ_n доказуемы формулы $\mathfrak{A}[\mathfrak{t}] \vee \overline{\mathfrak{A}}[\mathfrak{t}]$ для всех термов $\mathfrak{t}$. Для арифметических предикатов доказуема схема индукции: $\mathfrak{P}[0] \wedge (x) \{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\} \to \mathfrak{P}[\mathfrak{t}]$, если же не предполагать, что предикат $\mathfrak{P}[a]$ арифметический, то удается только доказать, что если $\mathfrak{P}[0]$ и $(x) \{\mathfrak{P}[x] \to \mathfrak{P}[x']\}$ выводима, то выводима и $\mathfrak{P}[\mathfrak{z}]$ для каждой цифры $\mathfrak{z}$.

Из арифметики натуральных чисел легко получить арифметику чисел рациональных. Затем строится теория действительных чисел. Неравенства определяются сразу для всех термов:

$$\mathfrak{b} \underset{\rho}{\leqslant} \mathfrak{t} \underset{dl}{\equiv} (x)(y) \{\mathfrak{i}(x) \vee \overline{x < y} \vee (z) \{\overline{\mathfrak{b}}(z) \vee y < z\}\}.$$

$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}$ означает $\mathfrak{b} \underset{\rho}{\leqslant} \mathfrak{t} \wedge \mathfrak{t} \underset{\rho}{\leqslant} \mathfrak{b}$, а $\mathfrak{b} < \mathfrak{t}$ означает $\mathfrak{t} \underset{\rho}{\leqslant} \mathfrak{b}$; $-\infty \underset{dl}{\equiv} \lambda_x x = x$, $+\infty \underset{dl}{\leqslant} \lambda_x x \neq x$. Для любого терма $\mathfrak{m}$ $-\infty \underset{\rho}{\leqslant} \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m} \underset{\rho}{\leqslant} +\infty$; если же для множественного терма $\mathfrak{r}$ выводимы формулы $-\infty < \mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r} < +\infty$, то терм $\mathfrak{r}$ представляет собственное действительное число. Рациональному числу $\mathfrak{A}$ соответствует при этом терм $\lambda_x \mathfrak{A} < x$.

Вводится понятие действительного предиката, сходное с понятием множественного предиката и отличающееся от него только заменой μ на ρ. Для любого множественного терма $\mathfrak{m}$ $a \underset{\rho}{\leqslant} \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m} \underset{\rho}{\leqslant} a$ — действительные предикаты. Все предикаты действительные являются множественными. Обратно, для каждого множественного предиката $\mathfrak{P}[a]$ существует действительный предикат $\mathfrak{P}[\mathfrak{b}(a)]$; здесь $\mathfrak{b}(\,)$ для любого терма $\mathfrak{t}$ означает соответствующее этому терму дедекиндово сечение, определяемое формулой $\mathfrak{b}(\mathfrak{t}) \equiv \equiv \lambda_x (E_y) \{\mathfrak{t}(y) \wedge y < x\}$.

Если в некоторой системе Σ_n обнаруживается, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{t}, a_1, \ldots, a_n)$ является для любого терма $\mathfrak{t}$ действительным предикатом, то выражение $\lambda_x \mathfrak{P}[x, a_1, \ldots, a_n]$ представляет действительную функцию.

Действительные функции образуют кольцо, содержащее все константы. Существование нижней грани $\bigcup \mathfrak{m}$ доказывается в предположении, что для терма $\mathfrak{m}$ имеет место $M^2(\mathfrak{m})$. Отмечается, что терм, в состав которого входит часть вида $M(n)$, вообще говоря, не является множественным, так что выражение, определенное через отношение к совокупности всех действительных чисел, вообще говоря, не является действительным числом.

В заключение доказывается теорема Гейне — Бореля о покрытиях (причем рассматриваются только покрытия, интервалы которых имеют рациональные концы).

А. С. Есенин-Вольпин

7070. О модальной системе Фейса — фон-Райта. Собоцинский (Note on a modal system of Feys — von Wright. Sobociński Bolesław), J. Comput. Systems, 1953, I, 171—178

Показывается, что система T Фейса (Revue Philos. Louvain, 1950, 48, 478, 509) эквивалентна системе M фон-Райта (An essay in modal logic, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1951). Показывается также, что эти системы содержат бесконечно много модальностей.

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 925

7071. Физика и математическая логика. Фаринелли, Гамба (Physics and mathematical logic. Farinelli U., Gamba A.), Nuovo cimento, 1955, 1, № 6, 1152—1158 (англ.; рез. итал.)

Излагаются основные понятия алгебры Буля и обсуждается вопрос о целесообразности ее применения при изучении физических проблем. Из рассматриваемых примеров видно, что авторы имеют в виду под этим лишь более широкое привлечение физиками формального аппарата исчисления высказываний (или исчисления классов) при проведении формально-логических выводов.

Б. А. Трахтенброт

См. также: 7742, 7746

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

7072. Расстояние простых чисел. Кнёдель (Primzahldifferenzen. Knödel Walter), J. reine und angew. Math., 1955, **195**, № 3—4, 202—209 (нем.)

Пусть p_n обозначает n-е простое число, $p_0 = 2$, $d_n = p_n - p_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$. Элементарным путем доказываются неравенства

$$c_1 < \sum_{p_n < x} | d_n^{-1} - d_{n+1}^{-1} | / \sum_{p_n < x} d_n^{-1} < c_2,$$

$$c_3 < \sum_{p_n < x} d_n^{-1} / x \log^{-2} x < c_4,$$

$$d_n \geqslant d_{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

где $c_1, c_2, \ldots$ — положительные постоянные. Эрдешем и Реньи (Erdös P., Rényi A., Simon Stevin, 1949/50, **29**, 115—125) была доказана оценка

$$c_5 < \sum_{p_n < x} d_n^{-1} / x \log^{-2} x < c_6 \log \log x.$$

Э. К. Фогелс

7073. О теоретико-числовых функциях. Канольд (Über zahlentheoretische Funktionen. Kanold Hans-Joachim), J. reine und angew. Math., 1955, **195**, № 3—4, 180—191 (нем.)

Пусть $f(n)$ — теоретико-числовая функция, т. е. функция, принимающая для всех натуральных n, начиная с некоторого, натуральные значения. Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех натуральных значений $f(n)$. Множество $\mathfrak{N}_s$, где s — натуральное число, определим следующим образом: натуральное n принадлежит к $\mathfrak{N}_s$ тогда и только тогда, если существуют s различных и не равных n натуральных чисел $n_1, \ldots, n_s$, для которых $f(n) = f(n_\sigma)$ при $\sigma = 1, \ldots, s$. Пусть $D^*(\mathfrak{F})$ и $D^*(\mathfrak{N}_s)$ — «естественные плотности» множеств $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}_s$ (РЖМат, 1955, 4195; 4836). Устанавливаются достаточные условия, чтобы $D^*(\mathfrak{F}) = 0$, а также чтобы $D^*(\mathfrak{N}_s) = 1$. Полученные результаты применяются к важнейшим теоретико-числовым функциям: $\sigma_r(n) = \sum_{d \mid n} d^r$, $\pi(n)$ и $\varphi(n)$. Оказывается, что $D^*(\mathfrak{F}) = 0$ для функций $\sigma_r(n)$, $r \geqslant 1$, и $\varphi(n)$; $D^*(\mathfrak{F}) = 1$ для функций $\sigma_0(n) = \tau(n)$ и $\pi(n)$; $D^*(\mathfrak{N}_s) = 1$ для функций $\sigma_1(n) = \sigma(n)$, $\sigma_0(n) = \tau(n)$, $\pi(n)$ и $\varphi(n)$.

Рассматривается система уравнений

$$f(n_1) = f(n_2) = \ldots = f(n_t),$$

$$f(n_1) = \sum_{\tau=1}^{t} u_\tau n_\tau,$$

где u_τ — рациональные числа, которые либо даны, либо удовлетворяют некоторым условиям. Особенно подробно изучаются случаи $t = 1$ и $t = 2$. При $t = 1$, $f(n) = \sigma(n)$, u, натуральном и большем 1, условию $f(n) = un$ удовлетворяют так называемые многократно совершенные числа (РЖМат, 1956, 1960), а при $t = 2$ $f(n) = \sigma(n)$, $u_1 = u_2 = 1$ условиям $f(n_1) = f(n_2) = n_1 + n_2$ удовлетворяют дружественные числа.

Пусть $f(n)$ — теоретико-числовая и мультипликативная функция с условием: существует натуральное $a > 1$, что $a \mid f(p^\alpha)$, $\alpha > 0$, для всех простых p, начиная с некоторого. Пусть w и v — данные натуральные числа, $\mathfrak{L}$ — множество всех решений уравнения $wf(n) = vn$. Тогда естественная плотность множества $\mathfrak{L}$ равна 0. Эта теорема включает результат автора о совершенных числах (РЖМат, 1955, 4836).

Естественная плотность множества всех пар дружественных чисел с условием, что число различных простых делителей, входящих в одно из чисел пары, не превосходит заданной константы, равна нулю.

Работа содержит приписку, в которой указывается, что по сведениям, полученным автором после опубликования данной работы, П. Эрдёш располагает доказательством утверждения, что естественная плотность множества всех пар дружественных чисел равна нулю.

В. И. Нечаев

7074. Элементарная оценка типических сумм Рисса некоторых арифметических функций. Карамата (Évaluation élémentaire des sommes typiques de Riesz de certaines fonctions arithmétiques. Karamata J.), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1954, **7**, 1—40 (франц.)

Типической суммой Рисса или суммой Рисса k-го $(k = 1, 2, \ldots)$ порядка арифметической функции $f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ автор называет сумму

$$F_k(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) \lg^k (x/n).$$

Пусть $F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n)$; $\overline{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) / n^s$ — производящий ряд Дирихле функции $f(n)$. Рассматриваются соотношения между оценками $F(x)$, $F_k(x)$ и аналитическими свойствами $\overline{f}(s)$. Приведем некоторые из полученных результатов. $P_N(x)$, $Q_N(x)$, $R_N(x)$, $S_N(x)$ всюду обозначают полиномы степени N с постоянными коэффициентами.

Если

$$F(x) = P_N(\lg x) + \rho(x) \tag{1}$$

и $\rho(x) = O(x^{-\delta})$, $\delta > 0$, то

$$F_k(x) = Q_{N+k}(\lg x) + \rho_k(x), \tag{2}$$

$k = 1, 2, \ldots$, где $\rho_k(x) = O(x^{-\delta})$. Дается явное выражение коэффициентов $Q_{N+k}(x)$ через коэффициенты $P_N(x)$ и $\rho(x)$, а также явное выражение $\rho_k(x)$ через $\rho(x)$.

Если (1) заменить через (2) с некоторым $k = k_0$ и $\rho_{k_0}(x) = O(x^{-\delta})$, $\delta > 0$, то (2) остается справедливой для $k > k_0$ с $\rho_k(x) = O(x^{-\delta})$, но не обязательно для $k < k_0$.

Если имеет место (2) с $\rho_k(x) = O(x^{-\delta})$, $\delta > 0$, то ряд $\overline{f}(s)$ сходится для $\operatorname{Re} s > 0$, функция $\overline{f}(s)$ является регулярной для $\operatorname{Re} s > -\delta$, за исключением полюса порядка N в $s = 0$. Ее разложение в ряд Лорана в окрестности $s = 0$ имеет вид

$$\overline{f}(s) = s^n R_{N+n}(1/s) + r_n(s), \tag{3}$$

где $r_n(s) = [(-1)^{n+1} / n!]\, s^{n+1} \int_1^\infty \rho_n(t)\, t^{-(s+1)} dt$, $\rho_n(x) = \int_x^\infty \rho_{n-1}(t)\, t^{-1} dt$, $n > k$. Дается явное выражение коэффициентов $R_{N+n}(x)$ через $Q_{N+k}(x)$ и $\rho_k(x)$.

Из (1) с $\rho(x) = O(1)$ (соответственно $o(1)$) вообще не следует (2) с $\rho_k(x) = O(1)$ (соответственно $o(1)$). Од-

нако из (2) с $\rho_k(x) = O(1)$ (соответственно $o(1)$) в предположении справедливости некоторых условий типа тауберовых теорем (например, $f(n) \geqslant -M$ $n, n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, M$ — постоянное) следует (1) с $\rho(x) = O(1)$ (соответственно $o(1)$).

Если (2) имеет место с $\rho_k(x) = O(1)$ и если предел $\lim_{x\to\infty} \{F(x) - S_N(\lg x)\} \lg^q x$, $q \leqslant k$, существует, то он равен нулю.

Если справедливо (2) с $\rho_k(x) = O(1)$ (соответственно $o(1)$), то $\bar{f}(s)$ сходится для $\mathrm{Re}\, s > 0$ и разлагается в окрестности $s = +0$ в асимптотический ряд вида (3) с $n = k$, $r_k(x) = O(s^k)$ (соответственно $o(s^k)$).

Рассматривается связь между оценками сумм Рисса функций $f(n)/n$ и $g(n)/n$, где $g(n) = \sum_{n\leqslant x} f(n)[x/n]$. Дается асимптотическая формула для сумм Рисса функции $f(n)$, когда $f(x)$ принадлежит полю функций, получаемому путем алгебраического присоединения lg и exp к полю рациональных функций с вещественными коэффициентами, и $f(x) = O(x^{-\delta} \lg^q x)$, $\delta > 0$. Полученные результаты применяются к некоторым конкретным арифметическим функциям, в том числе к функциям Мангольдта, Мёбиуса, Лиувилля. И. П. Кубилюс

7075. О распределении аддитивных теоретико-числовых функций (II). Халберстам (On the distribution of additive number-theoretic functions (II). Halberstam H.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 1—14 (англ.)

Автор использует методы первой части работы (РЖМат, 1956, 144) для доказательства следующих результатов.

1. Пусть $f(m)$ — сильно аддитивная теоретико-числовая функция, $A_n = \sum_{p<n} f(p)/p$, $B_n = \sum_{p<n} f^2(p)/p$,

$$B_n \to \infty, \quad f(p) = o(B_p^{1/2}). \qquad (1)$$

Тогда для любых фиксированных натуральных k, k_1, k_2 при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n}(2B_n)^{-k/2} \sum_{m=1}^{n} (f(m+1) - f(m))^k \to \mu_k,$$

$$\frac{1}{n} B_n^{-(k_1+k_2)/2} \sum_{m=1}^{n} (f(m+1) - A_n)^{k_1} (f(m) - A_n)^{k_2} \to$$

$$\to \mu_{k_1}\mu_{k_2},$$

где $\mu_k = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-u^2/2} du$.

Если $s_n(\omega)$ означает число натуральных $m \leqslant n$, для которых $f(m) < f(m+1) + \omega (2B_n)^{1/2}$, а $k_n(\omega_1, \omega_2)$ — число натуральных $m \leqslant n$, для которых $f(m+1) < A_n + \omega_1 B_n^{1/2}$, $f(m) < A_n + \omega_2 B_n^{1/2}$ и $\Phi(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\omega} e^{-u^2/2} du$, то из этих предельных соотношений следует:

$$s_n(\omega)/n \to \Phi(\omega), \quad k_n(\omega_1, \omega_2)/n \to \Phi(\omega_1)\Phi(\omega_2) \qquad (2)$$

при $n \to \infty$. Формулы (2) получены впервые Левеком (Le-Veque W. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 66, 440—463) для более узкого класса сильно аддитивных функций при помощи другого метода.

2. Пусть $g(\tau)$ — неприводимый полином с целыми коэффициентами, $g(m) > 0$ для $m = 1, 2, \ldots$; $r(a)$ — число решений сравнения $g(m) \equiv 0 \pmod a$, $0 \leqslant m < a$; $A(n) = \sum_{p<n} f(p) r(p)/p$, $B(n) = \sum_{p<n} f^2(p) r(p)/p$. Если $f(m)$ удовлетворяет условиям (1) с заменой B_n на $B(n)$, то для фиксированного натурального k при $n \to \infty$

$$\frac{1}{n} B(n)^{-k/2} \sum_{m=1}^{n} \{f(g(m)) - A(n)\}^k \to \mu_k.$$

Аналогичная теорема имеет место и для приводимых полиномов. И. П. Кубилюс

7076. Об аддитивных теоретико-числовых функциях. Халберстам (Über additive zahlentheoretische Funktionen. Halberstam H.), J. reine und angew. Math., 1955, **195**, № 3—4, 210—214 (нем.)

Сообщение автора на конференции, посвященной теории чисел, состоявшейся при Обервольфахском математическом исследовательском институте (3—8 января 1955 г.) Приводятся некоторые результаты автора по вероятностной теории чисел, опубликованные в других статьях (РЖМат, 1956, 144, 7075). И. П. Кубилюс

7077. Класс арифметических функций. Коэн (A class of arithmetical functions. Cohen Eckford) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 11, 939—944 (англ.)

Для целых $n \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ автор называет $f(n, r)$ четной функцией от $n \pmod r$, если имеет место одно из трех условий:

$$1)\ f(n, r) = \sum_{d|r} \alpha(d)\, c(n, d),$$

$$c(n, d) = \sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant d \\ (h,d)=1}} \exp(2\pi i n h/d);$$

$$2)\ f(n, r) = \sum_{d|(n,r)} g(d, r/d);\ 3)\ f(n, r) = f((n, r), r),$$

равносильность которых доказывается. Рассматриваются формулы обращения для сумм четных функций $f(n, r) = \sum_{d|r} f_1(d, r)\, c(n, d)$ и $f_1(\delta, r) = \sum_{m=1}^{r} f(m, r)\, c(m, \delta)$, где $\delta \mid r$. В качестве приложения дается новое доказательство теоремы Никола и Вандивера (РЖМат, 1955, 3606) о числе решений сравнения

$$n \equiv x_1 + \ldots + x_s \pmod r$$

при $(x_i, r) = 1$. Э. К. Фогелс

7078. Об одном неравенстве для последовательности целых чисел. Шерк (An inequality for sets of integers. Scherk Peter), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 585—587 (англ.)

Пусть $A = \{a\}$, $B = \{b\}, \ldots$ — последовательности целых неотрицательных чисел, $A + B = \{a + b\}$.

$$A(n) = \sum_{0<a\leqslant n} 1, \quad A(m, n) = \sum_{m<a\leqslant n} 1.$$

Доказываются:

Теорема 1. Пусть

(1) $x \in A$ $(x = 0, 1, 2, \ldots, h;\ h \geqslant 0)$,

(2) $0 \in B$ или $1 \in B$,

(3) $A + B \subset C$, $n \notin C$,

(4) $C(n) < A(n-1) + B(n)$.

Тогда, если $m \notin C$, $0 < m < n - h - 1$, то имеет место неравенство

$$C(m, n) \geqslant A(n - m - 1) + B(m, n).$$

Теорема 2. Если для последовательности A, B, C выполняются условия (1) — (3) и $0 < \alpha_1 < 1$, $A(x) \geqslant \alpha_1 (x + 1)$ $(x = h+1, h+2, \ldots, n)$, тогда $C(n) \geqslant \alpha_1 n + B(n)$. С. В. Огай

7079. Неквадратичные алгебраические иррациональности, которые разлагаются в непрерывные дроби с ограниченными неполными частными. Горшков Д. С., Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 3, 383—384

Строится пример неквадратичного алгебраического (но не вещественного) числа x, которое разлагается в сходящуюся непрерывную дробь Гурвица:

$$x = a + \cfrac{1}{|a_1|} + \cfrac{1}{|a_2|} + \cfrac{1}{|a_3|} + \ldots$$

(где $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ — целые числа Гаусса) с ограниченными неполными частными: $|a_n| \leqslant c$, где c не зависит от n. Серия таких примеров получается из следующей теоремы, доказываемой в статье. Пусть A — положительное целое

рациональное число, содержащее множителем простое число $p=3$ (mod 4) в нечетной степени. Тогда, если m — любое вещественное число с условием $m^2<A$, то число $x = m + i\sqrt{A - m^2}$ разлагается в непрерывную дробь Гурвица с ограниченными неполными частными.

Это предварительный результат в исследовании гипотезы о том, что любое алгебраическое число разлагается в непрерывную дробь Гурвица с ограниченными неполными частными. А. В. Малышев

7080. Минимум неоднородного квадратичного полинома от n переменных. Морделл (The minimum of an inhomogeneous quadratic polynomial in n variables. Mordell L. J.), Math. Z., 1956, 63, № 5, 525—528 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs}x_r x_s + 2\sum_{r=1}^{n} a_r x_r,$$

где a_{rs} и a_r суть вещественные числа, причем $a_{rs}=a_{sr}$, $a_{rr}>0$, $\det(a_{rs})\neq 0$. Обозначим через k вещественное число, определяемое уравнением

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & {}^1/_2a_{11}+a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & {}^1/_2a_{nn}+a_n \\ -{}^1/_2a_{11}+a_1 & \ldots & -{}^1/_2a_{nn}+a_n & k \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда, если переменные $x_1, \ldots, x_n$ можно разбить на две группы $\{x_\lambda, x_{\lambda'}, \ldots\}$ и $\{x_\mu, x_{\mu'}, \ldots\}$ так, что в пределах каждой группы $a_{\lambda\lambda'}\leqslant 0$ $(\lambda\neq\lambda')$, $a_{\mu\mu'}\leqslant 0$ $(\mu\neq\mu')$, то при любых вещественных числах $x_1', \ldots, x_n'$ найдутся целые числа $x_1, \ldots, x_n$, для которых $f(x_1+x_1', \ldots, x_n+x_n')\leqslant k$. В случае, когда f — положительно определенная бинарная квадратичная форма, эта теорема была доказана Дирихле (Dirichlet L., Werke, 1848, 2, 29—48). А. В. Малышев

7081. Комплексные однородные линейные формы. Роджерс (Complex homogeneous linear forms. Rogers K.), Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956, 52, № 1, 35—38 (англ.)

Доказывается теорема: пусть $\xi = ax + by$, $\eta = cx + dy$, где a, b, c, d — комплексные числа, причем $ad - bc = \Delta\neq 0$. Тогда найдутся такие, не равные одновременно нулю целые числа x и y квадратичного поля $Q(\sqrt{-7})$ над полем рациональных чисел, что

$$\max(|\xi|, |\eta|)\leqslant\sqrt{2|\Delta|/(\sqrt{21}-3)} = \mu.$$

При этом знак равенства необходим только в случае, когда, с точностью до единиц, система форм $\{\xi, \eta\}$ линейной унимодулярной подстановкой с коэффициентами из кольца целых чисел поля $Q(\sqrt{-7})$ может быть приведена к виду $\{\mu\xi_0, \mu\eta_0\}$, где

$$\xi_0 = x - (1 + i\sqrt{3})\,y/2,$$

$$\eta_0 = \frac{3-\sqrt{21}+i(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}x + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\,iy.$$

Аналогичные результаты для полей $Q(\sqrt{-1})$, $Q(\sqrt{-7})$ были получены Минковским (Minkowski H., Diophantische Approximationen, Leipzig, 1927, гл. 6). Автор обещает опубликовать совместно с Суиннертон-Дайером статью, в которой будет изложена методика решения подобных проблем для любых мнимых квадратичных полей $Q(\theta)$. А. В. Малышев

7082. Некоторые диофантовы уравнения, линейные относительно одного неизвестного. Милс (Certain diophantine equations linear in one unknown. Mills W. H.), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 5—12 (англ.)

Рассматривается решение в целых числах уравнения

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = z(pxy + qx + ry + s). \qquad (1)$$

При условии, что о. н. д. (b, d, p, q) делит a, о. н. д. (b, e, p, r) делит c и $p = 0$, для каждого $z = \alpha$ строится возвратная последовательность (α-последовательность) $\ldots, u_0, u_1, u_2, \ldots$, такая, что $(u_{2k}, u_{2k+1}, \alpha)$ представляет решение уравнения (1) при любом k. На основе полученных результатов устанавливается, что если α-последовательность будет периодической, то ее период равен 1, 2, 3, 4, 6, 8 или 12. При исследовании комбинируются методы работы Барнса (РЖМат, 1953, 555) и Гольдберга, Ньюмана, Страуса и Свифта (РЖМат, 1955, 1630).

В. Д. Подсыпанин

7083. Замечание к одному доказательству Вифериха. Шольц (Bemerkung zu einem Beweis von Wieferich. Scholz B.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, 58, № 2, 45—48 (нем.)

Виферих (Math. Ann., 1909, 66, 95—101), доказывая теорему о представлении любого натурального числа в виде суммы 9 кубов неотрицательных целых чисел, допустил пробел, который в 1912 г. устранил Кемпнер. Сообщив об этом, автор дает упрощенное доказательство теоремы Вифериха, не содержащее пробелов. См. также РЖМат, 1954, 3203. В. И. Нечаев

7084. О числе классов кругового поля, образованного корнем l-й степени из единицы. Инкери (Über die Klassenzahl des Kreiskörpers der l-ten Einheitswurzeln Inkeri K., Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. AI, № 199, 12 s.) (нем.)

Пусть $l\geqslant 5$ — простое число. Рассматривается поле $K(\zeta)$, где $\zeta^l = 1$ $(\zeta\neq 1)$. Число классов поля $K(\zeta)$ имеет вид

$$h = h_1h_2,$$

где

$$h_1 = \frac{(-1)^\mu}{(2l)^{\mu-1}}\prod_{s=1,3,\ldots,l-2} f(Z^s),$$

$\mu = (l-1)/2$, $Z = \exp[2\pi i/(l-1)]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{l-2} r_k x^k$, $r^k \equiv r_k \pmod l$, $0 < r_k < l$, r — первообразный корень по mod l;

$$h_2 = \left|\frac{D(\varepsilon)}{D(\eta)}\right|,\quad D(\xi) = \begin{vmatrix} \log|\xi_1| & \ldots & \log|\xi_{\mu-1}| \\ \log|S\xi_1| & \ldots & \log|S\xi_{\mu-1}| \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \log|S^{\mu-2}\xi_1| & \ldots & \log|S^{\mu-2}\xi_{\mu-1}| \end{vmatrix},$$

$$\xi_i \in K(\zeta),$$

S — подстановка $(\zeta:\zeta^r)$; $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\mu-1}$ — система основных единиц $K(\zeta)$, ε_k $(k = 1, 2, \ldots, \mu-1)$ — единицы вида

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{\zeta^{r^k}-1}{\zeta^{r^{k-1}}-1}\,\frac{\zeta^{-r^k}-1}{\zeta^{-r^{k-1}}-1}} = \zeta^{r'r^k-1}\,\frac{\zeta^{r^k}-1}{\zeta^{r^{k-1}}-1}$$

$$\left(r' \equiv \frac{1-r}{2} \pmod l\right).$$

Кроме изложения известных теорем, дано усиление сравнения Вандивера для первого множителя числа классов h_1

$$h_1 \equiv K_n l \prod_{s=1,3,\ldots,l-2} B_{(sl^{n-1}+1)/2} \pmod{l^n},$$

$$K_{a+1} = \frac{1}{2^{\mu-1}(r^\mu+1)}\prod_s (-1)^{(sl^a+1)/2}\frac{r^{sl^a}-1}{(sl^a+1)r^{sl^a}}.$$

Дано упрощенное доказательство теоремы Вандивера о признаке делимости h_2 на l.

Примечание референта. Сравнение Вандивера имеет следующий вид

$$h_1 \equiv \pm \frac{1}{2^{\mu-1}} l \prod_s B_{(sl^n+1)/2} \pmod{l^n},$$

где B_t — числа Бернулли. П. Н. Реморов

7085. Доказательство последней теоремы Ферма для всех простых показателей, не превышающих 4002. Селфридж, Никол, Вандивер (Proof of Fermat's last theorem for all prime exponents less than 4002. Selfridge J. L., Nicol C. A., Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 11, 970—973 (англ.)

Пусть $xyz \neq 0$, x, y, z, $n>2$ — целые рациональные числа Доказывается невозможность существования уравнения

$$x^n+y^n+z^n=0 \qquad (1)$$

для всех $n<4003$. Данный результат получили при продолжении численной обработки критериев разрешимости уравнения Ферма (1) при помощи быстродействующих вычислительных машин СВАК (РЖМат, 1955, 638).

Приводится таблица иррегулярных простых чисел от 2543 до 4001 и номера тех чисел Бернулли:

$$B_1,\ B_2,\ldots,\ B_{(l-3)/2} (B_1 = 1/6,\ B_2 = 1/30 \text{ и т. д.}), \qquad (2)$$

которые делятся на l. В пределах таблицы встречаются не больше трех чисел Бернулли (2), которые одновременно делятся на l. П. Н Реморов

7086. Одно особенное симметрическое уравнение в конечном поле. Карлиц (A special symmetric equation in a finite field. Carlitz L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 3—4, 445—450 (англ.; рез. русс.)

Пусть $M(a)$ — число решений уравнения $\sigma_3 = a$, где σ_3 — симметрический многочлен третьей степени от x_1, x_2, x_3, x_4. Доказывается, что в любом конечном поле $GF(q)$ $M(0) = q^3 + 2q^2 - 2q$. В случае $a \neq 0$ $M(a) = q^3 + O(q^{3/2})$. П. Н Реморов

7087. О теоремах Вольстенхольма и Лейдесдорфа. Дополнительная заметка. Дюпарк, Переманс (On theorems of Wolstenholme and Leudesdorf. Additional note. Duparc H. J. A., Peremans W.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 1, 67—69; Indagationes math., 1956, 18, № 1, 67—69 (англ.)

1. Доказывается дополнение к теореме 2-й статьи авторов с тем же заглавием (РЖМат, 1956, 4316). 2. Указывается, что формула (9) в статье Эльзофа (Eljoseph N., Riv Lemat., 1950, 4, 59—61)неверна. В. А. Голубев

7088. Ряд Фарея и ряд Стерна. Парадини (Farey series and Stern series. Paradine C. G.), Math. Gaz., 1956, 40, № 331, 37—39 (англ.)

Как знаменатели, так и числители ряда Фарея образуют ряд Стерна. Отбросив в ряде Фарея дроби 0/1, получим ряд

$$0/1;\ 1/1;\ 1/2;\ 1/1;\ 1/3;\ 1/2;\ 2/3;\ 1/1\ldots \qquad (1)$$

Выводится фомула для получения n-й дроби ряда (1) при помощи непрерывных дробей, для чего n выражается в двоичной системе счисления. В. А. Голубев

7089. Асимптотическая формула для чисел Белла. Мозер, Уайман (An asymptotic formula for the Bell numbers. Moser Leo, Wyman Max), Trans. Roy. Soc. Canada, 1955, Sec. 3, 49, June, 49—54 (англ.)

Числа Белла G_n определяются из равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n / n! = \exp(e^z - 1). \qquad (1)$$

Выводится асимптотическая формула для G_n и определяются первые члены для приближенного вычисления G_n. Опровергается формула Эпштейна (Epstein L. F., J. Math. and Phys., 1939, 18, 166—182)

$$G_n \sim (n \exp(1/\log n) / \log n)^n.$$

Дана таблица точных значений G_n от $n = 0$ до $n = 51$, вычисленная Миксой.

Опечатка: В формуле (1) напечатано $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n z^n}{n!} = \exp(e_z - 1)$. В. А. Голубев

7090. О числах Бурга. Эда (On the Burg's numbers. Eda Yoshikazu), Sci. Repts Kanazawa Univ., 1955, 3, № 2, 213—215 (англ.)

Бург нашел числа N по десятичной системе счисления такие, что числа, написанные теми же цифрами, но в обратном порядке, дают значение yN, в частном случае при $y = 9$ и $y = 4$. В статье элементарно определяются N и y при любом основании $g \geqslant 3$ системы счисления. В А. Голубев

7091. Вырожденная теорема Штаудта-Клаузена. Карлиц (A degenerate Staudt-Clausen theorem. Carlitz L.), Arch. Math., 1956, 7, № 1, 28—33 (англ.)

Продолжение работ автора над обобщением чисел Бернулли (РЖМат, 1954, 1976, 2861). Доказываются свойства чисел $\beta_m(\lambda)$, определяемых равенством

$$x / [(1 + \lambda x)^{\mu} - 1)] = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(\lambda) x^m / m!,\ (\lambda\mu) = 1.$$

Это определение аналогично определению чисел Бернулли

$$x / (e^x - 1) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m x_m / m!,$$

и поэтому числа $\beta_m(\lambda)$. имеют при рациональном λ свойства, аналогичные свойствам чисел Бернулли. В А. Голубев

7092. Предположения относительно чисел Мерсенна. Гуд (Conjectures concerning the Mersenne numbers. Good I. J.), Math. Tables and Other Aids Comput. 1955, 9, № 51, 120—121 (англ.)

Высказано предположение о том, что все числа p_n ($n = 1, 2, \ldots$) простые, если $p_1 = 3$, $p_{n+1} = 2^{p_n} - 1$, так как первые 4 числа p_n действительно простые. Автор приводит «вероятностные» соображения о p_n и считает, что вышеуказанное предположение нужно заменить противоположным. В. А. Голубев

7093. О коэффициентах $b_p^{k,j}$ некоторых симметрических функций. Мукода, Савани (On the $b_p^{k,j}$ coefficient of a certain symmetric function. Mukoda S., Sawaki S.), J. Fac. Sci. NiigataUniv., 1954, Ser. 1, 1, № 2, 6 pp. (англ.)

Пусть

$$\sum x_1^p \ldots x_k^p x_{k+1} \ldots x_{j-k(p-1)}$$

однородный симметрический полином от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степени j,

$$\sum x_1^p \ldots x_k^p x_{k+1} \ldots x_{j-k(p-1)} = f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{j-1}) + b_p^{k,j}\sigma_j,$$

где σ_i ($i = 1, 2, \ldots, j$) — основные симметрические функ-

ции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Показывается, что если p — простое число, то

$$b_p^{k,j} \equiv \binom{j-k(p-1)-1}{k} \pmod{p}.$$

С. В. Огай

7094. Превращение цифр. Гудстейн (A digit transformation. Goodstein Eric), Math. Gaz., 1956, 40, № 331, 20—21 (англ.)

Рассматривается следующее преобразование цифр данного числа по системе счисления $s+1$: каждая цифра a_i числа заменяется остатком от деления на модуль s суммы цифр $a_i + a_{i+1}$, при этом последняя цифра числа складывается с первой цифрой для получения последней цифры нового числа. Доказывается что каждое число с нечетным числом цифр повторяется после ряда трансформаций; если данное число имеет четное число цифр $2k$, то повторяется по большей мере $(2k-1)$-я трансформация числа. В. А. Голубев

7095. Обобщение теоремы Месснера. Пааше (Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes. Paasche Ivan), Compositio math., 1956, 12, № 3, 263—270 (нем.)

Доказываемые теоремы описывают линейные соотношения диагональных элементов в бесконечной последовательности «полуматриц», составленных по определенному рекуррентному закону. А. К. Леваков

7096. Распределение простых чисел. Паламá (Distribuzione dei numeri primi. Palamà Giuseppe), Illustr. scient , 1956, 8, № 74, 20—21 (итал.)

Научно-популярная статья. Приводится ряд примеров «близнецов» и «четверок» простых чисел, например наибольшие из таблицы простых чисел 11-го миллиона Кулика, Полетти и Портера (Амстердам, 1951): 10999949—10999951; 10994441—10994443—10994447—10994449.

Примечание референта При подсчете числа простых чисел автор считает и 1 простым числом. В. А. Голубев

7097 К. Теория цепных дробей. I. Элементарные цепные дроби. Перрон (Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd. I. Elementare Kettenbrüche. Perron Oskar, Stuttgart, 3 te Aufl, B. G. Teubner Verlagsges. 1954, vi, 194 pp, 29.40 DM) (нем.)

Первый том двухтомного третьего издания книги о непрерывных дробях, имеющий в основе первую часть (Элементарная арифметическая теория) предыдущего издания (2d ed., Teubner, Leipzig, 1929). Материал составлен в значительной степени в духе предыдущего издания; ест., улучшения и новые части. В основном новое характеризуется следующим образом. Упрощение достигнуто за счет введения (§ 5) матричного обозначения. В § 18 две теоремы относительно целых чисел второго порядка с определителем ± 1 доказаны с помощью непрерывных дробей. Дополнительно помещено доказательство теоремы Лагранжа о периодических непрерывных дробях (§ 21)

В § 28 и § 30 помещены теоремы относительно уравнений, связанных с уравнением Пелля, а именно $x^2 - xy - Gy^2 = 1$. Есть также новый раздел (§ 41) о приближении иррациональных чисел и новый раздел (§ 46) о непрерывных дробях с рациональными комплексными элементами. Библиографический список содержит около 18 названий новых работ, вышедших за период с 1929 по 1954 г., на которые делаются ссылки в тексте H. S. Wall

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 239.

7098 К. Геометрия чисел. Келлер (Geometrie der Zahlen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen 12, 27. Band I. Algebra und Zahlen theorie. 2. Teil. C. Reine Zahlen theorie. Heft 11, Teil III. Keller Ott-Heinrich. Leipzig, B. G. Teubner Verlagsges., 1954, 84 S., 8.80 DM) (нем.)

Собрание результатов по теории чисел, полученных геометрическими методами к 1951 г. Среди глав есть следующие: О выпуклых телах в решетках, звездообразных телах, линейных формах; О минимумах однородных форм, неоднородных форм, определенных квадратичных форм; О непрерывных дробях и алгебраических числах. Для некоторых основных результатов даны только наброски доказательств. Результаты о звездообразных телах, полученные за последние два десятилетия, помещены со значительными добавлениями. К ним относится параграф с гипотезами, высказанными Малером. Глава об определенных квадратичных формах содержит ясное изложение работы о проблеме приведения. D. Derry

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 451.

7099 К. Элементарная теория чисел. Гриффин (Elementary theory of numbers. Griffin Harriet. New York — Toronto — London, Mc — Graw — Hill Book Co 1954, IX, 203 pp., 5. 00 doll.) (англ.)

См. также: 7102, 7116, 7176, 7402, 7712, 7713

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7100. Формулы Варинга и их применения для некоторых специальных многочленов. Гэн Цзи (華氏公式及其在特殊多項式上的應用 . 耿濟), 新科學, Синькэсюэ, 1955, № 4, 30—36 (кит.)

Дано новое элементарное доказательство формулы Варинга для сумм степеней корней многочлена Чжан Юань-да

7101. Метод решения системы трехчленных алгебраических уравнений и его приложение к решению некоторых задач математической физики. Кармишин А. В., Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 8, 39—45

Рассматривается вопрос о решении системы n трехчленных уравнений с n неизвестными вида

$$y_i + \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i-1} y_{i-1} = \gamma_i,$$

определитель которой отличен от нуля. Выведены формулы, позволяющие упростить вычисление определителей, используемых при решении этой системы по правилу Крамера. Приведены примеры применения указанного способа к решению методом конечных разностей дифференциального уравнения второго порядка и к решению методом сеток уравнения в частных производных эллиптического типа. П. В. Николаев

7102. Алгебра полумагических квадратов. Уэйнер (The algebra of semi-magic squares. Weiner L. M.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 4, 237—239 (англ.)

Полумагическим квадратом или S-матрицей называется матрица $A = (a_{ij})$ n-го порядка, для которой $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} = S(A)$ для любого j. Доказано, что множество всех S-матриц n-го порядка образуют под-

алгебру полной матричной алгебры степени n, причем

$$S(A+B)=S(A)+S(B),\ S(AB)=S(A)S(B),$$

$$S(kA)=kS(A),\ k\in F.$$

Эта алгебра является прямой суммой одномерного идеала, состоящего из S-матриц с элементами $a_{ij}=a$, и идеала, состоящего из S-матриц, для которых $S(A)=0$. Размерность последнего идеала равна $(n-1)^2$ (при $n>1$) и его базис образуют матрицы A_{ij}, у которых $a_{11}=1$, $a_{1j}=-1$, $a_{i1}=-1$, $a_{ij}=1$, а остальные элементы равны нулю $(i,j=2,\ldots,n)$. Эти результаты справедливы для матриц над любым полем, характеристика которого взаимно проста с n. Л. Я. Окунев

7103. О некоторых определителях, составленных из членов арифметической прогрессии высшего порядка. Левин В. И., Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, вып. 5, 73—75

Находится определитель

$$D_n=|a_{i+j}|,\ i,j=0,1,\ldots,n,$$

составленный из членов $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ арифметической прогрессии порядка $k\geqslant 1$. Этот определитель равен нулю, если $k<n$, и равен $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\Delta^k a_v)^{n+1}$, если $k=n$. Л. Я. Окунев

7104. Новое доказательство одной теоремы Н. Г. Чеботарева. Решетняк Ю. Г., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 155—157

Приводится новое доказательство того, что все миноры определителя Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & & \varepsilon^{p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varepsilon^{p-1} & \ldots & \varepsilon^{(p-1)^2} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{p}}$, p — простое число, отличны от нуля. Л. Я. Окунев

7105. О ранге матрицы. Лабутин Д. Н., Уч. зап. Кабардинск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 8, 29—32

Приводится алгорифм вычисления ранга матрицы, основанный на переходе от данной матрицы к матрице, составленной из ее миноров 2-го порядка. Ф. Р. Гантмахер

7106. Об одном условии устойчивого функционирования математических машин. Пародн (Sur un critère de stabilité de fonctionnement des machines mathématiques analogiques. Parodi Maurice), C. r. Acad. Sci., 1955, 241, № 17, 1104—1105 (франц.)

Доказано, что матрица $(a_{ij})_1^n$ положительно определена, если $a_{ii}>0$ для любого $i=1,\ldots,n$, и существуют такие положительные постоянные $k_1, k_2, \ldots, k_n$, удовлетворяющие неравенству $\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}\leqslant 1$, что $a_{ii}>k_i m_i$ $(m_i=\max_{j\neq i}|a_{ij}|;\ i=1,\ldots,n)$. Ф. Р. Гантмахер

7107. Об одном свойстве корней уравнения, которое встречается в механике. Пародн (Sur une propriété des racines d'une équation qui intervient en mécanique Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 16, 1019—1021 (франц.)

Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ и p, q — положительные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}\leqslant 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p\geqslant 1.$$

Пусть далее

$$\lambda_{1i}=\frac{k_i^{1/q}}{|a_{ii}|}\left\{\sum_{j\neq i}|a_{ij}|^p\right\}^{1/p},$$

$$\lambda_{2i}=\frac{k_i^{1/q}}{|a_{ii}|}\left\{\sum_{j\neq 1}|b_{ij}|^p\right\}^{1/p}\quad (i=1,\ldots,n),$$

где (a_{ij}), (b_{ij}) — некоторые матрицы n-го порядка. Рассмотрим объединение (D_1) всех точек, принадлежащих n овалам Декарта

$$\left|z+\frac{b_{ii}}{a_{ii}}\right|\leqslant\lambda_{1i}|z|+\lambda_{2i}\quad (i=1,\ldots,n).$$

Утверждается, что любой корень уравнения $\det\|a_{ij}z+b_{ij}\|_1^n=0$ принадлежит области (D_1). Область (D_1) для транспонированных матриц (a_{ij}) и (b_{ij}) обозначим через (D_2). Очевидно, что любой корень рассматриваемого уравнения принадлежит пересечению областей (D_1) и (D_2). В предельном случае $p=1$, $q=\infty$ овалы Декарта, составляющие область D_1, определяются неравенствами

$$\left|z+\frac{b_{ii}}{a_{ii}}\right|\leqslant|z|\frac{\Sigma_{j\neq i}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}+\frac{\Sigma_{j\neq i}|b_{ij}|}{|a_{ii}|}\quad (i=1,\ldots,n),$$

а в случае $p=\infty$, $q=1$ — неравенствами

$$\left|z+\frac{b_{ii}}{a_{ii}}\right|\leqslant k_i\frac{a_i}{|a_{ii}|}|z|+k_i\frac{b_i}{|a_{ii}|}\quad (i=1,\ldots,n),$$

где $a_i=\max_{j\neq i}|a_{ij}|$, $b_i=\max_{j\neq i}|b_{ij}|$ $(i=1,\ldots,n)$.

Ф. Р. Гантмахер

7108. Теорема об альтернативе для пар матриц. Антосевич (A theorem on alternatives for pairs of matrices. Antosiewicz H. A.), Pacif. J. Math., 1955, 5, Suppl. № 1, 641—642 (англ.)

Пусть матрицы A и B состоят из одного и того же числа строк. Доказывается, что следующие два предложения равносильны:

I. Либо $A'u>0$, $B'u\geqslant 0$ для некоторого вектора u, либо $Ax+By=0$ при некоторых векторах $x\geqslant 0$, $x\neq 0$, $y\geqslant 0$.

II. Либо $A'u\geqslant 0$, $A'u\neq 0$, $B'u\geqslant 0$ для некоторого вектора u, либо $Ax+By=0$ при некоторых векторах $x>0$, $y\geqslant 0$.

Автор утверждает, что этот результат полезен в теории линейного программирования. Ф. Р. Гантмахер

7109. Несколько формул для обратных матриц. Синомия, Оти (逆行列に關する二，三の公式. 西野宮哲郎, 大地羊三), 土木學會論文集, Добоку гаккай ромбунсю, Trans. Japan. Soc. Civil Engrs), 1955, № 24, 78—82 (япон.; рез. англ.)

Пусть A — невырожденная $n\times n$-матрица и β, γ — произвольные соответственно $n\times i$- и $i\times n$-матрицы. Тогда

$$(A+\beta\cdot\gamma)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}\beta(E+\gamma A^{-1}\beta)\gamma A^{-1}.$$

Если матрица U отличается от матрицы A только одним элементом x-й строки и y-го столбца, причем разность равна ε_{xy}, то

$$U^{-1}=(\rho_{ik})-\begin{pmatrix}\rho_{1x}\\ \vdots\\ \rho_{nx}\end{pmatrix}\varepsilon_{xy}(E+\rho_{xy}\varepsilon_{xy})^{-1}(\rho_{y1}\cdots\rho_{yn}),$$

где $A^{-1} = (\rho_{ik})$.

Пусть матрица A_{xy} получается из матрицы A зачеркиванием x-й строки и y-го столбца. Тогда

$$A_{xy}^{-1} = (\rho_{ik})_{xy} - \begin{pmatrix} \rho_{1x} \\ \vdots \\ \rho_{y-1,x} \\ \rho_{y+1,x} \\ \vdots \\ \rho_{nx} \end{pmatrix} \rho_{xy}^{-1} (\rho_{y1} \cdots \rho_{y,x-1} \times \rho_{y,x+1} \cdots \rho_{yn}).$$

С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -a^{-1}bA^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & b' \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1}b' \\ -E \end{pmatrix} (a - bA^{-1}b')^{-1} (bA^{-1}, -E),$$

где b и b' — n-мерные векторы, а $a \neq 0$. Все приведенные формулы справедливы и для матриц, элементами которых являются матрицы. В конце статьи помещен ряд примеров, взятых из строительной техники.

Лим Рюн-чиль

7110. Один метод нахождения корней произвольной матрицы. Гринстадт (A method for finding roots of arbitrary matrices. Greenstadt J.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 50, 47—52 (англ.)

Излагается итерационный процесс приближенного приведения к треугольной форме произвольной комплексной матрицы с помощью последовательных унитарных преобразований. Сходимость процесса не доказана. Статистическая обработка результатов применения этого метода показывает, что потребное число итераций растет примерно как порядок матрицы. Наличие кратных корней замедляет процесс. Приводятся соображения о точности метода в связи с погрешностью, допускаемой счетной машиной. Формула (12) написана с ошибкой и в некоторых случаях (например, для численного примера, приведенного в статье) неприменима.

А. И. Лавут

7111. Теорема о позитивных матрицах. Блей (A theorem on positive matrices. Blij F. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 1, 108—109; Indagationes math., 1956, 18, № 1, 108—109 (англ.)

Пусть S — позитивная (т. е. симметрическая положительно определенная) вещественная $n \times n$-матрица, а C — целочисленная $n \times m$-матрица, $n \geqslant m$, с взаимно простыми минорами m-го порядка. Тогда матрица $S_1 = SC\,(C'SC)^{-1}C'S$ имеет ранг $n - m$ и унимодулярно эквивалентна квазидиагональной матрице вида $\{T, 0\}$, где T — позитивная $(n-m) \times (n-m)$-матрица с определителем, равным $|S| \cdot |C'SC|^{-1}$. Для $m = 1$ эта теорема была доказана Редеи (Rédei L., Math. Ann., 1950, 122, 340—342).

Ф. Р. Гантмахер

7112. Матрицы, перестановочные со своей производной. Терракини (Matrici permutabili con la propria derivata. Terracini Alessandro), Ann. mat. pura ed appl., 1955, 40, 99—112 (итал.)

Продолжая исследования Асколи и Швердтфегера (Rend. Semin. matem. Torino, 1950, 9, 245—250; 1952, 11, 329—333 и 335—336), автор для аналитической матрицы $A(t)$ исследует, когда из соотношения $A\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dt}A$ (к которому иногда присоединяются дополнительные соотношения, содержащие старшие производные от $A(t)$) вытекает полная перестановочность матричной функции $A(t)$, т. е. перестановочность любых двух ее значений $A(t_1)$ и $A(t_2)$.

Основной результат: пусть $\mu(t)$ — степень минимального уравнения матрицы $A(t)$, а $N(t)$ — число линейно независимых матриц, перестановочных с $A(t)$ (число N определяется формулой Фробениуса). Тогда, если матрица A перестановочна со своими производными нечетного порядка $\frac{dA}{dt}, \frac{d^3A}{dt^3}, \ldots, \frac{d^{2s-1}A}{dt^{2s-1}}$, где $2s - 1 \geqslant N(t) - \mu(t)$, то для $A(t)$ имеет место полная перестановочность.

Ф. Р. Гантмахер

7113. Заметки по теории матриц. VII. Беллман (Notes on matrix theory. VII Bellman Richard), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 9, 647—648 (англ.)

Пусть A, B и $C = \lambda A + (1-\lambda)B$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ — три положительно определенные матрицы с характеристическими числами (расположенными в порядке возрастания) x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ соответственно, и

$$|A|_k = \Pi_{i=1}^k x_i, \quad |B|_k = \Pi_{i=1}^k y_i,$$
$$|C|_k = \Pi_{i=1}^k z_i \; (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда, как показал Цюй Фан,

$$|C|_k \geqslant |A|_k^{\lambda} |B|_k^{1-\lambda} \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

и

$$\sum_{i=1}^k z_i \geqslant \lambda \sum_{i=1}^k x_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^k y_i \; (k = 1, \ldots, n). \qquad (2)$$

Оказывается, что неравенство (2) следует из неравенства (1).

Так как для произвольных симметрических матриц A и B всегда существует такое число $c > 0$, что матрицы $A + cI$ и $B + cI$ положительно определены, то неравенство (2) может быть сформулировано в следующей общей форме: Если A, B и $C = A + B$ — симметрические матрицы с характеристическими числами (расположенными в порядке возрастания) x, y_i, z_i $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$\sum_{i=1}^k z_i \geqslant \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=1}^k y_i \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ф. Р. Гантмахер

7114. О некоторых линейных инвариантных соотношениях между элементами квадратной матрицы. Бюргерхаут (On certain linear invariant relations between the element of a square matrix. Burgerhout Th. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 3, 315—321; Indagationes math., 1955, 17, № 3, 315—321 (англ.)

Рассматриваются квадратные матрицы U порядка n с элементами из произвольного поля. Классом r матрицы U называется степень ее минимального многочлена $\varphi(x) = \sum_{m=0}^r c_m x^m$. Пусть u_{kl}^m — элементы матрицы U^m. Тогда

$$\sum_{m=0}^r c_m u_{kl}^{(m)} = 0 \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, система n^2 уравнений с $r+1$ неизвестными

$$p_{kl} \equiv \sum_{m=0}^r x_m u_{kl}^{(m)} = 0 \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

содержит r независимых уравнений:

$$p_i \equiv \sum_{m=0}^r x_m u_i^{(m)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r);$$

любое уравнение системы можно однозначно представить в виде

$$p_{kl} \equiv \sum_{i=1}^{r} \alpha_{kl}^{i} p_i \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что для любых k и l ($1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant n$)

$$u_{kl}^{(m)} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{kl}^{i} u_i^{(m)} \quad (m = 0, 1, \ldots, r). \qquad (1)$$

Такое же соотношение имеет место и для элементов любой матрицы V, являющейся многочленом от матрицы U, если только под v_i подразумевать элементы матрицы V, расположенные на тех же местах, на каких в матрице U расположены элементы u_i. Соотношение вида (1), остающееся справедливым и для каждой матрицы V, являющейся многочленом от U, называется инвариантным соотношением матрицы U относительно элементов u_i, которые в этом случае называются базисными элементами матрицы U.

Основные из доказанных в работе утверждений:

1. Класс матрицы V, являющейся многочленом от матрицы U, не превышает класса матрицы U.

2. Матрица V тогда и только тогда является многочленом от матрицы U класса r, когда она удовлетворяет инвариантному соотношению матрицы U относительно r базисных элементов. Из этого утверждения следует, что если матрицы V и W являются многочленами от матрицы U класса r и класс матрицы V также равен r, то матрица W будет многочленом и от матрицы V.

3. Для любой матрицы U существуют такая $1 \times n$-матрица r_0 и такие квадратные матрицы B_l ($l = 1, 2, \ldots, n$) порядка n, что l-й столбец V_l ($l = 1, 2, \ldots, n$) любой матрицы V, являющейся многочленом от матрицы U, имеет вид $B_l V' r_0'$. Матрицы B_l симметричны и определяются из равенств $B_l r_0' = I_l$ и $UB_l = B_l U'$, где I_e — l-й столбец единичной матрицы порядка n. Если класс матрицы U равен n, то матрицы B_l определяются однозначно.

Е. Г. Шульгейфер

7115. Вычисление присоединенной матрицы для целочисленных матриц. Бодевиг (Die Berechnung der Ganzzahligen Adjungierten. Bodewig E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 91—94; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 91—94 (нем.)

Излагается метод вычисления присоединенной матрицы, основанный на приведении данной матрицы к диагональному виду.

В. Н. Фаддеева

7116. Одно дисфантово матричное уравнение. Джонс (A Diophantine matrix equation. Jones John, Jr), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 4, 244—247 (англ.)

Пусть P — либо кольцо функций комплексного переменного, аналитических в некоторой области, либо произвольное кольцо главных идеалов, а P_n — кольцо матриц порядка n над кольцом P. Доказывается, что уравнение $AX - YB = C$, где $A, B, C \in P_n$, тогда и только тогда имеет решение $X, Y \in P_n$, когда матрицы

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

эквивалентны.

В. С. Потапов

7117. Об эквивалентности нормальных матриц в смысле Севери. Бенедикти (Sull' equivalenza tra matrici normali di Severi. Benedicty Mario), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **38**, 51—76 (итал.)

Работа связана с посмертным мемуаром Конфорто (РЖМат, 1956, 3279). Нормальными матрицами в смысле Севери автор называет матрицы вида

$$s = \left\| \begin{matrix} A^{(p,p)}; & 0^{(p,k_1)}; & \Omega^{(p,p)} \\ 0^{(k_1,p)}; & U^{(k_1,k_1)}; & \Phi'^{(k_1,p)} \\ 0^{(k_2,p)}; & 0^{(k_2,k_1)}; & \Psi'^{(k_2,p)} \end{matrix} \right\|$$

где

$$\Psi' = \left\| \begin{matrix} U^{(r,r)}; & \Psi^{(r,p-r)} \\ 0^{(k_2-r,r)}; & 0^{(k_2-r,p-r)} \end{matrix} \right\|, \quad \Phi' = \| 0^{(k_1,r)}; \ \Phi^{(k_1,p-r)} \|,$$

Φ и Ψ — произвольные комплексные матрицы, 0 — нулевая матрица, Ω — комплексная симметрическая матрица, мнимая часть которой — положительно определенная, U — унитарная диагональная матрица и A—диагональная матрица с элементами $1/d_i$, где d_i — целые, $d_1 = 1$ и d_i — делитель d_{i+1}; верхние индексы указывают число строк и столбцов матрицы. Две матрицы s и s^* называются эквивалентными, если $s^* = bsB$, где b — неособенная, а B — целочисленная унимодулярная матрица. Характеристиками матрицы s называются целые числа p, k_1, k_2, r и $d_1, \ldots, d_p$. Характеристики эквивалентных нормальных матриц, вообще говоря, различны. Например, нормальная матрица с $p = r$ эквивалентна нормальной матрице с характеристиками $p' = 0$, $k_1' = k_1 + 2r$, $k_2' = k_2 - r$, $r' = 0$; нормальная матрица с $p = r + 1$ эквивалентна нормальной матрице с характеристиками $p' = 1$, $k_1' = k_1 + 2r$, $k_2' = k_2 - r$, $r' = 0$. С другой стороны, если $p > r + 1$ и все элементы матриц Ω, Φ и Ψ алгебраически независимы над полем рациональных чисел, то любая эквивалентная данной матрице s нормальная матрица имеет те же характеристики.

7118. Целые характеристики и элементарные делители нормальных матриц в смысле Севери. Бенедикти (Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi. Benedicty Mario), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1954, **16**, № 6, 716—720 (итал.) Краткое изложение предыдущей работы (реф. 7117).

В. В. Морозов

7119. О наилучших приближенных решениях линейных матричных уравнений. Пенроз (On best approximate solutions of linear matrix equations. Penrose R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 1, 17—19 (англ.)

Для произвольной (вообще говоря, прямоугольной) матрицы A определяется обратная матрица A^+, как единственное решение системы уравнений

$$AA^+A = A, \ A^+AA^+ = A^+, \ (AA^+)^* = AA^+, \ (A^+A)^* = A^+A,$$

где B^* — комплексно-сопряженная и транспонированная матрица для B. Если матрица A вещественна, то и A^+ вещественна. Если A — невырожденная квадратная матрица, то $A^+ = A^{-1}$. Через $\| A \|$ обозначается сумма квадратов модулей всех элементов матрицы A. Матрица X_0 называется наилучшим приближенным (н. п.) решением матричного уравнения $f(X) = G$, если для всех X

$$\| f(X) - G \| \geqslant \| f(X_0) - G \| \qquad (1)$$

и если $\| X \| \geqslant \| X_0 \|$ каждый раз, когда в (1) имеет место знак равенства.

Доказывается, что матрица $X_0 = A^+B$ является единственным н. п. решением уравнения $AX = B$, матрица $X_0 = A^+BC^+$ — единственным н. п. решением уравнения $AXC = B$ и т. д. В частности, матрица A^+ является един-

ственным н. п. решением уравнения $AX = I$. Если матрица A^*A или матрица AA^* — невырождена, то $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ или $A^* = A^*(AA^*)^{-1}$ соответственно. По этим формулам и определяется обычно по методу наименьших квадратов н. п. решения несовместной системы линейных уравнений.

Приводятся способы вычисления матрицы A^+ и в тех случаях, когда матрицы AA^* и A^*A вырождены. Так, например, представляя данную матрицу в виде

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

где A — неособенная квадратная матрица того же ранга, что и данная матрица M, будем иметь

$$M^+ = \begin{pmatrix} A^*PA^* & A^*PC^* \\ B^*PA^* & B^*PC^* \end{pmatrix},$$

где $P = (AA^* + BB^*)^{-1}A(A^*A + C^*C)^{-1}$.

Ф. Р. Гантмахер

7120. Дополнение к работе «О линейных системах простых интегралов первого рода с приведенными периодами на пикаровом многообразии». Конфорто (Complemento ad una ricerca sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard. Conforto Fabio), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 2, 119—125 (итал.)

Показывается, что приведенный в предыдущем исследовании автора (РЖМат, 1955, 5263) пример нетривиален, т. е. что существуют матрицы Римана рода 3, не обладающие системой $E_{1,3}$. Доказательство основано на следующей теореме из теории матриц: соотношение $\det(AZ + B) = 0$, где A и B — данные матрицы (комплексные) одного и того же порядка p, тогда и только тогда имеет место для любой симметрической матрицы Z порядка p, когда ранг матрицы $\|A, B\|$ меньше p.

В. В. Морозов

7121. Об унитарных и симметрических матрицах с элементами из тела вещественных кватернионов. Уигман (On unitary and symmetric matrices with real quaternion elements. Wiegmann N. A.), Canad. J. Math., 1956, **8**, № 1, 32—39 (англ.)

Кватернионная матрица V называется унитарной, если $VV^* = E$, где E — единичная матрица, а V^* — матрица, сопряженная к транспонированной матрице V'. Унитарная матрица V называется T-унитарной, если унитарна матрица V'. Унитарная матрица V тогда и только тогда T-унитарна, когда существуют такие вещественные ортогональные матрицы U и W, что матрица UVW диагональна. Это условие выполнено тогда и только тогда, когда матрицы VV' и $V'V$ симметричны. Среди других результатов работы отметим следующую теорему: Кватернионную матрицу A тогда и только тогда можно представить в виде UDU', где U — вещественная ортогональная матрица, а D — диагональная матрица, когда матрица A симметрична и эрмитова составляющая ее полярного представления вещественна.

Работа содержит также некоторые результаты о матрицах с комплексными элементами. Ю. Л. Шмульян

7122. Метод краковянов и метод многомерных последовательностей. Кохманский (Metoda krakowianova i metoda ciągów wielowymiarowych. Kochmanski Tadeusz), Kosmos (Warszawa), 1955, **B1**, № 2, 145—154 (польск).

Алгебра матриц, умножение в которой определяется следующим образом: $A \cdot B = B'A$, называется алгеброй краковянов. Дается исторический обзор и приводятся элементарные свойства алгебры краковянов. Указываются также приложения алгебры краковянов в теории ошибок и сферической тригонометрии. Библ. 20 назв.

С. Р.

7123. Замечание о цепях сизигий в идеале тэта-функций. Герарделли (Un' osservazione sulla catena delle sizigie di un ideale di funzioni theta. Gherardelli Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 2, 190—194 (англ.)

Доказано, что при любом достаточно большом n любая функция θ_{kn} порядка kn из кольца тэта-функций, ассоциированного с данной матрицей Римана с дивизорами, равными 1, может быть представлена в виде многочлена от функций θ_n. Кроме того, излагается новое доказательство теоремы о цепях сизигий в кольце тэта-функций (Andreotti, Acad. Roy. Belgique, Mem. cl. sci., 1952, 27, 1—56).

Gh. Galbură

ГРУППЫ

7124. О примитивных группах подстановок. Ито (On primitive permutation groups. Itô. Noboru), Acta scient. math., 1955, **16**, № 3-4, 207—228 (англ.)

Исследуются примитивные группы подстановок, содержащие транзитивный абелев нормальный делитель. Дан пример примитивной группы подстановок, содержащей транзитивный нормальный делитель, являющийся абелевой группой типа, отличного от $(p, p, \ldots p)$. Доказано, что примитивная группа подстановок, содержащая транзитивный абелев нормальный делитель типа (p^a, p^b) (p — простое число, $a \neq b$), неразрешима.

В. К. Туркин

7125. Примитивные группы подстановок степени $2p$. Виландт (Primitive Permutationsgruppen vom Grad $2p$. Wielandt Helmut), Math. Z., 1956, **63**, № 5, 478—485 (нем.)

Пусть p — простое число, $\mathfrak{G}$ — примитивная группа подстановок степени $2p$ и $\mathfrak{G}_1$ — ее максимальная подгруппа состоящая из подстановок, оставляющих символ 1 на месте. Доказано, что число t систем интранзитивности, на которые распадается совокупность символов $1,2,\ldots; 2p$ — относительно группы $\mathfrak{G}_1$, не превосходит трех. Если $t = 3$, то $2p = m^2 + 1$ ($m = 1,3,5,\ldots$), степени транзитивных конституэнтов группы $\mathfrak{G}_1$ равны соответственно 1, $m(m-1)/2$, $m(m+1)/2$, а группа $\mathfrak{G}$, рассматриваемая как группа комплексных линейных преобразований, содержит три неприводимых конституэнта, степени которых равны соответственно 1, $p-1$, p. Отсюда вытекает, что любая примитивная группа степени $2p \neq m^2 + 1$ дважды транзитивна. В. К. Туркин

7126. Замечание об одной теореме Оре. Сеп (Bemerkung zu einem Satz von O. Ore. Szép J.), Publs mathematicae, 1953, **3**, № 1-2, 81—82 (нем.)

Доказано, что конечная группа G тогда и только тогда непроста, когда она содержит истинную подгруппу H, перестановочную как со всеми подгруппами, сопряженными (в G) с силовской p-подгруппой группы H, так и со всеми подгруппами, сопряженными с некоторой истинной подгруппой группы G, порядок которой не делится на p. Автором не отмечено, что в тривиальном случае, когда группа G является p-группой, это предложение ошибочно.

В. К. Туркин

7127. О группах четного порядка. Брауэр, Фаулер (On groups of even order. Brauer Richard, Fowler K. A.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 565—583 (англ.)

Показано, что любая группа G четного порядка $g > 2$ содержит собственную подгруппу порядка $f > \sqrt[3]{g}$ и отличный от себя нормальный делитель, индекс которого либо равен двум, либо меньше чем $\left[\frac{n(n+2)}{2}\right]!$, где $n = g/m$, а m — число инволюций (элементов второго порядка) в группе G. Из последнего утверждения вы-

текает, что существует только конечное число простых групп, в каждой из которых нормализатор некоторой инволюции изоморфен фиксированной группе. Доказательство основано на изучении классов сопряженных элементов группы G, содержащих действительные (т. е. сопряженные со своими обратными) элементы.

Пусть $G' = G \setminus e$, где e — единица группы G. Расстоянием $d(a, b)$ между элементами $a, b \in G'$ называется наименьшее из таких целых чисел t, что существует цепочка элементов $g'_0 = a, \ldots, g'_t = b$, где $g'_i \in G'$ и $g'_{i-1} g'_i = g'_i g'_{i-1}$ $(i = 0, \ldots, t)$. По определению, $d(a,a)=0$ и $d(a, b) = \infty$, если не существует цепочки указанного вида. Расстоянием от элемента $a \in G'$ до подмножества $M \subseteq G'$ называется $\min_m d(a, m)$ где $m \in M$. Если группа G содержит несопряженные инволюции, то $d(a, b) \leqslant 3$ для любых инволюций $a, b \in G'$ и $d(a_1, b_1) \leqslant 5$ для любых элементов $a_1, b_1 \in G'$, нормализаторы которых имеют четный порядок. Числа 3 и 5 в приведенных неравенствах не могут быть уменьшены. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех инволюций группы G и $a \in G$ — действительный элемент. Если $d(a, \mathfrak{M}) \geqslant 4$, то $d(a, \mathfrak{M}) = \infty$. Тогда нормализатор $N(a)$ элемента a в группе G является абелевой группой и совпадает с нормализатором любого своего элемента. Порядок h нормализатора $N(a)$ взаимно прост с его индексом, и существует такая инволюция $c \in G$, что $c^{-1}xc = x^{-1}$ для любого $x \in N(a)$. Если $n(c)$ — порядок нормализатора $N(c)$ и $N(a)$ не является нормальным делителем группы G, то $h \leqslant n(c) + 1$.

Далее показано, что группа G четного порядка имеет не главный действительный характер, степень которого не превосходит числа $n = g/m$. Указаны некоторые условия, при которых группа G имеет характеры со степенями, делящимися на порядок силовской p-подгруппы группы G, а также условия, при которых все силовские p-подгруппы группы G абелевы. С. Д. Берман

7128. Дополнение к заметке «О теореме Брауэра о простых группах». Нагаи (Supplement to «Note on Brauer's theorem of simple groups». Nagai Osamu), Osaka Math. J., 1953, 5, № 2, 227—232 (англ.)

Пусть группа G порядка g, совпадающая со своим коммутантом, содержит элемент a простого порядка p, коммутирующий только со своими степенями. Тогда, как показал Р. Брауэр (Brauer R., Proc. Nat. Acad. Sci., 1939, 25; Ann. Math., 1943, 44, 57—79), $g = \frac{1}{t} p(p-1) \times (1 + np)$, где n и t — целые числа и $p - 1 \equiv 0 \pmod t$. Кроме того, если $n < \frac{1}{3}(p+7)$, то либо $G \cong LF(2, p)$, либо $p = 2^\mu \pm 1$ и $G \cong LF(2, 2^\mu)$ (через $LF(2,2^\mu)$ обозначается группа бинарных дробнолинейных преобразований с коэффициентами из поля $GF(2^\mu)$).

В предыдущей заметке (Nagai O., Osaka Math. J., 1952, 4, 113—120) автор доказал, что если $n < p + 2$ и $t \not\equiv 0 \pmod 2$, то $p = 2^\mu - 1$ и $G \cong LF(2,2^\mu)$. В реферируемой работе устанавливается, что это утверждение имеет место и для $n = p + 2$ (и $t \not\equiv 0 \pmod 2$). С. Д. Берман

7129. Обращение теоремы Р. Брауэра. Грин (On the converse to a theorem of R. Brauer. Green J. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 237—239 (англ.)

Обобщенным характером конечной группы G называется целочисленная линейная комбинация $\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_i$ где $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — характеры неприводимых представлений группы G над полем комплексных чисел. Говорят, что система M подгрупп группы G обладает свойством (A), если всякая комплекснозначная функция класса сопряженных элементов группы G, индуцирующая на каждой подгруппе $H \in M$ обобщенный характер этой подгруппы, является обобщенным характером группы G. Согласно известной теореме Р. Брауэра, система элементарных подгрупп конечной группы обладает свойством (A). (Элементарной группой называется, прямое произведение p-группы на циклическую группу, порядок которой не делится на p). В реферируемой заметке доказывается, что если система M подгрупп конечной группы G обладает свойством (A), то для любой элементарной подгруппы E группы G существует подгруппа $H \in M$, содержащая подгруппу, сопряженную с E. С. Д. Берман

7130. Об индуцированных характерах групп конечного порядка. Осима (On the induced characters of groups of finite order. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1953, 3, № 1, 47—64 (англ.)

Пусть G — конечная группа, $\chi_1, \ldots, \chi_n$ — ее неприводимые характеры, Q — фиксированная силовская q-подгруппа группы G (q — простое число); $\theta_1, \ldots, \theta_m$ (θ_1 — главный характер) — различные неприводимые характеры группы Q, θ_i^* — характер группы G, индуцированный характером θ_i, и h — число классов сопряженных элементов группы G, содержащих элементы из Q. Строятся линейно независимые обобщенные характеры $\theta'_1, \ldots, \theta'_h$ группы Q (см., например реф. 7129) обладающие следующими свойствами: 1) $\theta'_i(a) = \theta_i(a) + \sum_{i=1}^{m-h} \alpha_{i,\,h+j} \theta_{h+j}(a)$ (где $a \in Q$, а $\alpha_{i,\,h+j}$ — рациональные числа, знаменатели которых взаимно просты с q); 2) $\theta'_1(a) = \theta_1(a)$; 3) $\theta'_i(a) = \theta'_i(b)$, если элементы $a, b \in Q$ сопряжены в G; 4) $\chi_i(a) = \sum_{j=1}^h b_{ij} \theta'_j(a)$, где B_{ij} — неотрицательные целые числа, соответствующие разложению $\chi_i(a) = \sum_{j=1}^m b_{ij} \theta_j(a)$; 5) характеры $\theta_1^*, \ldots, \theta_h^*$ линейно независимы.

Показано, что если произвольный элемент $g \in G$ представить в виде $g = ar$ $(ar = ra)$, где r — некоторый q-регулярный элемент, а порядок элемента a является степенью q, то характеры $\chi_i(g)$ $(i = 1, \ldots, n)$ являются линейными комбинациями с целыми алгебраическими коэффициентами характеров θ'_j, построенных для силовской q-подгруппы нормализатора элемента r в группе G.

В качестве приложения этого результата доказываются известные теоремы Брауэра об индуцированных характерах и об определителе, составленном из картановых инвариантов группы (см. Алгебр. реф. сб. 462). С. Д. Берман

7131. Строение групп конечного порядка, обладающих свойством $P \pmod p$. Пиккар (Structure de groupes d'orde fini jouissant de la propriété $P \pmod p$). Piccard Sophie), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 23, 2217—2219 (франц.)

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_m$ — образующие конечной группы G, $f_i(S_1, S_2, \ldots, S_m) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — соответствующие определяющие соотношения, n_{ij} — степень многочлена $f_i(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ относительно S_j $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ и p — простое число. Если $n_{ij} \equiv 0 \pmod p$ при всех значениях i и j, то группа G называется группой, обладающей свойством $P \pmod p$. Утверждается (без доказательства), что такие группы обладают следующими свойствами:

1. Система образующих $S_1, S_2, \ldots, S_m$ минимальна.

2. Группа G обладает свойством $P \pmod p$ по отношению к любому базису (минимальной системе образующих).

3. Порядок N группы G делится на p^m.

4. Группа G содержит подгруппу $M_{00\ldots0}$ порядка N/p^m, ни один элемент которой не может принадлежать базису.

5. Порядок всякого элемента, не принадлежащего группе $M_{00\ldots0}$, делится на p.

6. Число всех базисов группы G не больше $\left(\frac{N}{p^m}\right)^m \prod_{i=0}^{m-1}(p^m-p^i)\frac{1}{m!}$.

7. Для любого целого положительного $i \leqslant m-1$ группа G содержит не менее $\prod_{k=0}^{i-1}(p^m-p^k)/\prod_{k=0}^{i-1}(p^i-p^k)$ различных подгрупп порядка N/p^i.

8. Пусть $S=f(S_1, S_2, \ldots, S_m)$ — произвольный элемент группы G. Этот элемент принадлежит классу $M_{a_1 a_2 \ldots a_m}$, если $a_i \equiv n_i \pmod p$, где n_i — степень многочлена f относительно S_i. Все элементы, сопряженные с S в G, входят в тот же класс, что и S. Число всех классов равно p^m. Так как $M_{a_1 a_2 \ldots a_m} M_{b_1 b_2 \ldots b_m} = M_{c_1 c_2 \ldots c_m}$, где $c_i \equiv a_i + b_i \pmod p$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, то классы $M_{a_1 a_2 \ldots a_m}$ составляют абелеву группу Г типа $(p, p, \ldots, p)$ с единичным элементом $M_{00\ldots0}$. Классы $M_{a_1^i a_2^i \ldots a_m^i}$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ тогда и только тогда независимы (т. е. составляют базис группы Г), когда определитель $|a_k^i|$ не делится на p.

9. Совокупность m элементов группы G может служить базисом этой группы лишь тогда, когда эти элементы распределены по m различным классам, отличным от $M_{00\ldots0}$.

10. Совокупность элементов группы G, принадлежащих к классам, входящим в некоторую подгруппу группы Г, является подгруппой группы G.

11. Классы $M_{a_1 \ldots a_m}$ не зависят от выбора базиса $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

12. Для любой подгруппы g порядка n группы G существует такое целое положительное i $(0 \leqslant i \leqslant m)$, что n делится на p^i, а g состоит из элементов p^i различных классов M, причем в каждый из этих классов входит одно и то же число элементов подгруппы g. Если $i=0$, то g является подгруппой группы $M_{00\ldots0}$.

13. Группа G обладает подгруппой G_1, порядка N_1, делящегося на p^m, содержащей по N_1/p^m элементов из каждого класса M. Базис подгруппы G_1 состоит из m элементов, число различных ее базисов равно $(N_1/p^m)^m \times \prod_{i=0}^{m-1}(p^m-p^i)\frac{1}{m!}$. Совокупность m элементов подгруппы G_1 тогда и только тогда является ее базисом, когда эти элементы принадлежат независимым классам $M_{a_1 \ldots a_m}$.

14. Любая абелева группа обладает свойством $P \pmod p$ по отношению к своему минимальному базису.

15. Для всякого простого p и всякого целого $m \geqslant 2$ существует неабелева группа с базисом из m элементов, обладающая свойством $P \pmod p$. — В. К. Туркин

7132. Строение групп конечного порядка, обладающих свойством $P \pmod p$. Пиккар (Structure des groupes d'ordre fini jouissant de la propriété $P \pmod p$). Piccard Sophie), Bull. sci. math., 1954, 78, novembre — décembre, 240—262 (франц.)

Приведены доказательства теорем, формулировки которых были даны в предварительном сообщении с тем же заглавием (реф. 7131). В. К. Туркин

7133. Число неприводимых представлений конечной группы над произвольным полем. Берман С. Д., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 5, 767—769

Пусть G — конечная группа, K — поле характеристики p, делящей порядок h группы G, n — общее наименьшее кратное порядков p-регулярных элементов (т. е. элементов порядка взаимно простого с p) группы G и ε — первообразный корень n-й степени из 1. Автор называет p-регулярный элемент b K-сопряженным с p-регулярным элементом a, если $b = c^{-1}a^{\mu}c$, где $c \in G$ и μ — такое целое число, что отображение $\varepsilon \to \varepsilon^{\mu}$ определяет автоморфизм поля $K(\varepsilon)$. Классы K-сопряженных между собой p-регулярных элементов автор называет K-отделами. Доказано, что их число равно числу неприводимых представлений группы G над полем K. В. К. Туркин

7134. Блоки характеров симметрической группы. Осима (On blocks of characters of the symmetric group. Osima Masaru), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 131—134 (англ.)

Как доказали Р. Брауэр и Робинсон, неприводимые представления симметрической группы тогда и только тогда принадлежат одному p-блоку, когда диаграммы Юнга, соответствующие этим представлениям, имеют одно и то же p-ядро (определения см. РЖМат, 1956, 1061). Автор дает новое доказательство этого утверждения. С. Д. Берман

7135. Дзета-функции в алгебре. Редеи (Zetafunktionen in der Algebra. Rédei L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 1—2, 5—25 (нем.; рез. русс.)

Пусть G — произвольная конечная абелева группа, n — целое положительное число, $N=\{1, \ldots, n\}$ и $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные (не обязательно различные) подгруппы группы G. Для любого подмножества $M \subseteq N$ обозначим через A_M подгруппу группы G, порожденную подгруппами A_i, $i \in M$, а через (A_M) — ее порядок (если M пусто, то $(A_M)=1$).

Автор изучает функцию

$$\rho(z) = \rho(z; A_1, \ldots, A_n) = \sum_{M \subseteq N} (-1)^{(M)} (A_M)^{-z},$$

где z — комплексное число с положительной вещественной частью, а (M) — число элементов множества M. Для любой конечной абелевой p-группы P положим

$$\Psi(P) = (1-p^{-z})(1-p^{1-z})\ldots(1-p^{t-1-z}),$$

где t — число инвариантов группы P. Для любой конечной абелевой группы G положим

$$\Psi(G) = \Psi(P_1)\ldots\Psi(P_k),$$

где $P_1, \ldots, P_k$ — все силовские подгруппы группы G. Основным результатом работы является доказательство соотношения

$$\rho(z; A_1, \ldots, A_n) = \sum_H (H)^{-z} \Psi(G/H),$$

где H пробегает все подгруппы группы G, не содержащие ни одну из подгрупп $A_1, \ldots, A_n$. Из этого соотношения, в частности, следует, что $0 \leq \rho(z; A_1, \ldots, A_n) < 1$ для $z=1, 2, \ldots$ Это неравенство нетривиально даже для $n=3$. Для неабелевых групп, а также для нецелых (но вещественных) z, больших единицы, это неравенство, вообще говоря, неверно. Равенство в нем достигается весьма часто и далеко не только в тривиальных случаях. Отметим также следующее свойство монотонности

$$\rho(z; A_1, \ldots, A_n) \leq \rho(z; A_1, \ldots, A_{n-1}) \quad (z=1, 2, \ldots).$$

В согласии с автором, референт считает, что введение в алгебру ζ-функций может служить источником новых

и интересных исследований, являющихся многообещающими, особенно в теории периодических и, в частности, конечных абелевых групп. A. Kertész

7136. Групповые алгебры абелевых расширений конечных групп. Берман С. Д., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 3, 431—434

Пусть G — конечная группа, являющаяся абелевым расширением группы H, K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок группы G, $R(G,K)$ и $R(H,K)$ — групповые алгебры над полем K групп G и H соответственно, $M=\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ — полная система минимальных идемпотентов центра алгебры $R(H,K)$, φ_g ($g\in G$) — автоморфизм алгебры $R(H,K)$, определяемый формулой $\varphi_g(a)=g^{-1}ag$ ($a\in R(H,K)$), $M=M_1\cup\ldots\cup M_m$ — разложение множества M на области транзитивности относительно группы всех автоморфизмов φ_g, $M_i=\{e_{1i}, e_{2i}, \ldots, e_{g_i i}\}$, $e_{ti}=\sum_{j=1}^{r_i}\tilde{e}_{ti}^{(j)}$, где $\tilde{e}_{ti}^{(i)}$ ($i=1,2,\ldots,m$; $t=1,2,\ldots,q_i$; $j=1,2,\ldots,r_i$) — полная система попарно ортогональных минимальных идемпотентов алгебры $R(H,K)$ и $\bar{e}_i=\sum_{\lambda=1}^{q_i}e_{\lambda i}$. Элементы $\bar{e}_i$ принадлежат центру Z алгебры $R(G,K)$ и имеют место прямые разложения $R(G,K)=\sum_{i=1}^{m}\bar{I}_i$; $Z=\sum_{i=1}^{m}Z_i$, где $\bar{I}_i$ — двусторонний идеал, порожденный идемпотентом $\bar{e}_i$, и Z_i — центр идеала $\bar{I}_i$.

Пусть b_iH ($i=0,1,\ldots,q-1$; $b_0=1$) — все смежные классы разложения группы G по подгруппе H и пусть $C_{i1}, C_{i2}, \ldots, C_{is_i}$ — принадлежащие смежному классу b_iH классы сопряженных элементов группы G. Сумму элементов класса C_{ij} в алгебре $R(G,K)$ обозначим через k_{ij}. Пусть

$$\delta_{ip}=\begin{cases}0, & \text{если } k_{ij}\bar{e}_p=0\ (j=1,2,\ldots,s_i),\\ 1, & \text{если найдется индекс } j\ (1\leqslant j\leqslant s_i),\end{cases}$$

для которого $k_{ij}\bar{e}_p\neq 0$. Оказывается, что при фиксированном p ($1\leqslant p\leqslant m$) смежные классы b_iH, для которых $\delta_{ip}=1$, образуют подгруппу F_p факторгруппы G/H, порядок которой равен степени алгебры Z_p над полем K.

Пусть $F_p=(B_{p1})\times\ldots\times(B_{pt_p})$ — разложение абелевой группы F_p в прямое произведение циклических подгрупп порядков $\alpha_{p_1},\ldots,\alpha_{pt_p}$. Подберем для каждого из смежных классов (B_{pr}) индекс $k_{i_r j_r}$, для которого $k_{i_r j_r}\bar{e}_p\neq 0$. Тогда $(k_{i_r j_r}\bar{e}_p)^{\alpha_{pr}}=\gamma_r\bar{e}_p$, где $\gamma_r\neq 0$. Пусть $a_{pr}=k_{i_r j_r}\bar{e}_p\Big/\sqrt[\alpha_{pr}]{\gamma_r}$. Обозначая через ε_{pr} первообразный корень степени α_{pr} из единицы, положим

$$(\varepsilon_{pr}, a_{pr})=\bar{e}_p+\varepsilon_{pr}a_{pr}+\ldots+(\varepsilon_{pr}a_{pr})^{\alpha_{pr}-1}.$$

Утверждается, что идемпотенты

$$e_{i_1,\ldots,i_{t_p}}^{(p)}=\frac{1}{\alpha_{p1}\cdots\alpha_{pt_p}}(\varepsilon_{p1}^{i_1}, a_{p1})\ldots(\varepsilon_{pt_p}^{i_{t_p}}, a_{pt_p})$$

$$(0\leqslant i_r\leqslant\alpha_{pr}-1;\ r=1,\ldots,t_p;\ p=1,\ldots,m)$$

образуют полную систему минимальных идемпотентов центра алгебры $R(G,K)$.

Если G/H — циклическая группа, то группа F_p — также циклическая и $F_p=(B_p)$. Следовательно, в этом случае идемпотенты

$$e_{i,t,j}^{(p)}=\frac{1}{\alpha_p}(\tilde{e}_{tp}^{(j)}+\varepsilon_p^i a_p\tilde{e}_{tp}^{(j)}+\ldots+\varepsilon_p^{i(\alpha_p-1)}a_p^{\alpha_p-1}\tilde{e}_{tp}^{(j)})$$

$$(p=1,2,\ldots,m;\ t=1,2,\ldots,q_p;\ j=1,2,\ldots,r_p;$$

$$i=0,1,2,\ldots,\alpha_p-1)$$

образуют полную систему минимальных ортогональных идемпотентов алгебры $R(G,K)$. Далее в этом случае число классов сопряженных элементов группы G равно $n\left(\frac{1}{h_1}+\ldots+\frac{1}{h_s}\right)$, где n — порядок циклической группы G/H, s — число классов $C_1,\ldots,C_s$ сопряженных элементов группы G, содержащихся в H, и h_i — число классов сопряженных элементов группы H, на которые распадается класс C_i ($i=1,\ldots,s$). В. К. Турки

7137. Полные покрытия конечных групп. Холл Пейдж (Complete mappings of finite groups Hall Marshall, Paige L. J.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 4, 541—549 (англ.)

Полным покрытием группы G называется взаимно однозначное отображение $x\to\theta(x)$ группы G на себя, для которого отображение $x\to x\,\theta(x)$ также является взаимно однозначным отображением группы G на себя. Исследуется вопрос, какие типы конечных групп имеют полные покрытия (любая бесконечная группа имеет полные покрытия). Доказывается, что полными покрытиями обладают 1) симметрические группы S_n при $n>3$; 2) знакопеременные группы A_n при любом n; 3) нециклические группы порядка 2^n, 4) разрешимые группы с нециклической силовской 2-подгруппой; 5) группы с нециклическими силовскими 2-подгруппами, если число этих подгрупп равно их индексу и пересечение любых двух из этих подгрупп совпадает с единичным элементом. Доказано также, что конечная группа с циклическими силовскими 2-подгруппами не может иметь полных покрытий. В. К. Турки

7138. Нормальные делители и максимальные подгруппы конечных групп. Хупперт (Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen. Hupert Bertram), Math. Z., 1954, 60, № 4, 409—434 (нем.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа, p — простое число, $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \ldots$ — порядки факторов главного ряда группы $\mathfrak{G}$, являющихся p-группами. Число $r_p(\mathfrak{G})=\max\alpha$ называется главным p-рангом группы $\mathfrak{G}$, а число $r(G)=\max_{p\mid(\mathfrak{G})}r_p(\mathfrak{G})$, где $(\mathfrak{G})$ — порядок группы $\mathfrak{G}$, называется главным рангом группы $\mathfrak{G}$. Группа с главным рангом 1 называется надразрешимой. Максимальной цепью группы $\mathfrak{G}$ называется ряд $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_0\supset\ldots\supset\mathfrak{G}_i\supset\mathfrak{G}_{i+1}\supset\ldots\supset\mathfrak{G}_m=1$, для которого $\mathfrak{G}_{i+1}$ — максимальная подгруппа в $\mathfrak{G}_i$. Индексы группы $\mathfrak{G}_{i+1}$ в $\mathfrak{G}_i$ называются индексами данной максимальной цепи. Доказаны следующие предложения:

1. Группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда надразрешима, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами. В этом случае коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ нильпотентен.

2. Если коммутант $\mathfrak{G}'$ группы $\mathfrak{G}$ нильпотентен, то силовская p-подгруппа подгруппы Фраттини группы $\mathfrak{G}$ является пересечением подгрупп Фраттини силовских p-подгрупп группы $\mathfrak{G}$.

3. Группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда надразрешима, когда индексы всех максимальных цепей являются простыми числами. Если индексы всех максимальных цепей являются либо простыми числами, либо квадратами простых чисел, то $r(\mathfrak{G})\leqslant 2$.

4. Если индексы всех максимальных подгрупп разре

шиной группы $\mathfrak{G}$ имеют вид $p_i^{\alpha_i}$ и $\alpha_i \leqslant \beta$, где $\beta = 2, 3$, то 2β-й коммутант $\mathfrak{G}^{(2\beta)}$ группы $\mathfrak{G}$ нильпотентен. Если, кроме того, $(\mathfrak{G}) \equiv 1 \pmod 2$, то при $\beta = 2$ нильпотентен коммутант $\mathfrak{G}^{(2)}$, а при $\beta = 3$ — коммутант $\mathfrak{G}^{(4)}$. Если все силовские подгруппы группы $\mathfrak{G}$ абелевы, то $r(\mathfrak{G}) \leqslant \beta$.

5. Пусть $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами и пусть k — максимальное число образующих ее силовских подгрупп. Тогда если $k \leqslant 2$, то $\mathfrak{G}^{(3)} = 1$, а если $3 \leqslant k \leqslant 5$, то $\mathfrak{G}^{(4)} = 1$. Кроме того, главный ранг $r(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$ не превосходит максимального числа образующих ее минимальных нормальных делителей.

6. Если любая истинная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ надразрешима, то группа $\mathfrak{G}$ разрешима. В. С. Чарин

7139. О мультипликаторе группы. Кохендёрфер (Über den Multiplikator einer Gruppe. Kochendörffer Rudolf), Math. Z., 1956, **63**, № 5, 507—513 (нем.)

Исследуется строение мультипликатора конечной группы $\mathfrak{H}$ (о мультипликаторе см. Schur I., J. reine und angew. Math., 1904, **127**, 20—50; 1907; **132**, 85—137). Пусть $\mathfrak{S}$ — силовская p-подгруппа группы $\mathfrak{H}$ и пусть $\mathfrak{H} = \sum_{V \in \mathfrak{B}} \mathfrak{S}V$, где $\mathfrak{B}$ — совокупность правосторонних вычетов разложения $\mathfrak{H} \bmod \mathfrak{S}$. Доказано, что если $P^{-1}\mathfrak{B}P = \mathfrak{B}$ для любого $P \in \mathfrak{S}$, то силовская p-подгруппа мультипликатора группы $\mathfrak{H}$ изоморфна мультипликатору группы $\mathfrak{S}$. В. К. Туркин

7140. Заметка о групповых матрицах. Таусски (A note on group matrices. Taussky Olga), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 6, 984—986 (англ.)

Доказано, что групповая матрица конечной группы G тогда и только тогда перестановочна с транспонированной (с комплексно-сопряженной к транспонированной) матрицей, когда G является либо абелевой, либо гамильтоновой 2-группой (соответственно, когда G является абелевой группой). В. К. Туркин

7141. Система образующих абстрактных групп, соответствующих 32 кристаллографическим классам. Роман (Sistemul de generatori al grupurilor abstracte, corespunzătoare celor 32 clase cristalografice. Roman Tiberiu), Rev. Univ. «C. I. Pahron» şi Politehn. Bucureşti. Ser. ştiinţ. natur., 1955, № 6—7, 9—21 (рум.; рез. русс., франц.)

Дается абстрактное описание кристаллографических групп с помощью образующих и определяющих соотношений.

7142. Результаты венгерских алгебраистов в теории бесконечных групп. Фукс (Magyar kutatók eredményei a végtelen csoportok elméletében. Fuchs László), Magyar tud. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1955, **5**, № 3, 327—341 (венг.)

Доклад, произнесенный на торжественной сессии Венгерской Академии наук в 1955 г., дает краткий обзор результатов, полученных венгерскими математиками в разных областях теории бесконечных групп. В докладе особое внимание уделяется научному творчеству недавно скончавшегося Тибора Селе, и указывается на связь между этими исследованиями и работами иностранных, в особенности советских математиков. A. Kertész

7143. Групповые свойства механизмов и применение матричного счисления к вычислению механизмов. Калицин (Gruppentheoretische Eigenschaften der Getriebe und Anwendung der Matrizenrechnung zur Berechnung von Getrieben. Kalitzin G. St.), Acta techn. Acad. sci. hung., 1955, **11**, № 3-4, 449—460 (нем.; рез. русс., англ., франц.)

Попытка применить понятия и результаты теории групп для изучения механизмов. Отсутствие строгих определений и четко сформулированных проблем не позволяет судить об идеях автора. Л. А. Калужнин

7144. Группы с соотношениями $(abc)^2 = e$. Шик (Gruppen mit Relationen $(abc)^2 = e$. Schiek Helmut), Math. Nachr., 1955, **13**, № 3—4, 247—256 (нем.)

Рассматриваются группы $\mathfrak{G}$, порождаемые множеством элементов $\mathfrak{S} = \{a, b, c, \ldots\}$ с определяющими соотношениями $(xyz)^2 = e$ для любых x, y, z из $\mathfrak{S}$. К числу таких групп принадлежат группы, порождаемые произвольным числом отражений. Выведено большое число различных формул, являющихся следствиями определяющих соотношений.

Подгруппа $\mathfrak{Q}$ группы $\mathfrak{G}$, состоящая из квадратов всех элементов $\mathfrak{G}$, является нормальным делителем. Определяющие соотношения для $\mathfrak{Q}$ имеют вид $X^3 = e$, $(XY)^3 = e$, $(XYXZ)^3 = e$ для любых X, Y, Z из множества $\mathfrak{T} = \{a^2, b^2, c^2, \ldots\}$. Нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$ является также подгруппа $\mathfrak{D}$, порождаемая всеми элементами множества $\mathfrak{T}$ и всеми элементами вида $\xi = ax$, где a — фиксированный элемент и $x \in \mathfrak{S}$.

Элементы группы $\mathfrak{G}$ могут быть сопоставлены с классами вычетов по модулю 6; те элементы $\mathfrak{G}$, которым соответствует класс 0, составляют нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$, названный автором нулевой группой. Нулевая группа содержит в себе коммутант; выяснен тип тех элементов нулевой группы, которые входят в коммутант. В. К. Туркин

7145. Группы с соотношениями $X^3 = 1$, $(XY)^3 = 1$. Шик (Gruppen mit Relationen $X^3 = 1$, $(XY)^3 = 1$. Schiek Helmut), Arch. Math., 1955, **6**, № 4, 341—347 (нем.)

Рассматривается группа $\mathfrak{G}$ с системой образующих $\mathfrak{S} = \{A, B, \ldots\}$, удовлетворяющих определяющим соотношениям $X^3 = 1$, $(XY)^3 = 1$, $(X, Y \in \mathfrak{S})$. Группа $\mathfrak{G}$ является циклическим расширением нормального делителя $\mathfrak{N}$, состоящего из всех элементов $\prod_{i=1}^{n} \chi_i^{\alpha_i}$ $(\chi_i \in \gamma)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \equiv 0 \pmod 3$.

Пусть A — фиксированная образующая. Для любого $X \in \mathfrak{S}$ положим $X_l = X^2A$, $X_r = AX^2$. Оказывается, что нормальный делитель $\mathfrak{N}$ порождается всеми элементами вида X_l и X_r. Соответствующие определяющие соотношения имеют вид $(X_l^{-1}, X_r) = 1$, $(X_l^{-1}, Y_r)(Y_l^{-1}, X_r) = 1$ (через (a, b) обозначается коммутатор элементов a и b). Пусть множество всех элементов вида X_r произвольно упорядочено. Определим во множестве $\mathfrak{B}$ всех элементов вида X_r и X_l упорядоченность, положив $X_l < X_r < Y_l < Y_r$, если $X_r < Y_r$. Далее определим упорядоченность во множестве $\mathfrak{B}^{\pm 1} = \mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}^{-1}$, положив $a^{\delta_1} < b^{\delta_1}$ (в тексте ошибочно $a^{\delta_1} < a^{\delta_2}$), где $\delta_1 = \pm 1$, $\delta_2 = \pm 1$, если $a < b$. Пара элементов $\{a, b\}$ $(a, b \in \mathfrak{B}^{\pm 1})$ называется нерегулярной, если $a < b$ и в то же время a имеет вид X_r или X_r^{-1}, а b — вид X_l или X_l^{-1}. Коммутатор $(a_1 \ldots a_i, a_{i+1} \ldots a_n)$ называется регулярным, если все пары $\{a_\kappa, a_\lambda\}$ $(1 \leqslant k \leqslant i, i+1 \leqslant l \leqslant n)$ регулярны. Доказывается, что регулярные коммутаторы порождают коммутант $\mathfrak{R}$ нормального делителя $\mathfrak{N}$. С другой стороны, коммутант $\mathfrak{R}$ порождается элементами вида $W(a, b)W^{-1}$, где $\{a, b\}$ — регулярная пара, а $W = a_1, \ldots, a_n$, и $a_1 \leq \ldots \leq a_n$. В. К. Туркин

7146. О расширениях аддитивной группы целых рациональных чисел при помощи той же группы. Лонстра (Sur les extensions du groupe additif des entiers rationnels par le même groupe. Loonstra F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3,

263—272; Indagationes math., 1954, 16, № 3, 263—272 (франц.)

Подробно рассматриваются системы факторов расширений бесконечной циклической группы при помощи такой же группы. А. П. Мишина

7147. О прямом произведении регулярных p-групп. Грюн (Über das direkte Produkt regulärer p-Gruppen. Grün Otto), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 241—243 (нем.)

Пусть $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ — регулярные p-группы (Hall P., Proc. London Math. Soc., II ser., 1934, 36, 29—95) и $\mathfrak{G}$ — их прямое произведение. Оказывается, что любой коммутатор из $\mathfrak{G}$ является произведением коммутатора из $\mathfrak{G}_1$ и коммутатора из $\mathfrak{G}_2$. Отсюда выводится, что если все элементы коммутанта группы $\mathfrak{G}_2$ имеют порядок p или если группа $\mathfrak{G}_2$ абелева, то группа $\mathfrak{G}$ также является регулярной p-группой. В общем случае регулярной p-группой будет фактор-группа группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе, образованной p-ми степенями всех элементов второго члена центрального ряда группы $\mathfrak{G}_i$, $i = 1, 2$.

В. К. Туркин

7148. О группах, все подгруппы которых специальные. Казачков Б. В., Уч. зап. Томского гос. пед. ин-та, 1954, № 11, 217—222

Называя группой типа S неспециальную группу, все истинные подгруппы которой специальны (т. е. являются ZA — группами с условием минимальности для подгрупп), автор формулирует следующие предложения.

1. Бесконечная группа типа S, обладающая по крайней мере одним конечным неединичным классом сопряженных элементов или подгрупп, представима в виде произведения своей силовской конечной циклической p-подгруппы на силовскую бесконечную инвариантную q-подгруппу, где p и q—различные простые числа.

2. Бесконечная группа типа S, удовлетворяющая условию обрыва возрастающих нормальных цепей, есть группа с конечным числом образующих.

3. Бесконечная группа типа S, удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей подгрупп, есть группа с двумя образующими.

4. Группа типа S, обладающая по крайней мере одним конечным неединичным классом сопряженных элементов или подгрупп и удовлетворяющая условию обрыва возрастающих нормальных цепей, конечна.

Первое из этих предложений бессодержательно. В самом деле, из него вытекает, что рассматриваемая группа локально конечна и, значит, ввиду ее бесконечности локально специальна. Но тогда она должна быть прямым произведением двух своих силовских подгрупп. Отсюда, ввиду специальности множителей этого произведения, вытекает и специальность самого произведения. Таким образом получается, что рассматривается группа, являющаяся по самому своему определению неспециальной, специальна. Из сказанного следует, что предложение 4 справедливо и без предположения об обрыве возрастающих нормальных цепей.

Предложения 2 и 3 имеют смысл лишь при условии существования бесконечных групп типа S. В первом из них, как вытекает из определения группы типа S и свойств локально специальных групп, условие обрыва возрастающих нормальных цепей излишне. Поэтому существование бесконечных групп типа S означало бы отрицательное решение проблемы Бернсайда о периодических группах с конечным числом образующих.

С. Н. Черников

7149. К изучению групп с помощью понятия квазицентра. Маурер (Contribuţii la studiul grupărilor pe baza cvasicentrului. Maurer I.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 7, 1029—1034 (рум.; рез. русс., франц.)

Следуя О. Оре (Ore O., Duke Math. J., 1937, 3, 163), автор называет квазицентром группы ее подгруппу, порожденную всеми циклическими подгруппами, перестановочными со всеми ее подгруппами. Если квазицентр некоммутативной группы является максимальной абелевой подгруппой, то группа называется группой с максимальным абелевым квазицентром. Доказано, что центр группы с максимальным абелевым квазицентром является истинной подгруппой ее квазицентра. Если квазицентр группы с максимальным абелевым квазицентром конечен, то группа периодична. Прямое произведение абелевых групп и групп с максимальным абелевым квазицентром является группой с максимальным абелевым квазицентром.

С. Н. Черников

7150. О разложении групп. Сеп, Ито (Über die Faktorisation von Gruppen. Szép J., Itô N.), Acta scient. math., 1955, 16, № 3—4, 229—231 (нем.)

Доказано, что произведение (в произвольном порядке) всех подгрупп, сопряженных с некоторой подгруппой H, произвольной группы G является подгруппой (и совпадает с наименьшим нормальным делителем $\overline{H}$, содержащим подгруппу H). Для любой конечной группы G существует такая нильпотентная подгруппа H, что $\overline{H} = G$.

Л. А. Калужнин

7151. Расширения групп и их расщепления. Такахаси (Group extensions and their splitting groups. Takahasi Mutuo), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1954, A5, № 2, 81—85 (англ.)

Пусть N и Γ — произвольные группы. Доказано, что существует такое «универсальное» расширение U группы N с помощью группы Γ, что:

1. Для любого расширения G группы N с помощью группы Γ в U содержится подгруппа, изоморфная G.

2. В U содержатся такие две подгруппы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}^*$, что 1) $\mathfrak{B}$ изоморфна Γ; 2) $\mathfrak{H}^*$ инвариантна в U и является полным прямым произведением подгрупп $\mathfrak{H}_\tau$, $\tau \in \Gamma$, изоморфных голоморфу группы N; 3) $U = \mathfrak{B}\mathfrak{H}^*$, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H}^* = 1$. Это расширение строится как подгруппа группы преобразований множества пар вида (σ, n), где $\sigma \in \Gamma$ и $n \in N$.

Пусть G — некоторое расширение групп N с помощью группы Γ. Группа $\overline{G}$, содержащая группу G, называется расщеплением расширения G, если в $\overline{G}$ существует такая подгруппа $\overline{N}$, что $\overline{N} \supseteq N$, $\overline{G} = G\overline{N}$ и $\overline{G}$ расщепляемо над $\overline{N}$ (т. е. $\overline{G} = V\overline{N}$ и $V \cap N = 1$, для некоторой подгруппы V). Подгруппа $\overline{N}$ называется расщепляющим ядром. Доказано, что в универсальном расширении U группы N с помощью группы Γ существует такая инвариантная подгруппа $\mathfrak{R}^*$, что 1) любое расширение G группы N с помощью группы Γ можно так вложить в группу U, чтобы группа $G^* = G\mathfrak{R}^*$ была расщеплением расширения G; 2) подгруппа $\mathfrak{R}^*$ является полным прямым произведением групп $\mathfrak{R}_\tau$, $\tau \in \Gamma$, изоморфных группе N. Отсюда следует, что для конечного расширения существует конечное расщепление; для расширения абелевой группы (группы без кручения) существует расщепление с абелевым (соответственно не имеющим кручения) расщепляющим ядром.

Б. И. Плоткин

7152. Об одном специальном косом произведении Редеи в теории групп. Рюс (Über ein speziellen Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie. Rühs F.), Acta scient. math., 1955, 16, № 3—4, 160—164 (нем.)

Рассматривается один тип косых произведений в смысле Редеи, сводящихся к прямым. Л. М. Глускин

7153. Теория пропорциональности как абстракция теории групп. Бюхи, Райт (The theory of proportionality as an abstraction of group theory.

Büchi J. Richard, Wright Jesse B.), Math. Ann., 1955, **130**, № 2, 102—108 (англ.)

Подгруппу группы всех взаимно однозначных отображений некоторой группы $\bar{A}$ на себя, порожденную всеми автоморфизмами и сдвигами (т. е. отображениями вида $x \to xa$ и $x \to ax$, где $a \in \bar{A}$), автор называет голоморфом группы $\bar{A}$. Доказано, что взаимно однозначное отображение группы $\bar{A}$ на себя тогда и только тогда принадлежит голоморфу, когда оно сохраняет кватернарное отношение пропорциональности π (это отношение определяется формулой $\pi(x, y, u, v) \equiv (xy^{-1} = uv^{-1})$). Далее доказано, что кватернарное отношение ρ, заданное на произвольном множестве A, тогда и только тогда является отношением пропорциональности для некоторой группы на множестве A, когда 1) $\rho(x, y, x, y)$, 2) $\rho(x, y, u, v) \to \rho(u, v, x, y)$, 3) $\rho(x, y, u, v) \wedge \rho(u, v, p, q) \to \rho(x, y, p, q)$, 4) $\rho(x, x, y, y)$, 5) $\rho(x, y, u, v) \to \rho(y, x, v, u)$, 6) $\rho(x, y, u, v) \wedge \rho(y, z, v, w) \to \rho(x, z, u, w)$, 7) $\rho(x, y, y, x) \to x = y$, 8) $(Eu)\,\rho(x, y, u, v)$. В заключение авторы высказывают ряд тезисов, содержащих общие соображения о родстве некоторых математических теорий, о процессе обобщения и абстрагирования, о математике и о применении конкретных теорий к установлению математических истин.

Ю. И. Соркин

7154. Группы Витта и гиперэкспоненциальные группы. Дьёдонне (Witt groups and hyperexponential groups. Dieudonné Jean), Mathematika, 1955, **2**, № 1, 21—31 (англ.)

Рассматривается бесконечная система уравнений

$$z_0^{p^i} + pz_1^{p^{i-1}} + \ldots + p^i z_i = (x_0^{p^i} + px_1^{p^{i-1}} + \ldots + p^i x_i) + (y_0^{p^i} + py_1^{p^{i-1}} + \ldots + p^i y_i) \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

относительно неизвестных $z_0, z_1, \ldots$, где p — любое фиксированное простое число. Каждое неизвестное x_i, y_i с индексом i снабдим весом p^i $(i = 0, 1, \ldots)$. Как показал Витт (Witt E., J. reine und angew. Math., 1937, **176**, 126—140), эта система имеет решение вида $z_i = L_i(x_0, y_0, \ldots, x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$, где L_i — изобарические полиномы веса p^i с целыми коэффициентами. Приводя эти коэффициенты по модулю p, мы получим групповой закон некоторой бесконечномерной формальной абелевой группы Ли над простым полем характеристики p, — так называемой группы Витта W. В реферируемой работе дается новое определение группы Витта, которое позволяет задать достаточно эффективным образом изоморфизм между этой группой и гиперэкспоненциальной группой H, введенной в другой работе автора (РЖМат, 1956, 4365). Гипералгебры групп H и W (РЖМат, 1955, 4283) оказываются тождественными друг другу, хотя сами эти группы не совпадают.

В. М. Глушков

7155. Целые, выпуклые, сжатые и поглощающие множества в группах с радикалами. Гика (Multimi intregi, convexe, strinse şi absorbante in grupurile cu radicali. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1955, 5, № 9, 1229—1233 (рум.; рез. русс., франц.)

Группа $\mathfrak{G}$ называется группой с радикалами, если для любого элемента $a \in \mathfrak{G}$ и любого целого n уравнение $x^n = a$ имеет хотя бы один корень в $\mathfrak{G}$. В таких группах вводятся понятия целого, выпуклого, сжатого и поглощающего множеств и рассматриваются связи между такими множествами. Доказательств нет.

Б. И. Плоткин

7156. Топологические паравыпуклые группы. Гика (Grupuri topologice paraconvexe. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1955, **5**, № 9, 1235—1240 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются топологические группы с радикалами (см. реф. 7155), в которых операция извлечения корня непрерывна. Групповой полунормой на группе $\mathfrak{G}$ называется отображение p группы $\mathfrak{G}$ в поле действительных чисел, удовлетворяющее условиям: 1) $p(xy) \leqslant p(x) + p(y)$; 2) $p(x^n) = |n|\, p(x)$ для любых элементов $x, y \in \mathfrak{G}$ и любого целого n. Вводится понятие радикального семейства групповых полунорм и изучается топология, возникающая при наличии в группе такого семейства.

Б. И. Плоткин

7157. О нильпотентности некоторых алгебраических групп. Лазар (Sur les nilpotences de certains groupes algébriques. Lazard Michel), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 24, 1687—1689 (франц.)

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, B — алгебра над кольцом A и $f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — некоторые многочлены от $2n$ неизвестных с коэффициентами в кольце A. Обозначим через B^n множество строк вида $(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_1, \ldots, u_n \in B$, и введем на этом множестве бинарную операцию по правилу: $(u_1, \ldots, u_n) \circ (v_1, \ldots, v_n) = (f_1(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n), \ldots, f_n(u_1, \ldots, u_n; v_1, \ldots, v_n))$. Доказано, что если для любой коммутативной, ассоциативной алгебры B с единицей над кольцом A множество B^n является группой относительно операции $\circ$, то эта группа обязательно нильпотентна. Если, к тому же, кольцо A не имеет отличных от нуля нильпотентных элементов, то класс нильпотентности этой группы не превосходит n $(n = 1, 2, \ldots)$.

В. М. Глушков

7158. К теории спинорных групп. Бауэр (Zur Theorie der Spingruppen. Bauer Friedrich L.), Math. Ann., 1954, **128**, № 3, 228—256 (нем.)

Пусть n, N — произвольные целые положительные числа. Представлению ${}^nO(m) = {}^nO(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$ ортогональной группы $O(n)$ со старшим весом $(m_1, m_2, \ldots, m_\nu)$, $\nu = [n/2]$, можно сопоставить представление $\overline{{}^nO(m)}\,\big|^N$ группы $O(N)$, для которого число $(n - 2k)/2$ входит в старший вес α_k раз $(k = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$, где

$$\alpha_0 = \frac{N}{2} - m_1;\quad \alpha_i = m_i - m_{i+1}\ (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1);$$

$$\alpha_\nu = \begin{cases} m_\nu & \text{при четном } N \\ m_{\nu - \frac{1}{2}} & \text{при нечетном } N \end{cases}$$

(в тексте у автора допущена явная опечатка). Это представление имеет смысл, если $\left(\frac{N}{2} - m_1\right)$ — неотрицательное целое число. Оно называется N-дополнительным по отношению к представлению ${}^nO(m)$. Легко видеть, что так определенное соответствие между представлениями взаимно. Основной результат:

Кратность, с которой представление ${}^nO(m)$ входит в разложение N-кратной кронекеровской степени ${}^nO(\Delta)_x^N$ спинорного представления ${}^nO(\Delta)$ ортогональной группы $O(n)$ на неприводимые представления, равна при $n = 2\nu$ — степени, а при $n = 2\nu + 1$ — редуцированной степени (отношению его степени к 2^ν) N-дополнительного представления $\overline{{}^nO(m)}\,\big|^N$.

Кроме того, исследуются обертывающая и коммутаторная алгебры представления ${}^nO(\Delta)_x^N$. Известна тесная связь коммутаторной алгебры с инвариантами исходной группы. Автор описывает структуру этих инвариантов, отправляясь от алгебры чисел Клиффорда. Получены

явные формулы и приведены таблицы для рангов коммутаторной и обертывающей алгебр. Так, ранг коммутаторной алгебры представления ${}^{n}O(\Delta)_x^N$ определяется формулами:

$$R_\theta(N, n) = \begin{cases} \dfrac{\nu!}{(N+\nu-1)!}\dfrac{S(N)}{S(1)} & \text{для } n = 2\nu, \\ \dfrac{(2\nu)!}{(N+2\nu-1)!}\dfrac{S(N)}{S(1)} & \text{для } n = 2\nu+1, \end{cases}$$

где $S(\alpha) = \dfrac{(2\alpha+2\nu-2)!\,(2\alpha+2\nu-4)!\ldots(2\alpha+2)!\,(2\alpha)!}{(\alpha+2\nu-2)!\,(\alpha+2\nu-3)!\ldots(\alpha+1)!\,\alpha!}$

Далее, произвольному полуцелому представлению ${}^{n}O\left(m_i+\frac{1}{2}\right)$ сопоставляется (при n нечетном) некоторое представление симплектической группы ${}^{n-1}Sp(m_i)$ порядка $(n-1)$, размерность которого равна редуцированной степени данного представления. Эта конструкция обобщается на случай четного n. В связи с этим соотношения между дополнительными представлениями формулируются в терминах взаимности коммутаторных алгебр некоторых ортогональных и симплектических представлений. И. З. Розенкноп

7159. Ранг алгебры матриц в методе слияния Луи де-Бройля. Бауэр (Le rang de l'algèbre de matrices se trouvant dans la méthode de fusion de M. Louis de Broglie. Bauer Friedrich L.), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 14, 1477—1478 (франц.)

Пусть $\mathfrak{N}$ — ранг алгебры, порожденной матрицами

$$\beta_\mu = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{1\times 1\times\ldots\times 1\times\alpha_\mu\times 1\times\ldots\times 1}_{N},$$

где α_μ — матрица Дирака ($\mu = 1, 2, 3, 4$), 1 — единичная матрица и $\times$ — знак прямого произведения. Утверждается (без доказательства), со ссылкой на статью автора (реф. 7158), что

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{10}\binom{N+7}{7}\binom{N+5}{3}$$

(см. также РЖФиз, 1955, 112). И. З. Розенкноп

7160. Идемпотентные группы. Мак-Лейн (Idempotent semigroups. McLean David), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 110—113 (англ.)

Полугруппа называется идемпотентной, если все ее элементы идемпотентны. Полугруппа называется антикоммутативной, если любые два ее несовпадающих элемента не перестановочны. Доказано (теорема 1), что для всякой идемпотентной полугруппы I существует такое ее гомоморфное отображение φ на некоторую коммутативную полугруппу S, что прообраз каждого элемента из S является антикоммутативной полугруппой. Это гомоморфное отображение соответствует отношению конгруэнтности P, определяемому следующим образом: aPb тогда и только тогда, когда $aba = a$ и $bab = b$. Для любой коммутативной полугруппы S' и любого гомоморфизма $\varphi' : I \to S'$ существует такой гомоморфизм $\alpha: S \to S_1'$, что $\varphi' = \alpha\cdot\varphi$. Доказано также (теорема 2), что свободная идемпотентная полугруппа с конечным числом образующих конечна. Без доказательства утверждается, что свободная идемпотентная группа с N образующими имеет порядок $I_N = \Sigma_{r=1}^{N} G_N^r \pi_{i=1}^{r}(r-i+1)\,2^i$ (в этой формуле у автора допущена опечатка).

Результаты работы не новы — нов лишь метод доказательства. Теорема 1 является частным случаем теоремы Клиффорда (Clifford A. H., Ann. Math., 1941, **42**, 1037—1049). Теорема 2 и формула для числа элементов свободной идемпотентной полугруппы вытекают из результатов Грина и Риса (Green J. A., Rees D., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, 35—40).

Примечание референта. Автор отмечает, что теорема 2 «значительно увеличивает ценность того факта, что существуют такие бесконечные последовательности из трех букв, что никаких два соседних подслова не тождественны». Вопрос о существовании таких последовательностей автор ошибочно связывает с именами Морзе и Хедлунда (Morse M., Hedlund G., Duke Math. J., 1944, **11**, 1—7), в то время как вопрос о их существовании был поставлен значительно ранее (в 1934 г.) А. Я. Хинчиным, а утвердительный ответ на этот вопрос был получен Аршоном (Матем. просвещение, 1934, **2**, 24—34). Ю. И. Соркин

7161. Гомоморфизм односторонне простых полугрупп на группы. Глускин Л. М., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 4, 673—675

Полугруппа G называется простой справа, если она не содержит отличных от G правых идеалов. Пусть T — подполугруппа, порожденная всеми правыми единицами i_a всех элементов простой справа полугруппы G, и N — множество всех элементов $n \in G$, для которых существуют такие элементы t, $t' \in T$, что $tn = t'$. Множество N является простой справа полугруппой. Комплексы aN, bN,... образуют группу относительно действия $aN \cdot bN = abN$ с единицей $N = nN$; эта группа обозначается через G/N. Оказывается, что гомоморфное отображение $\overline{\varphi a} = aN$ полугруппы G на группу G/N является общим наибольшим делителем всех гомоморфизмов полугруппы G на группы (т. е. любой гомоморфизм полугруппы G на некоторую группу G' имеет вид ψ, φ, где ψ — гомоморфизм группы G/N на группу G'). П. Г. Конторович

7162. Дополнение к статье «О компактных однсидемпотентных полугруппах». Тамура (Supplement to the paper «On compact one-idempotent semigroups». Tamura Takayuki), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 3, 96 (англ.)

Указывается, что результаты предыдущей статьи автора (РЖМат, 1956, 1105) доказаны лишь для пространств S, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Л. М. Глускин

7163. О прямом произведении полугрупп. Иван (O direktnom sučine pologrup. Ivan Ján), Mat.-fyz. časop., 1953, **3**, № 3-4, 57—66 (словац.; рез. русс.)

Доказано, что левый (соответственно правый или двусторонний) идеал L полугруппы S тогда и только тогда минимален, когда уравнение $xa = b$ (соответственно уравнения $ay = b$ и $xay = b$) для любых элементов $a, b \in L$ имеет решение в L. Отсюда следует, что любой минимальный идеал прямого произведения двух полугрупп является произведением минимальных идеалов сомножителей. Обратно, произведение минимальных идеалов сомножителей является минимальным идеалом произведения. Отсюда, в частности, вытекает, что прямое произведение полугрупп тогда и только тогда является простой полугруппой, т. е. не имеет нетривиальных двусторонних идеалов, когда все сомножители являются простыми полугруппами. Прямое произведение полугрупп тогда и только тогда является группой, когда все сомножители являются группами. Как показал Шварц (Schwarz Š., Čech. mat. žur., 1951, **1** (76), 51—65), любая простая полугруппа без нуля, обладающая хотя бы одним односторонним идеалом, является произведением непересекающихся антизоморфных групп (так называемых групповых компонент). Оказывается, что групповые компоненты прямого произведения простых полугрупп без нуля являются групповыми компонентами сомножителей. L. Mišík

7164. Алгебраическая теория кодирования. Шютценбергер (Une théorie algébrique du codage. Schützenberger Marcel Paul), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 7, 862—864 (франц.)

Теория кодирования рассматривается с точки зрения теории полугрупп. В частности, код определяется как изоморфное отображение свободной полугруппы, порожденной множеством «элементарных сообщений», в свободную полугруппу, порожденную множеством «букв». Доказательств большей частью заметка не содержит. Л. М. Глускин

7165. Заметка о полугруппах со средними единицами. Ямада (A note on middle unitary semigroups. Yamada Miyuki), Kodai Math. Semin. Repts, 1955, **7**, № 2, 49—52 (англ.)

Элемент m полугруппы S называется средней единицей, если $xmy = xy$ для любых $x, y \in S$. Пусть M — множество всех средних единиц полугруппы S (предполагается, что M не пусто). Полугруппа S называется M-обратимой, если для любого элемента $x \in S$ существует такой элемент $x' \in S$, что $xx' = x'x \in M$. Утверждается, что если любой идемпотент полугруппы S содержится в M, то $S = V \cup T$, где V и T не имеют общих элементов, причем V является M-обратимой полугруппой, а T — идеалом полугруппы S, не содержащим идемпотентов. С каждой M-обратимой полугруппой G связана полугруппа Q, являющаяся прямым произведением группы и подполугруппы, состоящей из таких идемпотентов $e_{i,k}$, что $e_{i,k}e_{r,s} = e_{i,s}$. Утверждается, что M-обратимая полугруппа G является суммой таких непересекающихся подмножеств G_α, где $\alpha \in Q$, что $G_\alpha G_\beta = p_{\alpha\beta} \in G_{\alpha\beta}$. Доказательств работа не содержит. Л. М. Глускин

7166. О полугруппах, обладающих некоторыми свойствами полугрупп с сокращением. Тьеррен (Sur quelques classes de demi-groupes possédant certaines propriétés des semi-groupes. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 18, 1765—1767 (франц.)

Полугруппа D называется ограничительной справа, если для любых элементов $a, b, x \in D$ из $ax = bx = a$ следует, что $a = b$, и вполне целой справа, если для любых элементов $a, x \in D$ из $a^2 = xa$ следует, что $a = x$. Аналогично определяется ограничительность и полная целость слева. Доказан ряд предложений об ограничительных и вполне целых полугруппах. В частности, рассмотрены подполугруппы всех идемпотентов таких полугрупп. Даны условия, при которых эти полугруппы удовлетворяют одностороннему закону сокращения. Доказано, что любая конечная ограничительная (справа и слева) полугруппа является группой. Л. М. Глускин

7167. Об одной теореме Тьеррена относительно ограничительных полугрупп. Исэки (Sur un théorème de M. G. Thierrin concernant demi-groupe limitatif. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan. Acad., 1955, **31**, № 2, 54—55 (франц.)

Доказано, что любая компактная ограничительная справа и слева (реф. 7166) полугруппа (в частности, любая компактная полугруппа с сокращением) является группой. П. Г. Конторович

7168. О наибольшем разложении полугруппы в полуструктуру. Ямада (On the greatest semilattice decomposition of a semigroup. Yamada Miyuki), Kōdai Math. Semin. Repts, 1955, **7**, № 2, 59—62 (англ.)

Подполугруппа полугруппы S называется P-подполугруппой, если вместе с некоторым словом $a_1, a_2, \ldots, a_m$, где $a_i \in S$, ей принадлежит любое другое слово, в которое входят все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и только они. Пусть Ω — множество всех P-подполугрупп полугруппы S и Γ — некоторое подмножество множества Ω. Говорят, что элементы $a, b \in S$ связаны отношением $\tilde{\Gamma}$, если для любых элементов $x, y \in S$ элементы xay и xby одновременно содержатся или не содержатся в любой подполугруппе из Γ. Отношение $\tilde{\Gamma}$ является эквивалентностью в S, выдерживающей операцию умножения, а факторполугруппа $S/\tilde{\Gamma}$ — полуструктурой. Обратно, любое разложение полугруппы S в полуструктуру полугрупп (РЖМат, 1956, 1104) получается описанным путем с помощью некоторого подмножества $\Gamma \subset \Omega$. Наиболее дробное разложение полугруппы в полуструктуру полугрупп получается при $\Gamma = \Omega$. Отсюда, в частности, непосредственно вытекает результат цитированной выше статьи о наиболее дробном разложении коммутативной полугруппы в полуструктуру полугрупп. Л. М. Глускин

7169. О проблеме делимости в полугруппах. Адян С. И., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 5, 747—750

Рассматриваются полугруппы с сокращением, задаваемые конечной системой образующих и конечным числом определяющих соотношений. Проблема (правой) делимости для полугруппы $\mathfrak{A}$ состоит в указании алгоритма, распознающего для любых слов Q и R в $\mathfrak{A}$, существует ли в $\mathfrak{A}$ такое слово X, что $XQ = R$. В работе построена полугруппа, для которой проблема делимости неразрешима.

Проблема существования обратного элемента для полугруппы $\mathfrak{A}$ с единицей состоит в указании алгоритма, распознающего, имеется ли для любого данного слова $A \in \mathfrak{A}$ (правый) обратный элемент. Оказывается, что построить полугруппу с неразрешимой проблемой существования обратного элемента невозможно. Такую полугруппу можно построить только со счетным числом образующих и определяющих соотношений. С другой стороны, невозможен алгоритм, решающий в каждой полугруппе (с конечным числом образующих и определяющих соотношений) проблему существования обратного элемента. А. С. Есенин-Вольпин

7170. Конечномерные алгебры со сверткой. Хьюитт, Цуккерман (Finite dimensional convolution algebras. Hewitt Edwin, Zuckerman Herbert S.), Acta math., 1955, **93**, № 1—2, 67—119 (англ.)

Пусть G — произвольная полугруппа. Любой комплексной функции f, заданной на полугруппе G, и любому элементу $x \in G$ отнесем функцию ${}_xf$, определенную формулой ${}_xf(y) = f(xy)$, $y \in G$. Пусть F — некоторое линейное пространство функций на полугруппе G, содержащее вместе с функцией f и все функции ${}_xf$, $x \in G$ (левоинвариантное пространство). Тогда для любого функционала l, заданного на пространстве F, и любой функции f формула $\varphi_l(x) = l({}_xf)$ определяет некоторую функцию на G. Если $\varphi_l \in F$ для произвольной функции $f \in F$, то для любого функционала m на F формула $(m \times l)(f) = m(\varphi_l)$ определяет некоторый функционал (свертку функционалов m и l). Линейное пространство функционалов, для любых двух элементов которого определена свертка, называется алгеброй со сверткой. Любая алгебра со сверткой ассоциативна.

Если полугруппа G конечна, то пространство $L_1(G)$ всех линейных функционалов, заданных на пространстве $F(G)$ всех функций на G, является алгеброй со сверткой. Эта алгебра изоморфна алгебре формальных линейных комбинаций

$$\sum_i \alpha_i x_i \quad (\alpha_i \in K;\ x_i \in G) \quad (K\text{—поле комплексных чисел}).$$

Комплексная функция $\chi(x)$ $(x \in G)$ называется полухарактером, если $\chi(x) \not\equiv 0$ и $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$. Пусть полугруппа G конечна и коммутативна. Тогда каждый полухарактер полугруппы G индуцирует полухарактер подполугруппы $G^\circ \subseteq G$, состоящей из таких элементов

x, что $x^{r_x} = x$ для некоторого $r_x > 0$, и наоборот, любой полухарактер полугруппы G° одним и только одним способом может быть продолжен до полухарактера полугруппы G. Полухарактеры полугруппы G образуют линейно независимую систему функций и их число равно порядку полугруппы G°.

Множество $\hat{G}$ всех полухарактеров полугруппы G тогда и только тогда является полугруппой относительно естественной операции умножения полухарактеров, когда подполугруппа H, состоящая из всех идемпотентов полугруппы G, содержит единицу. В этом случае $(\hat{G})^\circ = \hat{G}$, функция $\psi_x(\chi) = \chi(x)$ является полухарактером полугруппы $\hat{G}$ и полугруппа различных полухарактеров вида ψ_x изоморфна полугруппе G°. Кроме того, $\hat{\hat{G}} \approx G$ тогда и только тогда, когда $G = G^\circ$ и G содержит единицу.

Далее изучаются алгебры $L_1(G)$. В частности доказано, что полупростая алгебра A над полем K тогда и только тогда изоморфна алгебре $L_1(G)$, где G — некоторая полугруппа, когда алгебра A допускает над полем K одномерное представление.

Алгебра $L_1(G)$ коммутативной полугруппы G тогда и только тогда полупроста, когда $G = G^\circ$. Пусть полугруппа G конечна и T — пространство всех функций f, для которых $_xf = 0$ для всех $x \in G$. Тогда существует только конечное число таких минимальных левоинвариантных пространств $S_1, \ldots, S_r$, $S_i \subset F(G)$, что

$$S_i \cap T(G) = 0 \text{ и } S_i \cap (S_{j_1} + \ldots + S_{j_k}) = 0,$$

если $i \neq j_1, \ldots, j_k$. Оказывается, что функционал l тогда и только тогда принадлежит радикалу алгебры $L_1(G)$, когда $l(f) = 0$ для всех $f \in S_1 + \ldots + S_r$.

В конце работы приведены таблицы полугрупп порядков 2 и 3 и полугрупп порядков 4 и 6, для которых алгебры $L_1(G)$ полупросты. Библ. 52 назв. С. Д. Берман

7171. Замечания к теории бикомпактных полугрупп. Шварц (Poznámka k teorii bikompaktných pologrúp. Schwarz Stefan), Mat.-fiz. časop., 1955, 5, №, 2, 86—89 (словац.; рез. русс.)

Доказано, что если в хаусдорфовой бикомпактной полугруппе S имеет место правый закон сокращения, то S является простой слева полугруппой, представленной как объединение непересекающихся изоморфных групп. Если же в S имеет место двусторонний закон сокращения, то S является топологической группой (этот факт известен, см. Gelbaum — Kalish — Olmsted, Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 807—821). Эти утверждения являются простыми следствиями общих теорем о бикомпактных полугруппах, доказанных автором в другой работе (Чехосл. матем. ж., 1955, 5 (80), 1—23). J. Ivan

7172. Дополнения максимальных идеалов в компактных полугруппах. Фосетт, Кох, Нумакура (Complements of maximal ideals in compact semigroups. Faucett W. M., Koch R. J., Numakura K.), Duke Math. J., 1955, 22, № 4, 655—661 (англ.)

Пусть J — максимальный собственный идеал компактного моба S (РЖМат, 1956, 1108). Оказывается, что фактор-полугруппа S/J (РЖМат, 1955, 5633) либо вполне проста, либо имеет вид $\{0, v\}$, $v^2 = v0 = 0v = 0^2 = 0$. (Полугруппа D вполне проста, если не содержит отличных от D и от нуля идеалов и содержит ненулевой примитивный идемпотент). Используя известные результаты Риса, Клиффорда и Шварца о вполне простых полугруппах, автор получает отсюда ряд предложений о строении полугруппы S и, в частности, о строении множества $S \setminus J$. Как следствие доказывается, что для компактного моба понятия простоты и регулярности элементов в смысле Грина (Green J. A., Ann. Math., 1951, 54, 163—172) эквивалентны. Идемпотент $e \in S$ называется максимальным, если $e \in SeS$ и если из $e \in SxS$ следует, что $x \in SeS$. Пусть E — множество всех максимальных идемпотентов компактного моба S. Доказано, что если $S^2 = S$, то $S = SES$. Л. М. Глускин

7173. О некоторых разложениях группоидов. Тьеррен (Sur quelques décompositions des groupoïdes. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 5, 596—598 (франц.)

Группоидом называется множество с бинарной однозначной операцией. Группоид называется g-неразложимым, если он не является объединением нескольких собственных непересекающихся подгруппоидов. Подгруппоид S группоида G называется первичным, если из $xy \in S$ следует, что хотя бы один из элементов x, y содержится в S. Доказывается, что: 1) каждый группоид G можно единственным образом представить в виде объединения непересекающихся g-неразложимых подгруппоидов группоида G; 2) каждый первичный подгруппоид P группоида G является объединением максимальных g-неразложимых подгруппоидов группоида G; 3) всякая g-неразложимая полугруппа с правой единицей является группой. Обобщая далее результаты Т. Тамура и Н. Кимура (РЖМат, 1956, 1104), автор строит наиболее дробное разложение группоида в полуструктуру подгруппоидов. Л. М. Глускин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

7174. Замечание о выполнении действий в полях в конечное число шагов. Келлер (Eine Bemerkung zur Ausführung der körpertheoretschen Operationen in erträglich vielen Schritten. Keller Ott-Heinrich), Math. Z., 1955, 63, № 3, 277—285 (нем.)

Устанавливаются некоторые утверждения, облегчающие определение группы Галуа уравнения и вычисление его корней в радикалах (в случае разрешимой группы). В качестве примера определяется группа Галуа и находятся корни уравнения $x^5 + 5x^3 + 5x - 1 = 0$ (над полем рациональных чисел). З. И. Боревич

7175. О чистой трансцендентности некоторого поля. Куниёси (On purely-transcendency of a certain field. Kuniyoshi Hideo), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2, 3, 101—108 (англ.)

Рассматривается поле k с характеристикой $p > 0$ и его чисто трансцендентное расширение $K = k(s_1, \ldots, s_{p^n})$. Пусть σ — автоморфизм поля K, возникающий при циклической подстановке $s_i \to s_{i-1}$ ($i \bmod p^n$). Доказывается, что неподвижное относительно σ поле L также является чисто трансцендентным расширением поля k. Доказательство проводится с помощью построения некоторой системы образующих поля K/k. Л. Я. Окунев

7176. О теореме Штикельбергера. Дален (On a theorem of Stickelberger. Dalen Kåre), Math. scand., 1955, 3, № 1, 124—126 (англ.)

Пусть Ω — совершенное поле с нормой ω, I — область целостности, состоящая из элементов a поля Ω, для которых $\omega(a) \geqslant 0$, и $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца I, состоящий из таких элементов b, что $\omega(b) > 0$. Факторкольцо $P = I/\mathfrak{P}$ является полем. Предположим, что поле P либо конечно, либо изоморфно полю действительных чисел. Пусть далее $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен из кольца $I[x]$ с дискриминантом $D \not\equiv 0 (\mathfrak{P})$, и $r_1, r_2, \ldots, r_s$ — степени неприводимых многочленов, на которые разлагается этот многочлен в кольце $P[x]$. Доказывается, что группа Галуа G многочлена $f(x)$ порождается подстановкой, длины циклов которой

равны соответственно $r_1, r_2, \ldots, r_s$. Кроме того, уравнение $x^2 - D = 0$ тогда и только тогда имеет решение в поле Ω, когда $n \equiv s \pmod 2$. Последнее утверждение является обобщением результатов Карлица (РЖМат, 1954, 2516). Из него, в частности, следует, что если многочлен степени n над полем действительных чисел с дискриминантом $D \neq 0$ обладает k действительными корнями, то $(-1)^{1/2(n-k)} D > 0$. Е. Г. Шульгейфер

7177. Системы факторов Хассе, редуцированные по модулю p. Масуда (Hasse factor systems reduced modulo p. Masuda K.), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 3/4, 161—165 (англ.)

Исследуется связь некоторых известных фактов арифметики полей алгебраических чисел с теорией матричных систем факторов, введенных Хассе (Hasse, Crell. J., 1949, **187**).

Пусть K/k — нормальное поле алгебраических чисел, $\mathfrak{o}$ — кольцо целых чисел поля k, $\mathfrak{O}$ — кольцо целых чисел поля K, $\mathfrak{p}$ — простой дивизор поля K и $\mathfrak{P}$ — делящий $\mathfrak{p}$, простой дивизор поля k. При помощи теории Хассе доказывается, что кольцо $\mathfrak{O}/\mathfrak{p}$ тогда и только тогда является алгеброй Галуа над полем $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, когда группа ветвления дивизора $\mathfrak{P}$ тривиальна (эта теорема эквивалентна теореме Э. Нетер о существовании нормального базиса в локальных полях без высшего ветвления (Naether E., J. rein und angew. Math., 1932, **167**). Дается также характеристика в терминах факторов Хассе групп разложения простых дивизоров с тривиальными группами ветвления. Кроме того, доказываются некоторые известные (ср. Schilling O., The theory of valuations, гл. V) свойства локальных полей без высшего ветвления. Доказательства не связаны с теорией Хассе и близки к известным. И. Р. Шафаревич

7178. Заметка о дифференте композита полей. Тояма (A note on the different of the composed field. Toyama Hiraku), Kōdai Math. Semin. Repts, 1955, **7**, № 2, 43—44 (англ.)

Пусть K_0 — поле алгебраических чисел конечной степени, K_1 и K_2 — конечные алгебраические расширения поля K_0, K_3 — композит полей K_1, K_2 и D_1, D_2, D_3 — дифференты соответственно полей K_1, K_2, K_3 (относительно поля K). Замечается, что D_3 делит D_1 и D_2, но делится на наименьшее общее кратное $[D_1, D_2]$. С помощью этого замечания весьма просто доказывается известная теорема о дискриминанте композита полей. Б. М. Уразбаев

7179. Об обобщении нормального базиса в абелевых полях алгебраических чисел. Ньюман, Тауски (On a generalization of the normal basis in abelian algebraic number fields. Newman M., Taussky Olga), Communs Pure and Appl. Math., 1956, **9**, № 1, 85—91 (англ.)

Рассматриваются абсолютно абелевы поля F алгебраических чисел степени n, обладающие нормальным базисом для целых чисел, т. е. базисом вида α^{σ_i} $(i=1,\ldots,n)$, где σ_i — элементы группы Галуа поля F. Доказано, что для нормального базиса α^{σ_i} матрица $(\alpha^{\sigma_i \sigma_k})$ нормальна. Если поле F циклично, то при $n = 2, 3, 4, 6$ существует только один нормальный базис (с точностью до порядка элементов). Для других n нормальный базис не является единственным. Если при некотором базисе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ для целых чисел циклического поля F матрица $(\alpha_i^{\sigma_k})$ нормальна, то этот базис либо нормален, либо отличается от нормального только знаками. З. И. Боревич

7180. Дзета-функции симметрически порожденного поля алгебраических функций нескольких переменных. Лампрехт (Zetafunktionen symmetrisch-erzeugbarer algebraischer Funktionnenkörper mehrerer Veränderlicher. Lamprecht Erich), Math. Z., 1956, **64**, № 1, 47—71 (нем.)

Исследуется арифметическая дзета-функция $Z_A(s; x_1,\ldots,x_n)$ поля A алгебраических функций от n переменных $x_1,\ldots, x_n$ над полем констант k. С помощью доказанной им теоремы композиции, согласно которой, в том случае, когда A является композитом двух независимых полей B_i $(i = 1,2)$ алгебраических функций от n_1 и n_2 $(n_1 + n_2 = n)$ переменных, некоторые из свойств Z-функций полей B_1 и B_2 наследственным образом переносятся на Z-функцию поля A, автор в предположении, что k — поле Галуа, а A — композит n независимых полей функций одной переменной («симметрически порожденное поле алгебраических функций»), решает проблему сходимости произведения, представляющего Z — функцию, исследует её поведение при расширении поля констант и т. д. В этом случае область сходимости представляющего Z-функцию произведения определяется неравенством $\mathrm{Re}(s) < n$; функция $Z(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида $Z(s)/Z(n-s) = \mathrm{const}$ и инвариантна, т. е. не зависит от последовательности построения композита. Некоторые результаты получаются также о геометрических Z-функциях над полями Галуа и неполных Z-функциях поля алгебраических функций над числовыми полями.

В заключение приводятся результаты, относящиеся к проблеме инвариантности. Если поле k совершенно, а A — «двойное» поле, т. е. $A = K_1 \cdot K_2$, где $K_i = k(x_{i1}, x_{i2})$, $f_i(x_{i1}, x_{i2}) = 0$, и если при построении Z-функции ограничиться только такими представлениями поля A, то арифметическая Z-функция оказывается почти инвариантной в том смысле, что все таким образом построенные Z-функции совпадают при достаточном расширении поля констант. Е. В. Морозов

7181. К теории расширения полей констант полей алгебраических функций. Построение координатных полей дивизоров и классов дивизоров. Рокетт (Zur Theorie der Konstantenerweiterungen algebraischer Funktionenkörper. Konstruktion der Koordinatenkörper von Divisoren und Divisorenklassen. Roquette Peter), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **19**, № 3—4, 269—276 (нем.)

Пусть Ω — совершенное поле, K/Ω — поле алгебраических функций над Ω, Ω^* — произвольное расширение поля Ω и $K\Omega^*/\Omega^*$ — соответствующее расширение поля K/Ω. Дивизор $\mathfrak{z}$ поля $K\Omega^*/\Omega^*$ называется рациональным в некотором промежуточном поле Ω' $(\Omega \subseteq \Omega' \subseteq \Omega^*)$, если он является образом дивизора поля $K\Omega'/\Omega'$ при естественном изоморфном вложении группы дивизоров поля $K\Omega'/\Omega'$ в группу дивизоров поля $K\Omega^*/\Omega^*$. Доказано, что для любого дивизора $\mathfrak{z}$ поля $K\Omega^*/\Omega^*$ существует единственное наименьшее промежуточное поле Ω', в котором дивизор $\mathfrak{z}$ рационален. Указан метод построения такого поля.

Аналогичные вопросы рассматриваются и для классов дивизоров поля $K\Omega^*/\Omega^*$. Б. М. Уразбаев

7182. О пополнении абстрактных алгебраических полей обобщенным процессом Кантера с помощью общих последовательностей Мура — Смита, содержащих конфинальную цепь. Никодим (Sur l'extension des corps algébriques abstraits par le procédé généralisé de Cantor, basé sur les suites générales de Moore-Smith qui contiennent une chaîne confinale. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 19, 1249—1250 (франц.)

Пусть A — направленное частично упорядоченное множество индексов. Если на поле F определена метрика со значениями в линейно упорядоченном поле, то, следуя методу Кантора, можно построить поле F_A,

состоящее из классов фундаментальных A-последовательностей. Пусть B — вполне упорядоченное конфинальное подмножество множества A. Показывается, что при некоторых предположениях поле $\bar{F}_A$ изоморфно полю $\bar{F}_B$. З. И. Боревич

7183. Проблема погружения для нормальных алгебр. Вольф (Das Einbettungsproblem galoisscher Algebren. Wolf Paul), J. reine und angew. Math., 1954, 193, № 3, 4, 166—182 (нем.)

Коммутативная и ассоциативная полупростая алгебра K над полем Ω_0 называется нормальной алгеброй с группой Галуа $\mathfrak{G}$, если задан изоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в группу автоморфизмов алгебры K, определяющий представление группы $\mathfrak{G}$, эквивалентное регулярному. Используя предложенное Хассе (Hasse, J. reine und angew. Math., 1950, 187, 14—43) описание нормальных алгебр с заданной группой Галуа, автор вывел ранее (Math. Nachr., 1953, 9, 281—300 и 10, 233—238) необходимое условие возможности погружения нормального расширения Ω/Ω_0 в нормальную алгебру K с заданной группой Галуа) В реферируемой работе находятся несколько эквивалентных формулировок этого условия. Одна из них совпадает с условием погружаемости, найденным Д. К. Фаддеевым (Матем. сб., 1944, 15 (57), 243—284), на которого автор не ссылается. И. Р. Шафаревич

7184. Арифметики алгебр над полями алгебраических функций нескольких переменных. Дженнер (Arithmetics of algebras over algebraic function fields of several variables. Jenner W. E.), Portugaliae math., 1954, 13, № 1—2, 35—36 (англ.)

Обобщение некоторых результатов предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 2582) на случай нетеровой области целостности. В. В. Морозов

7185. Пример нормального локального кольца с аналитическим ветвлением. Нагата (An example of normal local ring which is analytically ramified. Nagata Masayoshi), Nagoya Math.J., 1955, 9, oct., 111—113 (англ.)

Локальная область целостности $\mathfrak{o}$ называется нормальным локальным кольцом, если она замкнута в своем поле частных, и локальным кольцом с аналитическим ветвлением, если ее пополнение обладает нетривиальными делителями нуля. Строится пример нормального локального кольца с аналитическим ветвлением.

Пусть $k = k_0(u_0, v_0, \ldots, u_n, v_n, \ldots)$ — бесконечное число трансцендентное расширение простого поля k_0 характеристики два, $\mathfrak{r} = k\{x, y\}$ — кольцо степенных рядов от двух переменных x и y, $\mathfrak{o} = k^2\{x, y\}[k]$ и $c = \sum_{i=0}^{\infty}(u_i x^2 + v_i y^2)$. Оказывается, что кольцо $\mathfrak{o}[c]$ является нетеровым нормальным локальным кольцом с аналитическим ветвлением. Этим примером дается отрицательный ответ на вопрос Зарисского (Zariski O., Ann. Math., 1948, 49, 352—362), не будет ли всякое нетерово нормальное локальное кольцо аналитически неразветвляемым. Е. Г. Шульгейфер

7186. Замечание о редукциях идеалов с приложением к обобщенной гильбертовой функции. Нортготт, Рис (A note on reductions of ideals with an application to the generalized Hilbert function. Northcott D. G., Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 3, 353—359 (англ.)

Рассматривается равнохарактеристическое локальное кольцо Q строго положительной размерности d с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{q}$ — фиксированный $\mathfrak{m}$-примарный идеал кольца Q и $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ — некоторый базис идеала $\mathfrak{q}$. Если $\varphi(X) = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ — форма степени s с коэффициентами из кольца Q, то через $\bar{\varphi}(X) = \bar{\varphi}(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ обозначается форма, коэффициентами которой являются образы соответствующих коэффициентов формы $\varphi(X)$ при гомоморфизме кольца Q на поле $K = Q/\mathfrak{m}$. Форма $\bar{\varphi}$ называется нуль-формой, если соответствующая ей форма φ над кольцом Q (хотя бы одна, а потому и все) удовлетворяет условию $\varphi(u) = \varphi(u_1, \ldots, u_p) \in \mathfrak{q}^s\mathfrak{m}$. Размерность однородного идеала $\mathfrak{n}$ кольца $K[X_1, X_2, \ldots, X_p]$, порожденного нуль-формами, равна d.

Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_d$ — некоторые натуральные числа; идеал $(v_1, v_2, \ldots, v_d)$, порожденный элементами $v_1, v_2, \ldots, v_d$ $(d = \dim Q)$, называется редукцией типа $[r_1, r_2, \ldots, r_d]$ идеала $\mathfrak{q}$, если $v_1 \in \mathfrak{q}^{r_1}, \ldots, v_d \in \mathfrak{q}^{r_d}$ и $\mathfrak{q}^m = v_1\mathfrak{q}^{m-r_1} + v_2\mathfrak{q}^{m-r_2} + \cdots + v_d\mathfrak{q}^{m-r_d}$ для некоторого $m \geqslant \max(r_1, r_2, \ldots, r_d)$. Редукция типа $[1, 1, \ldots, 1]$ называется простой редукцией. Эти редукции рассматривались в предыдущей работе авторов (РЖМат, 1955, 2581). Пусть $\varphi_1(X), \ldots, \varphi_d(X)$ — формы от P переменных с коэффициентами из кольца Q степеней $r_1, \ldots, r_d$ соответственно и пусть $v_i = \varphi_i(u)$ $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Доказано, что идеал $(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ тогда и только тогда является редукцией типа $[r_1, r_2, \ldots, r_d]$ примарного идеала $\mathfrak{q}$, когда идеал $(\mathfrak{n}, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_d)$ кольца $K[X_1, X_2, \ldots, X_p]$ примарен и принадлежит простому идеалу $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$. Отсюда немедленно следует, что идеал $\mathfrak{q}$ обладает редукцией некоторого типа $[r_1, r_2, \ldots, r_d]$, если поле K бесконечно, то $\mathfrak{q}$ обладает простой редукцией. Если $\mathfrak{q}$ обладает редукцией типа $[r_1, r_2, \ldots, r_d]$, то $\mathfrak{q}$ обладает также и редукцией типа $[r_1 s_1, r_2 s_2, \ldots, r_d s_d]$, где $s_1, s_2, \ldots, s_d$ — произвольные натуральные числа. Некоторая степень $\mathfrak{q}^\nu$ идеала $\mathfrak{q}$ всегда обладает простой редукцией.

Далее доказано, что если $(v_1, v_2, \ldots, v_d)$ — редукция типа $[r_1, r_2, \ldots, r_d]$ идеала $\mathfrak{q}$, то $e(v_1, v_2, \ldots, v_d) = r_1 r_2 \ldots r_d l(\mathfrak{q})$.

Используя введенные понятия, авторы обобщают на произвольное равнохарактеристическое локальное кольцо теорему Норткотта (РЖМат, 1953, 104) о том, что порядок произвольного идеала (относительно $\mathfrak{m}$-примарного идеала $\mathfrak{q}$) равен сумме порядков примарных компонент этого идеала наибольшей размерности. Указывается геометрическая интерпретация этой теоремы. Е. Г. Шульгейфер

7187. Оценки, связанные с локальным кольцом (I). Рис (Valuations associated with a local ring (I). Rees D.), Proc. London. Math. Soc., 1955, 5, № 17, 107—128 (англ.)

Псевдооценкой $v(x)$ на коммутативном кольце A с единичным элементом 1 называется функция, определенная на кольце A, принимающая значения на аддитивной группе действительных чисел, пополненной символом ∞, и удовлетворяющая следующим условиям: 1) $v(0) = \infty$, $v(1) = 0$; 2) $v(x - y) \geqslant \min(v(x), v(y))$; 3) $v(xy) \geqslant v(x) + v(y)$. Псевдооценка $v(x)$ называется регулярной, если $v(x^2) = 2v(x)$ для любого элемента x кольца A; для регулярной псевдооценки справедливо равенство $v(x^n) = nv(x)$, каково бы ни было натуральное число n. Для произвольной псевдооценки $v(x)$ функция $\bar{v}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{v(x^m)}{n}$ является регулярной псевдооценкой.

Говорят, что псевдооценка $\bar{v}$ соответствует псевдооценке v. Если для каждой пары элементов x, y кольца A имеет место соотношение $v(xy) = v(x) + v(y)$, то псевдооценка $v(x)$ называется оценкой. Псевдооценка

$w(x)$ называется подоценкой, если существуют такие оценки v_i, что

$$w(x) = \min v_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (1)$$

для любого элемента $x \in A$. Любая подоценка является регулярной псевдооценкой. Представление (1) подоценки $w(x)$ называется неприводимым, если из него нельзя удалить ни одну из оценок $v_i(x)$. Оценки $v_i(x)$, входящие в неприводимое представление подоценки $w(x)$, определяются однозначно.

Пусть кольцо A нетерово и пусть $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A. Для любого элемента $x \in A$ положим $v_{\mathfrak{a}}(x) = n$, если $x \in \mathfrak{a}^n$ и $x \notin \mathfrak{a}^{n+1}$, и $v_{\mathfrak{a}}(x) = \infty$, если $x \in \bigcap_1^\infty \mathfrak{a}^n$. Очевидно, что функция $v_{\mathfrak{a}}(x)$ является псевдооценкой кольца A. Пусть $\overline{v}_{\mathfrak{a}}(x)$ — соответствующая регулярная псевдооценка. Два идеала $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ кольца A называются асимптотически эквивалентными, если $\overline{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \overline{v}_{\mathfrak{b}}(x)$ для каждого элемента $x \in A$, и проективно эквивалентными, если $\overline{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \alpha \overline{v}_{\mathfrak{b}}(x)$ для любого $x \in A$ и некоторого положительного действительного числа α, не зависящего от x. Оказывается, что эти понятия совпадают с понятиями асимптотической и проективной эквивалентности, введенными Самюэлем (Samuel P., Ann. Math., 1952, 56, 11—21). Множество элементов кольца A, удовлетворяющих условию $\overline{v}_{\mathfrak{a}}(x) \geqslant 1$, образует идеал $\overline{\mathfrak{a}}$, называемый асимптотическим замыканием идеала $\mathfrak{a}$. Асимптотическое замыкание $\overline{\mathfrak{a}}$ содержит идеал $\mathfrak{a}$ и его целозамыкание $\hat{\mathfrak{a}}$, т. е. совокупность всех целых относительно $\mathfrak{a}$ элементов кольца A (см. Prüfer H., J. reine und angew. Math., 1932, 168, 1—36). Идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда асимптотически эквивалентны, когда $\overline{\mathfrak{a}} = \overline{\mathfrak{b}}$.

Пусть теперь Q — равнохарактеристическое локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{q}$ — некоторый $\mathfrak{m}$-примарный идеал. Тогда $\overline{v}_{\mathfrak{q}}(x) = \min v_i(x)$, где $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ — дискретные оценки кольца Q, принимающие лишь рациональные значения и однозначно определяемые идеалом $\mathfrak{q}$. Целозамыкание $\hat{\mathfrak{q}}$ идеала $\mathfrak{q}$ совпадает с его асимптотическим замыканием $\overline{\mathfrak{q}}$. Два $\mathfrak{m}$-примарных идеала $\mathfrak{q}_1$ и $\mathfrak{q}_2$ кольца Q тогда и только тогда проективно эквивалентны, когда при некоторых показателях r и s идеалы $\mathfrak{q}_1^r$ и $\mathfrak{q}_2^s$ асимптотически эквивалентны.

Если v — произвольная псевдооценка на локальном кольце Q, удовлетворяющая условиям $v(x) \geqslant 0$ для любого $x \in Q$ и $v(x) > 0$ для всех элементов x максимального идеала $\mathfrak{m}$, то: а) псевдооценка $v(x)$ принимает лишь счетное число значений, которые можно вполне упорядочить по возрастанию; б) существует расширение v' псевдооценки v на пополнение $\overline{Q}$ локального кольца Q, принимающее те же значения, что и псевдооценка v; в) пополнение кольца Q относительно топологии, индуцированной в кольце Q псевдооценкой v, изоморфно фактор-кольцу $\overline{Q}/V$, где V — идеал, состоящий из таких элементов x кольца $\overline{Q}$, что $v'(x) = \infty$.

Устанавливаются некоторые связи между псевдооценками вида $\overline{v}_{\mathfrak{q}}(x)$, где $\mathfrak{q}$ — $\mathfrak{m}$-примарный идеал равнохарактеристического локального кольца Q, и кратностью идеалов. В частности доказывается, что если $\mathfrak{q}$ — произвольный $\mathfrak{m}$-примарный идеал локального кольца Q положительной размерности d и $\mathfrak{q}'$ — другой $\mathfrak{m}$-примарный идеал, порождаемый d элементами $x_1, \ldots, x_d$, то $e(\mathfrak{q}') \geqslant e(\mathfrak{q})\, \overline{v}_{\mathfrak{q}}(x_1) \ldots \overline{v}_{\mathfrak{q}}(x_d)$. Если $e(\mathfrak{q}') = e(\mathfrak{q})$, то каждый элемент x идеала $\mathfrak{q}'$, для которого $\overline{v}_{\mathfrak{q}}(x) > 1$, принадлежит идеалу $\mathfrak{q}'\mathfrak{m}$. Если, кроме того, поле $Q/\mathfrak{m}$ бесконечно, то элементы $x_1, \ldots, x_d$, порождающие идеал $\mathfrak{q}'$, аналитически независимы над идеалом $\mathfrak{q}$.

В заключение описываются оценки локального кольца Q, встречающиеся в неприводимом представлении подоценки вида $\overline{v}_{\mathfrak{q}}(x)$, где $\mathfrak{q}$ — некоторый $\mathfrak{m}$-примарный идеал кольца Q.

Е. Г. Шульгейфер

7188. Замечание о полулокальных кольцах. Йосида, Сакума (A note on semi-local rings. Yoshida Michio, Sakuma Motoyoshi). J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A17**, № 2, 181—184 (англ.)

Пусть $\mathfrak{m}$ — такой идеал коммутативного кольца $\mathfrak{o}$, что $\bigcap_{n=1}^\infty \mathfrak{m}^n = (0)$. Тогда степени идеала $\mathfrak{m}$ образуют систему окрестностей некоторой топологии ($\mathfrak{m}$-адической топологии) кольца $\mathfrak{o}$. Пополнение кольца $\mathfrak{o}$ в этой топологии обозначается через $\overline{\mathfrak{o}}$. Пусть $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ — такие идеалы кольца $\mathfrak{o}$, что $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_i$. Положим $\bigcap_{n=1}^\infty \mathfrak{m}_i^n = \mathfrak{m}_i^\infty$, $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}_i^\infty = \mathfrak{o}_i'$, $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^\infty = \mathfrak{m}_i'$ и обозначим через $\overline{\mathfrak{o}}_i$ $\mathfrak{m}_i'$-адическое пополнение кольца $\mathfrak{o}_i'$.

Пусть $x^* = \lim x_n$, $x_n \in \mathfrak{o}$, — произвольный элемент кольца $\overline{\mathfrak{o}}$. Тогда образы элементов x_n в фактор-кольце $\mathfrak{o}_i'$ образуют фундаментальную последовательность в $\mathfrak{m}_i'$-адической топологии, предел которой мы обозначим через $x^{**} \in \overline{\mathfrak{o}}_i$. Естественное отображение $x^* \to x^{**}$ является, как легко видеть, непрерывным гомоморфным отображением кольца $\overline{\mathfrak{o}}$ в кольцо $\overline{\mathfrak{o}}_i$. Пусть τ — определенное этими отображениями гомоморфное отображение кольца $\mathfrak{o}$ в прямую сумму $\tilde{\mathfrak{o}}$ колец $\overline{\mathfrak{o}}_i$. Оказывается, что если кольцо $\mathfrak{o}$ обладает единицей, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_r$ и идеалы $\mathfrak{m}_i$ попарно взаимно просты, то отображение τ изоморфно. Отсюда, в частности, следует результат Шеваллея (Chevalley C., Ann. Math., 1943, **44**, 690—708) о разложимости полного полулокального кольца в прямую сумму конечного числа полных локальных колец.

Далее доказывается, что если кольцо $\mathfrak{o}$ нетерово и обладает единицей, а $\mathfrak{m}_i$ — простые идеалы, принадлежащие идеалу $\mathfrak{m}$, то отображение τ является мономорфизмом.

Е. Г. Шульгейфер

7189. Замечание о целозамыканиях нетеровых областей целостности. Нагата (Note on integral closures of Noetherian domains. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 2, 121—124 (англ.)

Акицуки доказал (Akizuki Y., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 3-rd. ser., 1935, **17**, 327—336), что если $\mathfrak{o}$ — нетерова локальная область целостности размерности $n = 1$ и $\hat{\mathfrak{o}}$ — ее целозамыкание в поле частных, то любое кольцо $\mathfrak{z}$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{z} \subset \hat{\mathfrak{o}}$, будет нетеровым. В связи с этим для нетеровых локальных областей целостности $\mathfrak{o}$ произвольной размерности n были поставлены следующие проблемы: 1) любое ли кольцо $\mathfrak{z}$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{z} \subset \hat{\mathfrak{o}}$, будет нетеровым; 2) всегда ли нетеровым является целозамыкание $\hat{\mathfrak{o}}$. На примерах показывается, что пер-

вая проблема решается отрицательно уже при $n=2$, а вторая при $n=3$.

При построении примеров доказывается, что если $\mathfrak{k}_0$ — простое поле простой характеристики p, $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_0(u_1,\ldots,u_n,\ldots)$ — бесконечное чисто трансцендентное расширение поля $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{r}_n=\mathfrak{k}\{x_1,\ldots,x_n\}$ — кольцо степенных рядов от n переменных, то $\mathfrak{o}_n=\mathfrak{k}^p\{x_1,\ldots,x_n\}[\mathfrak{k}]$ — регулярное локальное кольцо, пополнением которого является кольцо $\mathfrak{r}_n$. Е. Г. Ш.

7190. Теорема о кольцах Зариского. Йосида (A theorem on Zariski rings. Yoshida Michio), Canad. J. Math., 1956, 8, № 1, 3—4 (англ.)

Нетерово кольцо A с единицей и с $\mathfrak{m}$-адической топологией, где $\mathfrak{m}$ — идеал кольца A, содержащийся в джекобсоновском радикале кольца A и удовлетворяющий условию $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}^n=(0)$, называется кольцом Зариского. Относительно кольца Зариского A и его $\mathfrak{m}$-адического пополнения $\hat{A}$ доказываются следующие теоремы:

1. Если расширение $\mathfrak{a}\hat{A}$ произвольного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A порождается r элементами, то и идеал $\mathfrak{a}$ порождается r элементами.

2. а) Если $\mathfrak{z}$ — простой идеал кольца A, а $\hat{\mathfrak{z}}$ — изолированный простой делитель идеала $\mathfrak{z}\hat{A}$, то $\operatorname{rank}\mathfrak{z}\geqslant\operatorname{rank}\hat{\mathfrak{z}}$. б) Если $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал кольца A, то $\operatorname{rank}\mathfrak{a}\geqslant\operatorname{rank}\mathfrak{a}\hat{A}$. в) Для каждого идеала $\mathfrak{a}$ локального кольца A справедливо равенство $\dim\mathfrak{a}=\dim\mathfrak{a}\hat{A}$.

Из теоремы 2 легко следует результат Ниси (РЖМат, 1956, 5750) о том, что если для каждого простого идеала $\hat{\mathfrak{z}}$ пополнения $\hat{A}$ локального кольца A справедливо равенство $\operatorname{rank}\hat{\mathfrak{z}}+\dim\hat{\mathfrak{z}}=\dim\hat{A}$, то такое же равенство справедливо для каждого простого идеала $\mathfrak{z}$ кольца A. Е. Г. Шульгейфер

7191. Замечания об основании колец. II. Осима (Notes on basic rings. II. Osima Masaru), Math. J. Okayama Univ., 1954, 3, № 2, 121—127 (англ.)

Пусть V — левый унитарный модуль над кольцом R с единицей, однозначно (с точностью до R-изоморфизма) разлагающийся в прямую сумму конечного числа неприводимых R-модулей. Тогда кольцо эндоморфизмов $E_V(R)$ модуля V однозначно (с точностью до $E_V(R)$-изоморфизма) разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых левых идеалов (такие кольца рассматривались в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 4911)). Предполагая, что и кольцо R обладает тем же свойством, автор изучает связи между кольцом эндоморфизмов $E_V(R)$, его основанием $V(R))^0$ и кольцами эндоморфизмов некоторых подмодулей модуля V. В частности, доказывается, что: а) $E_{V_0}(R^0)=(E_V(R))^0$, где $V_0=eV e'$, а e и e' — такие идемпотенты колец R и $E_V(R)$ соответственно (кольцо $E_V(R)$ рассматривается как область правых операторов модуля V), что $eRe=R^0$ и $e'E_V(R)\,e'=(E_V(R))^0$; б) $E_{V_0}(E_{V_0}(R^0))=R^0$ тогда и только тогда, когда $E_V(E_V(R))=R$, где $E_V(E_V(R))$ — кольцо эндоморфизмов правого $E_V(R)$-модуля V. Доказывается также, что если модуль V содержит прямое слагаемое вида Re, то $E_V(E_V(R))=R$. Далее изучаются алгебры с единицей конечного ранга над данным полем K. Алгебры A и B называются подобными ($A\sim B$), если изоморфны их основания A^0 и B^0. Доказывается, что если $A\sim B$ и $C\sim D$, то $A\times C\sim B\times D$ и $A_L\sim B_L$ при любом расширении L поля K. В заключение при дополнительном предположении, что поле K алгебраически замкнуто, рассматриваются некоторые свойства представлений алгебр A и B, определяемых A-B-модулем V, конечным над полем K. Е. Г. Шульгейфер

7192. Теорема о базисе модулей над кольцами многочленов. Рис (A basis theorem for polynomial modules. Rees D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 12—16 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — модуль с конечным числом образующих $u_1,\ldots,u_r$ над кольцом многочленов $P_n=k[X_1,\ldots,X_n]$ от n неизвестных над некоторым полем k. Доказано, что существуют такие многочлены $Y_1,\ldots,Y_n\in P_n$, порождающие кольцо P_n, и такие элементы $v_{ij}\in\mathfrak{M}$, $i=0,\ldots,n$, $j=1,\ldots,t_i$, вида $\psi(X_1,\ldots,X_n)u_k$, где ψ — однородный многочлен, что любой элемент $u\in\mathfrak{M}$ однозначно представляется в виде

$$u=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{t_i}\varphi_{ij}(Y_1,\ldots,Y_{n-i})\,v_{ij},$$

где φ_{ij} — многочлены от указанных в скобках неизвестных. Если поле k бесконечно, то многочлены $Y_1,\ldots,Y_n$ можно считать линейными формами.

Модуль $\mathfrak{M}$ автор называет однородным, если он разложен в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{M}_s$, $s=0,1,\ldots$, над полем k, причем для любого $u_s\in\mathfrak{M}_s$ и любого однородного многочлена l-й степени $\varphi_l(X_1,\ldots,X_n)$ имеет место включение $\varphi_l u_s\in\mathfrak{M}_{s+l}$. Обобщая известную теорему о гильбертовой функции полиномиальных идеалов, автор для любого однородного модуля $\mathfrak{M}$ доказывает, что функция $\chi(q)=\dim\mathfrak{M}_q$ для достаточно больших q совпадает с некоторым многочленом. А. И. Узков

7193. A-локально выпуклые топологические модули. Гика (Module topologice A-local convexe. Ghika Al.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1953, 3, № 3—4, 101—103 (рум.)

Пусть Δ — кольцо с единицей ε, удовлетворяющее следующим условиям: 1) всякий элемент $\alpha\in\Delta$ имеет вид $\alpha=\beta w=w\beta$, где $\beta\beta^{-1}=\varepsilon$ и $w^2=w$; 2) кольцо Δ содержит F-упорядоченное подкольцо A (Ghika Al, Studii si cercetări mat., 1950, 1, № 2, 251—281), содержащее все идемпотенты кольца Δ, для которого из $\alpha\beta$, $\beta\in A$ следует, что $\alpha\beta=\alpha'\beta$, где $\alpha'\in A$; 3) существует такое отображение $\alpha\to|\alpha|$ кольца Δ в подкольцо A, что а) $|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$; б) $|\alpha\beta|=|\alpha|\times|\beta|$; в) $|\alpha|=0$ тогда и только тогда, когда $\alpha=0$; г) $|\alpha|=\sup(\alpha,-\alpha)$ для любого $\alpha\in A$. Унитарный топологический Δ-модуль E называется A-локально выпуклым, если существует фундаментальная система таких замкнутых A-выпуклых окрестностей нуля, что $|\alpha|V=\alpha V$ при любом $\alpha\in\Delta$ и, кроме того, для всякого $x\in E$ существует такое положительное обратимое $\lambda\in A$, что $x\in\lambda V$. Отображение $x\to\sigma(x)$ унитарного топологического Δ-модуля E в кольцо K называется A-полунормой на E, если $\sigma(x+y)\leqslant\sigma(x)+\sigma(y)$ и $\sigma(\alpha x)=|\alpha|\sigma(x)$ для любых $x,y\in E$, $\alpha\in\Delta$. Доказывается, что модуль E тогда и только тогда является A-локально выпуклым модулем, когда его топология совпадает с верхней гранью топологий, определенных A-полунормами. В. А. Андрунакиевич

7194. Об объединении или неприводимости модулей. Герендон (Sur les modules union ou inter-irréductibles. Guérindon Jean), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 21, 2042—2044 (франц.)

На A-модули $\mathfrak{M}$ с конечным числом образующих (A—коммутативное кольцо с единицей) обобщаются некоторые теоретико-кольцевые понятия. Например, радикал $\rho(\mathfrak{M})$ модуля $\mathfrak{M}$ определяется как пересечение его максимальных подмодулей. Радикал $\rho(\mathfrak{M})$ совпадает также с пересечением всех максимальных подмодулей

вида $M\mathfrak{M}$, где M — максимальный идеал кольца A, содержащий идеал 0: $\mathfrak{M}$. A-модуль $\mathfrak{M}$ называется локальным A-модулем, если его нельзя представить в виде объединения его собственных подмодулей. Локальный A-модуль $\mathfrak{M}$ однороден, обладает единственным максимальным подмодулем и идеал 0: $\mathfrak{M}$ содержится лишь в одном максимальном идеале M кольца A. Сумма всех локальных подмодулей A-модуля $\mathfrak{M}$ называется гиперцоколем модуля $\mathfrak{M}$. Гиперцоколь содержит цоколь, т. е. сумму всех простых подмодулей A-модуля $\mathfrak{M}$.

Подмодуль $\mathfrak{N}$ модуля $\mathfrak{M}$ называется вполне неприводимым, если его нельзя представить в виде пересечения некоторой совокупности подмодулей A-модуля $\mathfrak{M}$, отличных от $\mathfrak{N}$. Нулевой подмодуль 0 вполне неприводим тогда и только тогда, когда: а) он является примальным подмодулем (в смысле Фукса) и его дополнением служит максимальный идеал M кольца A; б) подмодуль 0: M однороден и отличен от 0; в) для произвольного отличного от нуля элемента $u \in \mathfrak{M}$ $0 : Mu \neq 0 : Au$. Модуль $\mathfrak{M}$ будет простым A-модулем, если: 1) $\mathfrak{M}$ — однородный A-модуль; 2) нулевой подмодуль 0 вполне неприводим; 3) идеал 0: $\mathfrak{M}$ полупрост.

Для нетеровых A-модулей доказывается, что A-модуль $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда совпадает со своим гиперцоколем, когда фактор-кольцо $A / 0 : \mathfrak{M}$ разлагается в прямую сумму конечного числа нетеровых локальных колец. Приводятся некоторые характеристические свойства вполне неприводимых подмодулей A-модуля $\mathfrak{M}$, а также несколько условий, эквивалентных утверждению, что A-модуль $\mathfrak{M}$ совпадает со своим цоколем.

В конце, в качестве следствий из полученных результатов, приводится ряд простых утверждений об абелевых группах. Никаких доказательств работа не содержит.

Е. Г. Шульгейфер

7195. О полупростоте системной алгебры, Оганесян В. А., Докл. АН АрмССР, 1955, 21, № 4, 145—147 (рез. арм.)

Доказывается, что алгебра конечной полугруппы R над полем с характеристикой, равной нулю, если все идемпотенты полугруппы R перестановочны между собой и для каждого элемента $x \in R$ существует такой элемент $y \in R$, что $xyx = x$.

Е. С. Ляпин

7196. О фундаментальной лемме о слабо нормальных кольцах. Накаяма (On a fundamental lemma of weakly normal rings. Nakayama T.), Proc. Japan. Acad., 1953, 29, 191—193 (англ.)

Подкольцо S кольца R называется слабо нормальным в R, если кольцо всех эндоморфизмов кольца R, перестановочных с правыми умножениями на элементы из S, порождается левыми умножениями и семейством левых R-полулинейных преобразований Доказывается следующая теорема (и некоторое ее более сложное обобщение): Пусть R — простое кольцо, удовлетворяющее условию минимальности, S — слабо нормальное, полупростое подкольцо кольца R, содержащее единицу кольца R и удовлетворяющее условию минимальности. Тогда R — полупросто как модуль под кольцом эндоморфизмов, порожденным правыми умножениями на элементы из S и левыми умножениям на элементы из R. Случай, когда кольцо S просто, был рассмотрен автором ранее (Ann. Math., 1952 (2), 55, 538—551) и был успешно использован для завершения теории Галуа для простых колец (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, 276—292).

G. Hochschild

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 281.

7197. Заметка о некоторых свойствах конечных колец. Леджер (A note on some properties of finite rings. Leger George F., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 968—969 (англ.)

Доказывается, что система всех двусторонних идеалов конечного ассоциативного нильпотентного кольца R тогда и только тогда состоит лишь из идеалов $R, R^2, \ldots, R^k = (0)$, когда кольцо R изоморфно кольцу $ZI[Z] / (f(Z), Z^k)$, где I — кольцо целых чисел, а многочлен $f(Z)$ имеет вид $f(Z) = pZ - \sum_{i=2}^{k-1} a_i Z^i$, где p — простое число и $0 \leqslant a_i < p$. В этом случае число элементов кольца R равно p^{k-1} и каждое из следующих свойств вытекает из предшествующего: 1) $R^2 = pR$, 2) аддитивная группа кольца R является циклической группой, 3) $R \simeq pI / p^k I$.

Далее доказано, что если в конечном ассоциативном кольце R с единицей и с ненулевым радикалом N система всех идеалов исчерпывается идеалами $R, pR, \ldots, p^k R = (0)$, где p — некоторое простое число, и каждый идеал радикала N является идеалом во всем кольце R, то кольцо R изоморфно кольцу $I / p^k I$.

Е. Г. Шульгейфер

7198. О строении алгебраических алгебр и некоторых колец. Левицкий (On the structure of algebraic algebras and related rings. Levitzki Jakob), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, № 3, 384—409 (англ.)

Кольцо называется p-кольцом, если оно не содержит нильпотентных элементов и является кольцом Цорна, т. е. в каждом его правом (или левом) не нильидеале содержится идемпотент. Полное кольцо матриц некоторого конечного порядка n над p-кольцом называется матричным кольцом порядка n. Доказано, что порядок матричного кольца инвариантен, т. е. что изоморфные матричные кольца (вообще говоря, над различными p-кольцами) имеют один и тот же порядок.

Кольцо S называется слабо приводимым, если каждый идеал A фактор-кольца $\overline{S} = S/N$ кольца S по его максимальному нильидеалу N содержит матричный идеал (т. е. идеал, являющийся матричным кольцом). В этом случае, кольцо $\overline{S}$ оказывается полупростым кольцом Цорна, разлагающимся в подпрямую сумму матричных колец. Это кольцо примитивно тогда и только тогда, когда оно изоморфно полному кольцу матриц над телом. Слабо приводимыми кольцами являются, например (кроме p-колец), полупростые кольца Цорна, индексы нильпотентных элементов которых ограничены в совокупности.

Пусть M — сумма всех матричных идеалов кольца S. Если фактор-кольцо S / M является нилькольцом полупростого кольца S, то кольцо S называется псевдоэлементарным. Псевдоэлементарное кольцо называется однородным, если все его матричные идеалы имеют один и тот же порядок. Однородное псевдоэлементарное кольцо с единицей является матричным кольцом. Псевдоэлементарное кольцо, не содержащее нильпотентных элементов, является p-кольцом. Последовательность идеалов

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_\sigma \subset \cdots \subset A_\tau = S$$

кольца S называется псевдоэлементарной цепью, если для любого непредельного индекса σ фактор-кольцо $A_\sigma / A_{\sigma-1}$ псевдоэлементарно, а для любого предельного σ фактор-кольцо $A_\sigma / \bigcup_{\rho<\sigma} A_\rho$ является максимальным нильидеалом фактор-кольца $S / \bigcup_{\rho<\sigma} A_\rho$. Оказывается, что любое полупростое кольцо, обладающее псевдоэлементарной цепью (в частности, любое псевдоэлементарное кольцо), слабо приводимо.

Кольцо Цорна называется точным, если любое его фактор-кольцо является кольцом Цорна. Оказывается, что полупростое точное кольцо Цорна, индексы нильпотентных элементов которого ограничены в совокупности, обладает конечной псевдоэлементарной цепью, которую можно провести через любой идеал с полупростым фактор-кольцом. Таким образом полупростое точное кольцо Цорна слабо приводимо. Точные кольца

Цорна, являющиеся p-кольцами, совпадают с так называемыми сильно регулярными кольцами (в которых $a \in a^2S$ для любого $a \in S$) или, что то же самое, с подпрямыми суммами тел. Оказывается, что все факторкольца кольца S тогда и только тогда слабо приводимы, когда кольцо S полупросто и обладает псевдоэлементарной цепью, все факторы которой являются точными кольцами Цорна.

В конце работы доказываются некоторые условия локальной конечности алгебраических алгебр, в частности приводится чисто алгебраическое и сравнительно простое доказательство теоремы Капланского о том, что любая алгебраическая алгебра с полиномиальным тождеством локально конечна. Кроме приведенных, работа содержит большое количество других не менее интересных результатов. В. М. Курочкин

7199. О коммутативности некоторых колец. Накаяма (Über die Kommutativität gewisser Ringe. Nakayama Tadasi), Adhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **20**, № 1—2, 20—27 (нем.)

Работа входит в цикл (см., например, РЖМат, 1953, 1100; 1955, 109), посвященный доказательству коммутативности тел и колец, удовлетворяющих тем или иным условиям. Получен следующий результат: Пусть Z — центр тела (или кольца) R. Тогда R коммутативно, если в любом простом расширении $Z[c] = K \supset R$ центра Z можно указать элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, обладающие следующим свойством: Для любого элемента $a \in K$ существует такой элемент $p \in [a, \alpha_1, \ldots, \alpha_r]$, где $[a, \alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ — кольцо, порожденное элементами $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$, и такое натуральное число n (если R кольцо, то требуется, чтобы $n = 1$), что $a^{n+1}p - a^n \in Z$. В. М. Курочкин

7200. Два замечания о коммутативности колец. Херстейн (Two remarks on the commutativity of rings. Herstein I. N.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 411—412 (англ.)

Доказывается следующее обобщение результата автора (РЖМат, 1953, 1101): Если для любых элементов x, y ассоциативного кольца R существует такое натуральное число $n(x, y)$, что $x^{n(x,y)}y = yx^{n(x,y)}$, то идеал, порожденный всеми коммутаторами кольца R, является нильидеалом.

Далее утверждается, что если для любых элементов x, y ассоциативного кольца R существует такой многочлен $p_{x,y}(t)$ с целыми коэффициентами, что $x^2p_{x,y}(x) - x$ коммутирует с y, то кольцо R коммутативно. Доказательство приведено лишь в предположении, что $p_{x,y}(t) = t^{n(x,y)}$, $n \geqslant 0$. Это утверждение является обобщением предыдущих результатов автора (РЖМат, 1953, 105; 1955, 109). А. И. Ширшов

7201. О коммутативности некоторых колец. Мицудо (A note on the commutativity of certain rings. Mitsudo Fujio), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A18**, № 1, 13—14 (англ.)

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, каждый элемент x которого удовлетворяет условию $x^{n(x)} - h(x)x \in Z$, где Z — центр кольца R, $h(x)$ — некоторая функция, значения которой принадлежат конечному подмножеству регулярных элементов центра Z, а $n(x)$ — ограниченные в совокупности натуральные числа. Опираясь на результат Херстейна (РЖМат, 1953, 105) и используя его метод, автор доказывает коммутативность кольца R. А. И. Ширшов

7202. Когомологические классы конечного типа и конечномерные ядра для алгебр Ли. Хокшилд (Cohomology classes of finite type and finite dimensional kernels for Lie algebras. Hochschild G.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 763—778 (англ.)

Пусть K — конечномерная алгебра Ли над полем F характеристики 0, а M — некоторый конечный K-модуль. Класс когомологий $c \in H(K, M)$ называется уничтожаемым, если существует такой конечный K-модуль U, содержащий модуль M, что класс c принадлежит ядру естественного гомоморфизма $H(K, M) \to H(K, U)$. Оказывается, что класс c уничтожаем тогда и только тогда, когда он принадлежит ядру естественного гомоморфизма $H(K, M) \to H(S, M)$, где S — максимальная полупростая подалгебра алгебры K. Отсюда, ввиду того, что $H^2(S, M) = 0$, следует, что любой двумерный класс когомологий уничтожаем. Этот факт был впервые доказан Ивасавой (Iwasawaz K., Japan. J. Math., 1948, **19**, 405—426) для полей любой характеристики. Автор приводит простое доказательство и для любого поля конечной характеристики.

Далее автор вводит понятие класса когомологий конечного типа, которое может рассматриваться как сужение понятия уничтожаемого класса (любой класс конечного типа положительной размерности уничтожается). Оказывается, что конечный тип имеет все классы размерностей не большей двух, а также все трехмерные уничтожаемые классы. Кроме того, если алгебра K разрешима, то любой класс когомологий имеет конечный тип. Однако существуют уничтожаемые классы, не имеющие конечного типа.

Пусть теперь K и M — произвольные алгебры Ли над полем F произвольной характеристики. Напомним, что алгебра называется K-ядром, если задан некоторый гомоморфизм алгебры K в фактор-алгебру дифференцирований алгебры M по идеалу внутренних дифференцирований. Центр N ядра M естественным образом определяется как K-модуль. В группе когомологий $H^3(K, N)$ ядро M определяет некоторый класс когомологий, называемый препятствием. Препятствие равно нулю тогда и только тогда, когда существует алгебра Ли, являющаяся расширением алгебры M посредством алгебры K. Оказывается, что для любой конечномерной алгебры Ли K и любого конечного K-модуля N любой уничтожаемый элемент группы $H^3(K, N)$ является препятствием некоторого конечномерного K-ядра с центром N. Для полей характеристики 0 доказана также и обратная теорема: любое препятствие конечномерного K-ядра уничтожаемо. М. М. Постников

7203. О специальных J-кольцах. Ширшов А. И., Матем. сб., 1956, **38**, № 2, 149—166

Доказано, что Σ-операторное J-кольцо, имеющее не более счетного множества образующих, тогда и только тогда специально, когда оно может быть вложено в Σ-операторное J-кольцо с двумя образующими. Теорема доказывается для колец, в которых выполнимо деление на 2. Если вместо операции $a \circ b = 1/2\,(ab + ba)$ рассматривать операцию $a \times b = ab + ba$, то эта теорема с очевидными изменениями сохраняет силу для колец без элементов второго порядка в аддитивной группе. Л. А. Скорняков

7204. Аналитические лупы. Мальцев А. И., Матем. сб., 1955, **36**, № 3, 569—576

Определения топологической, локальной и аналитической групп переносятся на лупы. Локальная лупа называется альтернативной, если для любого натурального числа n существует такая окрестность G_n ее единицы, что произведение $\Pi_{k=1}^{n} a^{p_k}b^{q_k}$ ассоциативно, когда $a^p,\ b^q \in G_n,\ |p| \leqslant \max |p_k|,\ |q| \leqslant \max |q_k|$. Кольцо (алгебра), каждые два элемента которого порождают подкольцо (подалгебру) Ли, называется бинарно лиевым. Оказывается, что классическое соответствие между группами и алгебрами Ли в полной мере имеет место и между аналитическими альтернативными лупами и бинарно лиевыми алгебрами.

Антикоммутативное кольцо (т. е. тождественно удов-

летворяющее соотношению $x^2 = 0$) называется муфанг-лиевым, если в нем тождественно удовлетворяется соотношение

$$(x, y)(xz) = [(xy)z]x + [(yz)x]x + [(zx)x]y.$$

Доказывается, что любая альтернативная алгебра является относительно операции $a \circ b = ab - ba$ муфанг-лиевой алгеброй. С другой стороны, любое муфанг-лиево кольцо, характеристика которого взаимно проста с 6, бинарно лиево. Однако существуют бинарно лиевы кольца, не являющиеся муфанг-лиевыми, и муфанг-лиевы кольца, не являющиеся лиевыми.

Локальная альтернативная лупа называется локальной лупой Муфанг, если все элементы некоторой окрестности единицы удовлетворяют соотношению $(xy)\cdot(zx)=(x(yz))x$. Доказывается, что локальной аналитической лупе Муфанг соответствует муфанг-лиева алгебра. М. М. Постников

7205. Об u-устойчивых коммутативных алгебрах с ассоциативными степенями. Кокорис (On u-stable commutative power-associative algebras. Kokoris L. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 702—704 (англ.)

Алгебра B называется алгеброй с ассоциативными степенями, если для любых натуральных чисел m, n $x^{m+n} = x^m x^n$ для каждого элемента $x \in B$. Если характеристика коммутативной алгебры A с ассоциативными степенями отлична от 2 и 3, то для любого идемпонента аддитивная группа алгебры A разлагается в прямую сумму $\Sigma_{i=0}^{2} A_u(i/2)$, где $A_u(\lambda)$ состоит из элементов $x \in A$, для которых $xu = \lambda u$. Алгебра A называется u-устойчивой, если $A_u(\lambda) A_u(1/2) \subset A_u(1/2)$ для $\lambda = 0,1$, и устойчивой, если она u-устойчива для всех идемпонентов u. Коммутативная алгебра, в которой тождественно выполняется равенство $(x^2y)x = x^2(yx)$ называется J-алгеброй. Используя результаты и часть доказательств работы Алберта (РЖМат, 1954, 1110), автор доказывает, что u-устойчивая простая коммутативная алгебра с ассоциативными степенями размерности 2 над ее центром характеристики 0 является J-алгеброй (и, следовательно, устойчива). O. Hájek

7206. Кольца с ассоциативными степенями характеристики два. Кокорис (Power-associative rings of characteristic two. Kokoris L. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 5, 705—710 (англ.)

Находятся условия ассоциативности степеней коммутативных колец и алгебр в случае характеристики 2, исключенной в предыдущих работах Алберта (Albert A. A., Summa Bras. Math., 1948, 2, 21—33) и автора (РЖМат, 1956, 1144; реф. 7205).

Доказано, что коммутативное кольцо K характеристики 2 является кольцом с ассоциативными степенями, если $(x^2y)y = (y^2x)x$ и $(x^{2^{n-1}})^2 = x^{2^n}$, для любых элементов x, $y \in K$ и любого натурального n.

Коммутативная алгебра над непростым полем характеристики 2 будет алгеброй с ассоциативными степенями, если $(x^{2^{n-1}})^2 = x^{2^n}$ для любого ее элемента x и любого натурального числа n. Любая алгебра над таким полем является алгеброй с ассоциативными степенями.

Ассоциативность степеней выше седьмой доказывается без труда; случай степеней, сумма показателей которых равна 2^n, более труден. Указан пример коммутативной алгебры над непростым полем характеристики 2, у которой ассоциативны все степени, кроме содержащих 2^n множителей (где n — данное число). O. Hájek

7207. Дополнимые полукольца. Боччони (Semianelli complementarizzabili. Boccioni Domenico), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1955, 24, № 2, 474—509 (итал.)

Псевдокольцом называется множество с двумя однозначными ассоциативными операциями (сложением и умножением), связанными дистрибутивным законом, причем сложение предполагается коммутативным. Псевдокольцо называется полукольцом, если для любых его элементов a, x, y из $a + x = a + y$ следует, что $x = y$. Элемент a, псевдокольца S называется сократимым, если для любых элементов x, $y \in S$ из $ax = ay$ или $xa = ya$ следует, что $x = y$. Пусть M^* — множество всех сократимых элементов полукольца S и M — содержащаяся в M^* мультипликативная подполугруппа полукольца S. Кольцо $\mathfrak{A} \subset S$ называется дополнительным слева для полукольца S относительно M, если 1) кольцо $\mathfrak{A}$ содержит единицу, 2) для любого элемента $\alpha \in M$ существует обратный элемент $\alpha^{-1} \in \mathfrak{A}$, 3) всякий элемент $x \in \mathfrak{A}$ представим в виде $x = \gamma^{-1}(a - b)$, где $\gamma \in M$, $a, b \in S$. Доказано, что дополнительное кольцо $\mathfrak{A}$ существует тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in S$, $\gamma \in M$ существуют такие элементы $a_1, b_1 \in S$, $\gamma_1 \in M$, что $\gamma_1 a + b_1\gamma = \gamma_1 b + a_1\gamma$. С точностью до изоморфизма дополнительное слева кольцо определяется однозначно. Его можно определить как минимальное подкольцо полукольца S, удовлетворяющее условиям 1)—2). В качестве следствия из этой теоремы вытекает условие Асано (Asano K., J. Math. Soc. Japan, 1949, 1, 73—78) для существования кольца левых частных некоторого кольца относительно его произвольной подполугруппы, не содержащей делителей нуля.

В заключение автор, используя известные результаты о погружении полугрупп (Murata K., Osaka Math. J., 1950, 2, 1—5), изучает расширения псевдоколец. Л. М. Глускин

7208. Специализации над разностными полями. Кон (Specializations over difference fields. Cohn Richard M.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 12 (англ.)

Пусть $F\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ и $F\langle\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n\rangle$ — два расширения разностного поля F. Говорят, что элементы $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n$ образуют специализацию элементов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, если существует гомоморфизм разностного кольца $F[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ на разностное кольцо $F[\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n]$, переводящий γ_i в $\bar{\gamma}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и оставляющий неподвижными все элементы поля F. Пусть в расширении $F\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_r\rangle$ поля F элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ разностно трансцендентны над F. Утверждается, что тогда существует такой разностный многочлен $P(y_1, \ldots, y_q)$ над полем F, что любая специализация $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q$ элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, для которой $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \neq 0$, может быть расширена до специализации $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q$, $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_r$ элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, $\beta_1, \ldots, \beta_r$, если только существует расширение поля F, содержащее подполя, разностно изоморфные с полями $F\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_r\rangle$ и $F\langle\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q\rangle$. Указывается, что последнее условие не может быть опущено. Доказательств заметка не содержит. В. М. Глушков

7209. К теории расширений Пикара — Вессио. Эпстейн (On the theory of Picard—Vessiot extensions. Epstein Marvin P.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 528—547 (англ.)

Реферируемая работа посвящена обобщению теории, построенной ранее Колчиным (Kolchin E. R., Ann. Math., 1948, 49, 1—42).

Дифференциальное поле G с полем констант D, содержащее дифференциальное поле F с полем констант C, называется расширением Пикара—Вессио поля F, если D является нормальным алгебраическим расширением

поля C (у Колчина $C=D$), и, кроме того, $G=F(\eta_1,\ldots,\eta_n)$, где $(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ — фундаментальная система нулей некоторого линейного дифференциального полинома над F. В этом случае группа $\mathfrak{G}$ автоморфизмов поля G над полем F естественно изоморфна некоторой алгебраической группе $d(\mathfrak{G})$ квадратных матриц порядка mn над полем C, где m — степень поля D над C, а группа $\mathfrak{G}'$ автоморфизмов поля G над полем $F(D)$ естественно изоморфна некоторой алгебраической группе $d(\mathfrak{G}')$ квадратных матриц порядка n над полем D. При этом $\dim c(\mathfrak{G}) = m\dim d(\mathfrak{G}')$, $\dim d(\mathfrak{G}') = r$, где r — степень трансцендентности поля G над F.

Для любого дифференциального подполя $H\subset G$, содержащего поле F, рассмотрим подгруппу $\mathfrak{H}\subset\mathfrak{G}$, оставляющую неподвижными все элементы из H. Если подполе H содержит все элементы поля G, инвариантные относительно автоморфизмов из $\mathfrak{H}$, то H называется стационарным подполем, а $\mathfrak{H}$ — соответствующей ему подгруппой. Всякая подгруппа $\mathfrak{H}$, соответствующая стационарному подполю H, индуцирует некоторую топологию поля G. В этой топологии замкнутыми подполями являются все стационарные подполя, содержащие подполе H, и только эти подполя. Доказывается, что любое дифференциальное подполе K, содержащее некоторое стационарное подполе H, в свою очередь содержится в стационарном дифференциальном подполе, являющемся конечным алгебраическим расширением поля K.

Более подробно рассматриваются топологии T и T', индуцируемые в поле G группами $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ соответственно. Оказывается, что подгруппами, соответствующими дифференциальным подполям, замкнутым в топологии T', будут те и только те подгруппы и группы $\mathfrak{G}'$, образы которых в группе $d(\mathfrak{G}')$ являются алгебраическими подгруппами. Соответствующее утверждение для топологии T места не имеет. Для характеристики подгрупп, соответствующих всем замкнутым в топологии T дифференциальным подполям, вводится специальное понятие D-алгебраичных подгрупп группы $c(\mathfrak{G})$.

Если поле констант поля G алгебраически замкнуто, то в топологии T замкнуты все дифференциальные подполя, содержащие поле F. В. М. Глушков

7210. Дистрибутивные подструктуры дедекиндовых структур. Йоунссон (Distributive sublattices of a modular lattice. Jònsson B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 682—688 (англ.)

Доказано, что непустое подмножество X дедекиндовой структуры A тогда и только тогда порождает в A дистрибутивную подструктуру, когда

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\prod_{j=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i\prod_{j=1}^{n} y_j\right) \qquad (1)$$

для любых элементов x_i, $y_j\in X$.

Если множество X состоит из 3 (или 4) элементов, то это условие можно заменить более простыми. Например, если $X=\{x,y,z\}$, то условие (1) равносильно соотношению $(x+y)z = xz+yz$ (это известный результат Ope (Ore O., Ann. Math., 1935, **36**, 415—416)). Далее, множество X, являющееся объединением конечного числа непустых линейно упорядоченных подмножеств X_i структуры A, тогда и только тогда порождает в A дистрибутивную подструктуру, когда при любом выборе элементов $x_i\in X_i$ $(i=1,2,\ldots,p)$ подструктура, порожденная множеством $\{x_1,x_2,\ldots,x_p\}$, дистрибутивна. Наконец, если $X=B\cup C$, где B, C — дистрибутивные подструктуры структуры A, то условие (1) можно заменить следующими условиями: $(b_1+b_2)c = b_1c+b_2c$ и $(c_1+c_2)b = c_1b+c_2b$, где $b_1,b_2,b\in B$; $c_1,c_2,c\in C$. Václav Wilhelm

7211. О метрических структурах. Якубик (O metrických sväzoch. Jakubík Ján), Mat.-fis. časop., 1955, 5, № 3, 140—143 (словац.; рез. русс.)

Метрической структурой называется структура S, на которой определена такая вещественная функция $v(x)$ что $v(x)+v(y) = v(x\cap y)+v(x\cup y)$ и $v(x)>v(y)$, если $x<y$, для любых элементов x, y. Метрическая структура S является относительно метрики $\partial(x,y) = v(x\cup y) - v(x\cap y)$ метрическим пространством. Обозначим это метрическое пространство через $M(S)$.

В реферируемой работе показано, что $M(S) = M(S')$ тогда и только тогда, когда существуют также структуры A и B, что $S\simeq\tilde{A}\times B$, $S'\simeq\tilde{A}\times B$, где $\tilde{A}$ — структура дуальная к структуре A, причем эти изоморфизмы осуществляются одним и тем же отображением (следует иметь в виду, что структуры S и S', а также структуры $A\times B$ и $\tilde{A}\times B$, состоят из одних и тех же элементов). Пусть метрическая структура S разложена в кардинальное произведение неразложимых структур S_α. Тогда любая структура S', для которой $M(S') = M(S)$, тогда и только тогда изоморфна структуре S, когда все множители S_α сами себе дуальны. M. Kolibiar

7212. Стоновская топология для бинарных отношений. Блэр (Stone's topology for a binary relation. Blair R. L.), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 271—280 (англ.)

Рассматривается конструкция, обобщающая известный способ введения топологии во множество максимальных идеалов булевой алгебры. Пусть L — множество, на котором определено бинарное отношение R. Для любого подмножества $M\subset L$ через M^- (соответственно M^+) обозначается множество таких элементов $x\in L$, что xRy (соответственно yRx) для каждого $y\in M$. Множество $e(M) = M^{-+}$ называется замыканием множества M. Элемент x называется строго неприводимым, если $yR'x$ для любого $y\in L$, где R' — дополнение отношения R, и для любого множества E из двух элементов a и b из $E^-\subset\{x\}^-$ следует, что или aRx, или bRx.

Доказывается, что если отношение R транзитивно, то на множестве, состоящем из строго неприводимых элементов, операция замыкания обладает следующими свойствами. 1) $M\subset e(M)$; 2) $e(M)=ee(M)$; 3) $e(M)\cup e(N) = e(M\cup N)$; 4) замыкание пустого множества пусто.

Более подробно разбирается случай, когда множество L является структурой, а отношение R — отношением «следует за». В этом случае топология во множестве строго независимых элементов является T_0-топологией. Ю. А. Шрейдер

7213. Тождества и однозначность подпрямого представления в классах универсальных алгебр. Фостер (The identities of — and unique subdirect factorization within — classes of universal algebras. Foster Alfred L.), Math. Z., 1955, 62, № 2, 171—188 (англ.)

Универсальная алгебра $\mathfrak{P} = (P, o\ldots)$ с примитивными операциями $o,\ldots$, определенными на множестве P, называется примитивной, если она функционально строго полна (РЖМат, 1955,637) и порядок ее >1. Об универсальных алгебрах говорят, что они имеют один и тот же род Sp, если на них определена одна и та же система Sp примитивных операций. Выражением $\Phi(\xi,\ldots)$ рода Sp называется конечное множество символов $\xi,\eta,\ldots$, связанных примитивными операциями данного рода. Два выражения Φ и Ψ рода Sp называются конгруэнтными на данной алгебре $\mathfrak{A}$ того же рода Sp, если они на алгебре $\mathfrak{A}$ тождественны (обозначение: $\Phi = \Psi(\mathfrak{A})$). Класс универсальных алгебр $\tilde{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}$ данного рода Sp называется строго независимым, если, какова бы ни была система выражений $\{\Phi_i\}$ рода Sp, существует по крайней мере одно такое выражение X, что $\Phi_i = X(\mathfrak{A}_i)$ для каждого i. Если каждая алгебра $\mathfrak{A}_i$ класса $\tilde{\mathfrak{A}}$ отлична

от одноэлементной алгебры $\overset{\circ}{|}$, то строго независимый класс универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ конечен.

Универсальная алгебра $\mathfrak{A} = (A, o \ldots)$ называется строго f-алгеброй, если существуют такие бинарная строгая $\mathfrak{A}$-функция $\times$ и две монарные строгие $\mathfrak{A}$-функции $\cap$ и $\cup$, что $(A, \times, \cap, \cup)$ является f-алгеброй (РЖМат, 1955, 637, 3656). Отмечается, что каждая примитивная алгебра является строгой f-алгеброй. Класс алгебр $\{\mathfrak{A}_i\}$ одного рода Sp называется строго кообрамленным, если существуют три таких выражения $\times$, $\cap$, $\cup$ рода Sp, что $(A_i, \times, \cap, \cup)$ является f-алгеброй для каждого i. Изучаются связи между строго кообрамленными и строго независимыми классами универсальных алгебр.

Примитивным пучком данного рода Sp называется класс примитивных алгебр одного и того же рода Sp, каждое конечное подмножество которого строго независимо. Примитивными пучками является класс $\tilde{\mathfrak{F}} = \{\tilde{\mathfrak{F}}_n\}$ всех n-колец, $n = 2, 3, \ldots$, класс всех алгебр Понса $\tilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{p}\}$, $n = 2, 3, \ldots$, и объединение этих классов $\{\tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\mathfrak{P}}\}$ (после отождествления изоморфных алгебр $\mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{P}_2$).

Алгебра $\mathfrak{A}$ имеет прямое представление в алгебрах $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ того же рода, если $\mathfrak{A}$ изоморфна прямому произведению прямых степеней алгебр $\mathfrak{A}_i$ (прямые степени алгебр $\mathfrak{A}_i$ могут быть как конечные, так и бесконечные; под нулевой прямой степенью универсальной алгебры подразумевается одноэлементная алгебра $\overset{\circ}{|}$). Аналогично определяется подпрямое представление алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебрах $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, , \ldots, \mathfrak{A}_n$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ прямо или подпрямо представима в алгебрах $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, но не представима ни в каком собственном подмножестве этих алгебр, то алгебры $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ называются соответственно прямыми или подпрямыми множителями алгебры $\mathfrak{A}$. Используя результаты своих предыдущих работ (РЖМат, 1955, 637, 3656), автор доказывает, что алгебра $\mathfrak{P}$ произвольного рода Sp тогда и только тогда подпрямо представима в примитивных алгебрах $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ некоторого примитивного пучка $\tilde{\mathfrak{P}}$ алгебр рода Sp, когда $\mathfrak{P}$ удовлетворяет всем строгим тождествам, общим для алгебр $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$, или, что то же самое, когда $\mathfrak{P}$ удовлетворяет всем строгим тождествам прямого произведения $\mathfrak{P}_1 \times \ldots \times \mathfrak{P}_n$. Подпрямые множители в примитивном пучке определяются однозначно, т. е. если алгебра $\mathfrak{P}$ подпрямо представима в алгебрах примитивного пучка $\tilde{\mathfrak{P}}$ и если $\mathfrak{P} \neq \overset{\circ}{|}$, то $\mathfrak{P}$ обладает единственной системой подпрямых множителей, принадлежащих пучку $\tilde{\mathfrak{P}}$. Оказывается далее, что алгебра $\mathfrak{P} \neq \overset{\circ}{|}$, подпрямо представимая в примитивном пучке $\tilde{\mathfrak{P}}$, в действительности изоморфна прямому произведению подпрямых степеней конечного числа алгебр $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$, принадлежащих пучку $\tilde{\mathfrak{P}}$. Если алгебра $\mathfrak{P}$ конечна, отлична от $\overset{\circ}{|}$ и подпрямо представима в примитивном пучке $\tilde{\mathfrak{P}}$, то ее подпрямые множители $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ являются прямыми множителями, т. е. алгебра $\mathfrak{P}$ изоморфна прямому произведению прямых степеней алгебр $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{O}$ через $\mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}\}$ обозначается множество всех строгих тождеств, которым она удовлетворяет. Алгебра $\mathfrak{O}_1$ некоторого рода Sp называется насыщенной относительно алгебры $\mathfrak{O}_2$, если $\mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}_1\} \subset \mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}_2\}$ и для любой алгебры $\mathfrak{X}$ рода Sp из $\mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}_1\} \subseteq \mathrm{Id}\,\{\mathfrak{X}\} \subseteq \mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}_2\}$ следует, что либо $\mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}_1\} = \mathrm{Id}\,\{\mathfrak{X}\}$, либо $\mathrm{Id}\,\{\mathfrak{X}\} = \mathrm{Id}\,\{\mathfrak{O}_2\}$. В качестве обобщения теоремы 12.1 предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 3656) доказывается следующее утверждение: Для любого строго независимого множества примитивных алгебр $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ в последовательности

$$\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \ldots \times \mathfrak{P}_n,\ \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \ldots \times \mathfrak{P}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1, \overset{\circ}{|}$$

каждая алгебра насыщена относительно следующей.

Е. Г. Шульгейфер

7214. О перестановочных разложениях. Ш и к (Über Charakterisierung kommutativer Zerlegungen. Š i k F r a n t i š e k, S p i s y vyd. přírodovědě fakult Masarykovy univ., 1954, № 3, 97—102 (нем.; рез. русс).

Бинарное отношение τ на множестве G называется разложением (множества G) ,если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Произведением $\tau\xi$ отношений τ и ξ называется отношение, определяемое условием: $a\,(\tau\xi)\,b$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $c \in G$, что $a\tau c\xi b$. Два разложения τ и ξ называются перестановочными, если $\tau\xi = \xi\tau$.

Доказано, что два разложения τ и ξ перестановочны тогда и только тогда, когда отношение $\tau\xi$ является разложением. Если для некоторого разложения τ множество $\mathfrak{N}$ всех подстановок α, для которых $a\tau a\alpha$ при любом $a \in G$ является группой, то τ является разложением в системы транзитивности относительно группы $\mathfrak{N}$. Доказаны и другие теоремы такого же характера.

Ю. И. Соркин

7215. Брауэрова геометрия. Н о р д х а у с, Л а п и д у с (Brouwerian geometry. N o r d h a u s E. A., L a p i d u s L e o), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 217—229 (англ.)

Брауэровой алгеброй называется структура с нулем и единицей, в которой для каждой пары элементов a и b среди элементов x, удовлетворяющих условию $b + x > a$, существует наименьший. Этот наименьший элемент обозначается через $a - b$. В брауэровой алгебре симметрическая разность $a*b = (a-b) + (b-a)$ является метрической операцией. Брауэрова алгебра, автометризованная симметрической разностью, называется брауэровой геометрией. Брауэрова геометрия тогда и только тогда является булевой геометрией, когда она свободна от равнобедренных треугольников. Брауэрова алгебра тогда и только тогда является булевой алгеброй, когда она является группой относительно симметрической разности. Брауэрова геометрия тогда и только тогда является цепью, когда все ее треугольники равнобедренные.

Упорядоченное множество $n \geqslant 3$ попарно различных элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ брауэровой геометрии называется равносторонним n-угольником, если $a_1*a_2 = a_2*a_3 = \ldots = a_{n-1}*a_n = a_n*a_1$. Брауэрова геометрия не содержит равносторонних n-угольников для нечетных n.

Если x, y, z — стороны данного треугольника, то треугольник с вершинами x, y, z называется первым треугольником расстояний; треугольник с вершинами, являющимися сторонами первого треугольника расстояний, называется вторым треугольником расстояний. В брауэровой геометрии любая вершина второго треугольника расстояний совпадает с противоположной стороной. Брауэрова геометрия тогда и только тогда является булевой геометрией, когда этим свойством обладают первые треугольники расстояний.

Подмножество автометризованной структуры называется подгеометрией, если расстояние (симметрическая разность) каждой пары его точек принадлежит этому подмножеству. Подгеометрия, порожденная двумя (сравнимыми) элементами брауэровой геометрии, содержит самое большее девять элементов (шесть, если данные элементы сравнимы). Автометризуемая струк-

тура называется симметричной, если расстояние между каждыми двумя ее элементами равно расстоянию между их суммой и произведением. Симметричная автометризуемая структура, не содержащая равнобедренных треугольников, дистрибутивна. В автометризованной структуре L элемент b находится метрически между элементами a и c, если $d(a, b) + d(b, c) = d(a, c)$. Если элемент b находится метрически между элементами a и b, а элемент x находится метрически между элементами a и b, то элемент x находится метрически между элементами a и c. Метрическое и структурное «между» совпадают тогда и только тогда, когда: 1) из того, что элемент b находится метрически между элементами a и c, а элемент x находится метрически между элементами a и b, следует, что элемент b находится метрически между элементами x и c; 2) структура L симметрична; 3) из $a<b<c$ следует, что элемент b находится метрически между a и c. В частности, метрическое и структурное «между» совпадают в булевой геометрии. Автометризованная структура с единицей тогда и только тогда является булевой алгеброй, когда она регулярна и метрическое и структурное «между» совпадают. Структура с единицей тогда и только тогда является булевой алгеброй, когда она допускает метризацию, относительно которой является пространством постоянной ширины, в котором метрическое и структурное «между» совпадают. Брауэрова геометрия тогда и только тогда является булевой геометрией, когда ее группа движений просто транзитивна.

Метрическое пространство S имеет порядок конгруэнтности $\leqslant k$ по отношению к классу пространств M, содержащему S, если любое конгруэнтное (изометричное) вложение k точек некоторого пространства класса M индуцируется конгруэнтным вложением всего пространства в S. Если операция расстояния автометризованного пространства является групповой, то порядок конгруэнтности его относительно класса метризованных в нем пространств равен трем. Брауэрова геометрия является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда ее порядок конгруэнтности относительно класса метризованных в ней пространств равен трем. Порядок конгруэнтности брауэровой цепи по отношению к классу метризованных в ней пространств равен четырем.

В заключение формулируются три нерешенные проблемы. А. Х. Лившиц

7216 Д. **Структура непрерывных колец. Эрлик** (The structure of continuous rings. Ehrlich Gertrude), Thesis University of Tennessee, 1953, VII + 81 p. (англ.)

Резюме этой диссертации было опубликовано в Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, 138—139. Автор рассматривает кольцо R, являющееся регулярным кольцом Неймана проективной или непрерывной геометрии, а также группу G, состоящую из элементов кольца R, обладающих обратными в R. Показывается, что элементы класса 2 (т. е. имеющие вид $s = 1 + n$, где $n^2 = 0$) могут быть охарактеризованы с помощью группы G, и отсюда выводится, что группа G_1 изоморфна группе G_2 тогда и только тогда, когда кольцо R_1 изоморфно или антиизоморфно кольцу R_2. Более того, оказывается, что любой изоморфизм группы G_1 на группу G_2 является композицией изоморфизма индуцированного некоторым однозначно определенным изоморфизмом или антиизоморфизмом кольца R_1 на кольцо R_2 и некоторого автоморфизма группы G_2.

Это частичное обобщение аналогичных теорем, доказанных Бэром для случая, когда R — кольцо линейных отображений векторного пространства над телом в себя. Автор весьма точно следует методу Бэра (Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955, гл. VI), но используя теоремы Неймана, ведет изложение в терминах свободных векторов. Формулируется задача получения результатов, охватывающих как случай Бэра, так и случай рассматриваемый автором. На самом же деле утверждения автора с незначительной модификацией включают случай Бэра. I. Halperin

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 930.

7217 Д. **О неприводимых представлениях алгебр. Джанс** (On the indecomposable representations of algebras. Jans James Patrick.— Doct. diss. Univ. Michigan, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, 15, № 5, 839 (англ.)

Автореферат докторской диссертации. Рассматриваются алгебры над алгебраически замкнутым полем. Алгебра, обладающая конечным числом неэквивалентных неприводимых представлений, называется алгеброй с конечным числом представлений; алгебра, обладающая бесконечным числом неэквивалентных неприводимых представлений фиксированной степени для бесконечного числа различных степеней представления, называется алгеброй со строго неограниченным числом представлений. Приводится ряд условий, налагаемых на структуру двусторонних идеалов алгебры A, достаточных для того, чтобы A была алгеброй со строго неограниченным числом представлений. Е. Г. Шульгейфер

См. также: 7080, 7081, 7086, 7673—7679, 7681. 7696—7701, 7704

ТОПОЛОГИЯ

7218. **Непрерывная сходимость в общих топологических пространствах. Шефер** (Stetige Konvergenz in allgemeinen topologischen Räumen. Schaefer Helmut), Arch. Math., 1955, 6, № 6, 423—427 (нем.)

Последовательность функций u_n сходится равномерно в точке x_0, если ко всякому $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N = N(x_0, \varepsilon)$ и окрестность U точки x_0, удовлетворяющие условию: $\rho(u_n(x), u_m(x)) < \varepsilon$ для $n, m > N$ и всех $x \in U$. Если, кроме того, $\lim_{n\to\infty} \sigma(u_n, x_0) = 0$, где $\sigma(u_n, x_0)$ — колебание функции u_n в точке x_0, то сходимость называется непрерывной. Дается несколько эквивалентных форм этого определения и оно исследуется в случаях, когда область определения функций u_n есть компактное, соответственно локально компактное пространство, а область значений функций—метрическое пространство. Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы семейство функций было (в обычном смысле) нормальным. П. С. Александров

7219. **Об отношениях между структурами конечных равномерных покрытий метрического пространства и его равномерной топологией. Нагата** (On relations between lattices of finite uniform coverings of a metric space and the uniform topology of the space. Nagata Jun-iti), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1953, A4, № 1, 35—41 (англ.)

Доказывается, что полное метрическое пространство R с точностью до равномерного гомеоморфизма характеризуется алгебраическими свойствами некоторой структуры $L(R)$, по определению состоящей из конечных открытых покрытий пространства R, удовлетворяющих

следующим условиям: а) если $\alpha \in L(R)$ и $\beta \in L(R)$, то и $\alpha \wedge \beta \in L(R)$. (где $\alpha \wedge \beta$ — покрытие, состоящее из всевозможных попарных пересечений $H \cap G$, $H \in \alpha$, $G \in \beta$); б) в любое открытое конечное покрытие пространства R можно вписать покрытие $\alpha \in L(R)$; в) к любым двум непересекающимся открытым множествам H и G, где G непусто, можно подобрать такое покрытие $\alpha \in L(R)$, что $H \notin \alpha$, но $G \notin \alpha$.

Теорема 1. Полные метрические пространства X и Y тогда и только тогда равномерно гомеоморфны, когда структуры $L(X)$ и $L(Y)$ изоморфны.

Теорема 2. Для того чтобы пополнения $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ метрических пространств X и Y были равномерно гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы структуры $L(X)$ и $L(Y)$ были изоморфны.

Следствие. Для того чтобы метрические пространства X и Y были равномерно гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы были изоморфны структуры $L_f(X)$ и $L_f(Y)$, по определению состоящие из всех конечных равномерных покрытий пространств и X соответственно Y. Ю. М. Смирнов

7220. О полных метрических пространствах. Нагата (On complete metric space. Nagata Juniti), J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., 1955, A4, № 2, 47—53 (англ.).

Доказывается, что полные метрические пространства с точностью до равномерного гомеоморфизма характеризуются алгебраическими свойствами некоторых структур, состоящих из функций. Равномерной окрестностью автор называет всякую действительную функцию $f(x)$, определенную на метрическом пространстве R, ограниченную снизу некоторым положительным числом и удовлетворяющую условию: для любого натурального числа n из $f(x) \leqslant 1/2n$ и $\rho(x, y) \leqslant 1/2n$ следует $f(y) \leqslant 1/n$. Через $D(R)$ автор обозначает всякое направленное множество D равномерных окрестностей пространства R (с естественным отношением следования: $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ при любом $x \in R$), удовлетворяющее двум условиям: 1) В D существует такая счетная невозрастающая конфинальная последовательность f_n, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv 0$ и что для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in R$ найдется такое $g \in D$, для которого $g(x) < \varepsilon$ и при $\rho(x, y) \geqslant 1/n$ всегда $g(y) \geqslant f_n(y)$. 2) Для любых $f \in D$ и $g \in D$ сумма (в «структурном» смысле) $f \vee g$ также принадлежит D.

Теорема 1. Для того чтобы полные метрические пространства X и Y были равномерно гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы структуры $D(X)$ и $D(Y)$ были изоморфны.

Теорема 4. Если структуры $D(X)$ и $D(Y)$ изоморфны, то пополнения метрических пространств X и Y равномерно гомеоморфны.

Приводится также аналогичная теорема 3, где роль структуры D играет некоторая структура равномерных покрытий, а от пространств X и Y требуется дополнительно, чтобы они не имели изолированных точек. Аналогичные результаты см. в реф. 7219. Ю. М. Смирнов

7221. Заметка об аксиоме отделимости T_5. Инагаки (Une note sur l'axiome (T_5) de séparation. Inagaki Takeshi), Math. J. Okayama Univ., 1955, 5, № 1, 1—3 (франц.)

С помощью двух (эквивалентных) видоизменений аксиомы отделимости T_5 (всякие два отделимые по Хаусдорфу множества имеют непересекающиеся окрестности) доказывается следующее утверждение: Для того чтобы в T_5-пространстве R множество E имело индуктивную размерность $\operatorname{ind} E \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $x \in E$ и для любой ее окрестности $0x$ нашлась такая окрестность $Ux \subseteq 0x$, что $\operatorname{ind}(E \cap \operatorname{Fr}(Ux)) \leqslant n-1$.

Примечание референта. Доказательство этого же утверждения для пространств со счетной базой, без каких бы то ни было видоизменений годное и для T_5-пространств, приведено в книге Гуревича-Воллмена (Теория размерности, 1948, М., Изд-во ин. лит., см. предложение А на стр. 49).

Ю. М. Смирнов

7222. Счетная паракомпактность и проблема Суслина. Рудин (Countable paracompactness and Souslin's problem. Rudin Mary Ellen), Canad. J. Math., 1955, 7, № 4, 543—547 (англ.)

Доказывается весьма неожиданный результат: Если знаменитая проблема Суслина имеет отрицательное решение, то отрицательное решение имеет и следующая проблема Даукера (Dauker C. H., Canad. J. Math., 1951, 3, 219—224): Для всякого ли нормального пространства R в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие (счетная паракомпактность)? Ю. М. Смирнов

7223. О некоторых метризациях пространства компактных множеств. Борсук (On some metrizations of the hyperspace of compact sets. Borsuk K.), Fundam. math., 1955, 41, № 2, 168—202 (англ.)

Рассматривается множество 2^X всех компактов, лежащих в данном метрическом пространстве X. Наряду с обычной хаусдорфовой метрикой отклонений, превращающей это множество в метрическое пространство, называемое автором 2_s^X, рассматривается новая метрика, в которой для любых $\Phi_1 \in 2^X$, $\Phi_2 \in 2^X$ расстоянием является нижняя грань $\rho_c(\Phi_1, \Phi_2)$ тех $\varepsilon > 0$, для которых существуют ε-сдвиги (в смысле референта) компакта Φ_1 в Φ_2 и компакта Φ_2 в Φ_1. Доказывается, что полученное таким образом пространство 2_c^X является топологическим инвариантом пространства X; устанавливаются некоторые другие простые свойства пространства 2_c^X. Показывается, что уже в квадрате существует последовательность локально стягиваемых континуумов (даже одномерных полиэдров), сходящаяся в смысле метрики ρ_c к континууму, который не является локально стягиваемым ни в какой точке.

Для данного метрического пространства A определяется на полупрямой $t \geqslant 0$ неотрицательная функция $\varphi_A(t)$ («модуль стягиваемости»): берется нижняя грань $\mu(t)$ таких $\tau \geqslant t$, что каждое множество $E \subseteq A$ диаметра $\leqslant t$ может быть стянуто в точку в некотором множестве $E' \subseteq A$ диаметра $\leqslant \tau$; если $\mu(t) \leqslant 1$, то полагаем $\varphi_A(t) = \mu(t)$, если же $\mu(t) > 1$, то $\varphi_A(t) = 1$.

Класс непустых метрических пространств A называется равномерно локально стягиваемым, если существует такая определенная на $t \geqslant 0$ непрерывна функция $\varphi(t)$, что для всех пространств A данного класса имеем

$$0 = \varphi(0) \leqslant \varphi_A(t) \leqslant \varphi(t) \text{ (для всех } t \geqslant 0).$$

Пусть M — метрическое пространство (в дальнейшем — компакт). Через 2_0^M обозначается множество всех лежащих в M абсолютных окрестностных ретрактов. Последовательность $A_k \in 2_0^M$ называется гомотопически сходящейся к $A_0 \in 2_0^M$, если она сходится к A_0 в смысле метрики отклонений (т. е. в 2_s^M) и если, кроме того, все A_k равномерно локально стягиваемы. Основным результатом работы является теорема: Если M — конечномерный компакт, то множество 2_0^M может быть превращено в некоторое полное метрическое пространство 2_h^M со счетной базой, сходимость в котором совпадает с

гомотопической сходимостью (определение метрики в 2_h^M см. РЖМат, 1953, 625). Пространство 2_h^M снова является топологическим инвариантом пространства M. Неизвестно, нельзя ли эти результаты распространить на все компакты (и даже на полные метрические пространства). Автор спрашивает далее, не будет ли в случае, когда компакт M является полиэдром, множество всех полиэдров $P \subset M$ плотным в 2_h^M и какова категория этого множества?

П. С. Александров

7224. **О некоторых проблемах Борсука относительно пространства компактных множеств. Грот** (On some problems of Borsuk concerning a hyperspace of compact sets. Groot J. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1956, A59, № 1, 95—103; Indagationes math., 1956, 18, № 1, 95—103 (англ.)

Автор продолжает интересное исследование Борсука о пространствах непустых компактных множеств метрического пространства M со счетной базой (реф. 7223).

Сначала исследуется пространство Борсука 2_c^M всех непустых компактов метрического пространства (со счетной базой) M с метрикой ρ_c (реф. 7223).

В отличие от пространства 2_s^M (реф. 7223), пространство 2_c^M является топологическим инвариантом пространства M и без предположения о его полноте. В предположении полноты пространства M пространство 2_s^M также полно и имеет счетную базу, чего (как показывает простой пример) нельзя сказать о пространстве 2_c^M. Автор доказывает, что даже для плоскости E^2 и квадрата Q^2 пространство Борсука не имеет счетной базы. Однако (теорема II′) подмножество пространства 2_c^M, состоящее из всех абсолютно окрестностных ретрактов, всегда обладает счетной базой. Более того (теорема II), подмножество пространства 2_c^M, состоящее из всех таких компактов, все компоненты которых являются абсолютными окрестностными ретрактами, также всегда обладает счетной базой.

Наконец, автор исследует еще одно пространство Борсука 2_h^M, которое состоит из всех непустых абсолютно окрестностных ретрактов с метрикой

$$\rho_h(X, Y) = \rho_c(X, Y) + \sup_t |\lambda_X(t) - \lambda_Y(t)|,$$

где $\lambda_X(t)$ — специально введенная Борсуком непрерывная функция аргумента t. Оказывается (теорема III), что пространство 2_h^M всегда обладает счетной базой.

Ю. М. Смирнов

7225. **Теорема о полных пространствах и ее применения к исследованию локальной связности. Куратовский К.**, Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 2, 75—80

Теорема о полных пространствах и ее применения к исследованию локальной связности. Куратовский (Un théorème sur les espaces complets et ses applications à l'étude de la connexité locale. Kuratowski Kazimierz), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1955, 3, № 2, 75—80 (франц.)

Доказывается следующая теорема: Пусть X — метрическое пространство, а $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ — последовательность (действительнозначных) непрерывных функций; если всякая фундаментальная последовательность $\{x_i\}$, $x_i \in X$, удовлетворяющая условию $\sup |f_n(x_i)| < \infty$ при любом n_i сходится, то X гомеоморфно полному метрическому пространству с метрикой

$$\rho(x, y) = r(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}$$

где $r(x, y)$ — старая метрика пространства X.

Эта теорема прилагается к задаче полной метризации пространств $lc^n(Y)$, $LC^n(Y)$ всех замкнутых локально связных в размерности $\leqslant n$ в гомологическом (соответственно в гомотопическом) смысле замкнутых подмножеств данного компактного метрического пространства Y. Предельные соотношения (регулярная сходимость) в $lc^n(Y)$ были установлены Вайбурном (Whyburn G. T., Fundam. math., 1935, 25, 408—426), а в $LC^n(Y)$ — Куртисом (Curtis M. L., Ann. Math., 1935, 57, 231—243). Бигль показал, что $lc^n(Y)$ гомеоморфно полному метрическому пространству (Begle E. G., Duke Math. J., 1944, 11, 441—450). С помощью вышеприведенной теоремы автор строит полную метрику как в $lc^n(Y)$, так и в $LC^n(Y)$. В случае $\dim Y \leqslant n$ этот результат для пространства $lc^n(Y)$ был установлен К. Борсуком (реф. 7223).

В заключение дается некоторое обобщение теоремы автора, касающееся полной метризации L-пространств Фреше. Оно позволяет несколько упростить введенную им полную метрику пространств $lc^n(Y)$ и $LC^n(Y)$.

J. W. Jaworowski

7226. **О полных и регулярно полных пространствах. III. Кунуги** (Sur les espaces complets et régulièrement complets. III. Kunugi Kinjirô), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 2, 49—53 (франц.)

Описывается процесс вложения рангированного пространства R (РЖМат, 1956, 2034) в его пополнение S. Пусть R удовлетворяет аксиоме отделимости T_1 и следующей аксиоме (b): Если p и q — две произвольные точки пространства R, причем p не лежит в окрестности $V(q)$ точки q ранга γ, то для всякой точки r, отличной от q, и ее двух окрестностей $u_1(r)$ ранга γ_1 и $u_2(r)$ ранга γ_2, $\gamma \leqslant \gamma_1 < \gamma_2$, удовлетворяющих условию $V(q) \supseteq u_1(r) \supseteq u_2(r)$, найдется некоторая окрестность точки p, не пересекающаяся с $u_2(r)$. Рассматривается семейство $\mathfrak{F}(p)$ всех фундаментальных последовательностей, все составляющие окрестности которых содержат данную точку $p \in R$. Показывается, что при выполнении указанных аксиом $\mathfrak{F}(p)$ есть точка пространства S. Совокупность всех таких точек обозначается через R^*. Доказывается, что $\mathfrak{F}(p)$ есть гомеоморфное отображение пространства R в подпространство R^* пространства S, чем и определяется искомое вложение. Далее рассматривается сумма S^* множества R^* и множества всех неизолированных точек пространства S и показывается, что R^* всюду плотно в S^*. Приводится пример, показывающий, что S может иметь изолированные точки, не принадлежащие к R^*.

М. Ф. Бокштейн

7227. **Нульмерные пространства. Исбелл** (Zero-dimensional spaces. Isbell J. R.), Tôhoku Math. J., 1955, 7, № 1—2, 1—8 (англ.)

Замечая, что понятие топологической размерности dim, определяемой с помощью покрытий, можно распространить и на равномерные вейлевские пространства, автор исследует нульмерные (в индуктивном урысоновском смысле) топологические пространства с точки зрения равномерной размерности.

Равномерное пространство uR может быть определено как множество R вместе с некоторой системой u своих покрытий — равномерной структурой. Определяя размерностную функцию $dl(uR)$ с помощью произвольных покрытий структуры u, а размерностную функцию $du(uR)$ — равномерную размерность — с помощью лишь конечных покрытий структуры u, он получает два инварианта относительно взаимноравномерных (но не топологических) отображений, сохраняющиеся при опе-

рации пополнения: $dl(uR) = dl(\widetilde{uR})$, $du(uR) = du(u\widetilde{R}) = du(u'\widetilde{R})$, где u' — прокомпактная (основанная на конечных покрытиях) подструктура структуры u (пополнение $u'R$ является бикомпактным расширением пространства R, введенным Самюэлем (Samuel P., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, 64, 100—112). Пусть $C = C(uR, T)$ — алгебра всех равномерно непрерывных отображений равномерного пространства uR в «двоеточие» $T = \{0,1\}$, а $H(C)$ — бикомпактное пространство максимальных идеалов алгебры C. Оказывается, что пространства $u'R$ и $H(C(uR, T))$ тогда и только тогда являются естественно гомеоморфными, когда $du(uR) = 0$. Отсюда вытекают следующие результаты: Пусть $M(R)$ — алгебра всех открыто-замкнутых множеств топологического пространства R; чеховское бикомпактное расширение βR пространства R тогда и только тогда нульмерно и естественно гомеоморфно пространству $H(M(R))$, когда $du(fR) = 0$, где f — структура всех конечных нормальных (Tukey J., Convergence and uniformity in topology, Princeton, 1940) покрытий пространства R. Воллменовское расширение ωR естественно гомеоморфно пространству $H(M(R))$ тогда и только тогда, когда $\dim R = 0$. В нульмерном пространстве R тогда и только тогда замыкание каждого открытого множества открыто, когда алгебра $M(R)$ полна. Кроме отмеченных, доказываются и высказываются еще несколько утверждений относительно так называемых P-пространств (характеризующихся тем, что в них каждое G_δ-множество открыто). В п. 3 делаются некоторые замечания относительно однородных пространств (РЖМат, 1954, 2539). Дается несколько примеров.

Примечание референта. Автор неосновательно утверждает, что для метрических пространств справедливо равенство $\mathrm{ind}R = \dim R$, неправильно ссылаясь на М. Катетова, который лишь доказал равенство $\mathrm{Ind}R = \dim R$, где $\mathrm{Ind}R$ — индуктивная, но не урысоновская, а так называемая чеховская размерность. Близкая к идеям автора теория размерности пространств близости построена референтом (РЖМат, 1955, 116). Пример нормального пространства R, у которого $\mathrm{ind}R = 0 < \mathrm{ind}\beta R = 1$, дан Даукером (РЖМат, 1956, 2037). Ю. М. Смирнов

7228. Группа гомеоморфизмов и пространства смежных классов. Форд (Homeomorphism groups and coset spaces. Ford Lester R. Jr.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 3, 490—497 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с топологией групп гомеоморфизмов.

Первый раздел статьи — Введение. Во втором разделе основной является теорема 2. 2: Если пространство X обладает равномерной структурой, для которой каждый элемент некоторой группы гомеоморфизмов G является равномерно непрерывным, то G является топологической группой относительно равномерной сходимости, индуцированной равномерной структурой. (Термин «равномерная структура» было бы правильнее заменить термином «равномерное строение», ср. РЖМат, 1955, 3668).

Пусть G — транзитивная группа преобразований пространства X, а C_x — стабильная подгруппа, соответствующая точке $x \in X$. Автор называет топологию группы G «приемлемой» (reasonable), если естественное отображение $G/C_x \to X$ гомеоморфно. В третьем разделе изучаются некоторые свойства приемлемой топологии, в частности отмечается, что пространство X, в котором действует некоторая группа преобразований в приемлемой топологии, является вполне регулярным. В четвертом разделе приведены некоторые условия, достаточные для того, чтобы группа преобразований обладала приемлемой топологией. Приведены примеры.

В. Г. Болтянский

7229. Характеристика границы. Грейветт (A characterization of frontier. Gravett K. A. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 1, 152—153 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть X — произвольное множество, $P(X)$ — система всех его подмножеств, f — отображение множества $P(X)$ в себя, обладающее следующими свойствами: 1) $f0 = 0$, где 0 — пустое множество; 2) $fcS = fS$, где cS — дополнение к множеству S в X; 3) $ffS \subset fS$; 4) $f(S \cup T) \subset f(S) \cup f(T)$; 5) Если $S \subset T$, то $fS \subset T \cup fS$, где S и T — произвольные подмножества множества X. Тогда в X можно ввести такую топологию, при которой для всякого $S \in P(X)$ граница множества S равна fS.

А. С. Пархоменко

7230. Продолжение гомеоморфного отображения. Сираи (Prolongation of the homeomorphic mapping. Shirai Tameharu), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 147—151 (англ.)

Доказывается, что гомеоморфизм между двумя замкнутыми ограниченными множествами, лежащими на расположенных в одной плоскости прямых, может быть продолжен до гомеоморфного отображения плоскости на себя. А. С. Пархоменко

7231. Вложения листов Мёбиуса в трехмерное пространство. Кайл (Embeddings of Möbius bands in 3-dimensional space. Kyle R. H.), Proc. Roy. Irish Acad., 1955, A57, № 7, 131—136 (англ.)

Классифицируются вложения листа Мёбиуса в трехмерное сферическое пространство S. Ориентируем границу l и среднюю линию m листа Мёбиуса M согласованно (т. е. так, чтобы имела место гомология: $l \sim 2m$). Коэффициент зацепления $\eta(l, m)$ автор называет кручением (twist) листа Мёбиуса M. Две кривые или две ленты Мёбиуса в S называются эквивалентными, если одна может быть переведена в другую изотопией пространства S. Ясно, что если два листа Мёбиуса эквивалентны, то их границы и средние линии также эквивалентны, а их кручения равны. Автор доказывает следующие теоремы: 1. Если два листа Мёбиуса имеют эквивалентные средние линии и равные кручения, то они эквивалентны. 2. Если границы двух листов Мёбиуса являются эквивалентными нетривиальными узлами, то эти листы Мёбиуса эквивалентны, 3. Если граница листа Мёбиуса не заузлена, то его средняя линия также не заузлена, а его кручение равно ± 1. В. Г. Болтянский

7232. О графе Лавеса охвата десять. Кокстер (On Laves' graph of girth ten. Coxeter H. S. M.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 1, 18—23 (англ.)

Приведено построение бесконечного регулярного метрически правильного графа степени 3, расположенного в трехмерном евклидовом пространстве. Граф этот имеет охват (girth) десять, т. е. минимальный замкнутый путь в нем содержит десять ребер. При факторизации трехмерного евклидова пространства в трехмерный тор можно получить, исходя из построенного графа, конечный граф с аналогичными свойствами. Если во всех вершинах построенного бесконечного графа поместить сферы, диаметры которых равны ребру графа, то получается «тонкая упаковка» сфер, описанная ранее Лавесом (Laves, Z. Kristallogr., 1932, 82, 1—14). В заключение автор исправляет ошибку, допущенную в одной из предыдущих работ (Proc. London Math. Soc., 1937, 43, 33—62). В. Г. Болтянский

7233. Инволюции компактных пространств и обобщение теоремы Борсука о антиподах. Яворовский И. В., Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 6, 285—288

Теорема 1. Пусть M — компакт, ациклический по модулю 2 в размерностях $< n$, φ — не имеющая неподвижных точек инволюция компакта M. Тогда всякое непрерывное отображение f пространства M в n-мер-

ную сферу S^n, удовлетворяющее условию $f(\varphi(x)) \neq f(x)$ при любом $x \in M$, отображает группы гомологий пространства M по модулю 2 на группы гомологий S^n по модулю 2.

Для случая, когда $M = S^n$ и φ переводит каждую точку в диаметрально противоположную — это известная теорема Борсука (Borsuk K., Fundam. math., 1933, 20, 177—190). Пользуясь теоремой 1, автор переносит на случай пространства, ациклического по модулю 2 в размерностях $< n$, еще две теоремы, доказанные Борсуком для S_n в упомянутой работе. Показывается, что любая инволюция ациклического по модулю 2 компакта имеет неподвижную точку.

Примечание референта. Легко видеть, что пространство, ациклическое по модулю 2 в размерностях $< n$, имеет индекс $\geqslant n$ в смысле Яна (РЖМат, 1956, 274) при любой заданной на нем инволюции (это по существу доказано в реферируемой работе). Тем самым на такие пространства переносятся не только теоремы Борсука, но и более сильные результаты Яна.

А. С. Шварц

7234. **Семейства ациклических компактов в n-мерном евклидовом пространстве.** Борсук К., Косинский А., Бюлл. Польской АН, Отд. 3, 1955, 3, № 6, 289—293

Пусть X — компакт, Y — сепарабельное метрическое пространство, Φ — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ компактное множество $\Phi(x) \subset Y$. Предполагается, что отображение Φ полунепрерывно сверху, т. е. для каждой окрестности U множества $\Phi(x)$ найдется такая окрестность V точки x, что при $y \in V$ имеем $\Phi(y) \subset U$. Тройка $\{X, Y, \Phi\}$ называется семейством, множество $\bigcup_{x \in X} \Phi(x) = \Phi(X)$ — полем семейства.

Семейство $\{X, Y, \Phi_1\}$ называется продолжением семейства $\{X, Y, \Phi_2\}$, если $\Phi_1(x) \supset \Phi_2(x)$ при любом $x \in X$. Семейство $\{X, Y, \Phi\}$ называется простым, если $\Phi(x) \cap \Phi(y) = 0$ при $x \neq y$. Для простого семейства отображение Φ^{-1} будет однозначным отображением $\Phi(X)$ на X.

Теорема 1. Пусть $\{X, E_n, \Phi\}$ — простое семейство (E_n есть n-мерное евклидово пространство). Если каждый $(n-1)$-мерный истинный цикл по модулю m в $\Phi(X)$ переводится отображением Φ^{-1} в цикл, гомологичный нулю, то поле любого семейства, являющегося продолжением семейства $\{X, E_n, \Phi\}$ и состоящего из множеств, ациклических по модулю m, содержит все ограниченные компоненты множества $E_n / \Phi(X)$.

Дается (без доказательства) обобщение этой теоремы на случай семейств, не являющихся простыми.

А. С. Шварц

7235. **К теореме о накрывающей гомотопии.** Хюбш (On the covering homotopy theorem. Huebsch William), Ann. Math., 1955, 61, № 3, 555—563 (англ.)

Рассматриваются пространства $(X, B, p, \Omega, \Phi_u)$ и $(X^*, B^*, \Omega, \Phi_v^{*\bullet})$, расслоенные в смысле Ху (РЖМат, 1955, 4309). Основная теорема: Если B — паракомпактное пространство и $f: X \to X^*$ — послойное отображение, то для любой деформации $K: B \times I \to B^*$, удовлетворяющей условию $K(\cdot, 0) = pf$, существует такая накрывающая деформация $H: X \times I \to X^*$, стационарная относительно k, что $H(\cdot, 0) = f$.

Теорема эта является обобщением известной теоремы о накрывающей гомотопии Гуревича—Стинрода. При проведении доказательства теоремы получена новая характеристика паракомпактности пространства.

С. С. Рышков

7236. **Мультигомотопии.** Стротер (Multi-homotopy. Strother Wayman L.), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 281—285 (англ.)

Изучаются многозначные отображения и их связь с некоторыми однозначными. Многозначное отображение $F: X \to Y$ (где X, Y — топологические пространства) называется непрерывным в точке x_0, если из сходимости последовательности точек $\{x_k\}$ к x_0 следует, что $F(x_0)$ совпадает с верхним и нижним пределами последовательности множеств $\{(F(x_k)\}$.

Вводится топология в множестве $S(X)$ всех замкнутых подмножеств пространства X. Указаны некоторые леммы, доказанные автором в его диссертации; среди них основное место занимает следующая:

Лемма 1. Пусть X — хаусдорфово пространство, Y — бикомпакт и F — многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке пространства X замкнутое множество пространства Y. Определим отображение $f: X \to S(Y)$, положив $f(x) = F(x)$. Утверждается, что отображения F и f непрерывны одновременно.

Многозначные отображения $F: X \to Y$ и $G: X \to Y$ называются гомотопными, если существует такое многозначное отображение $H: X \times Y \to Y$, что $H(x, 0) = F(x)$ и $H(x, 1) = G(x)$.

Вводится понятие относительной деформации. Естественным образом определяются и затем изучаются многозначные гомотопические группы $M\pi_n(Y, y_0)$.

Приведем в качестве примера теорему 7:

Если Y — бикомпакт, то $M\pi_n(Y, y_0) = \pi_n(S(Y), y_0)$

Вводятся понятия, аналогичные понятиям ретракта, абсолютного ретракта и т. д. Даются необходимые и достаточные (в терминах пространства $S(Y)$) условия для того, чтобы пространство Y обладало указанными свойствами.

С. С. Рышков

7237. **Исследования по гомотопической теории непрерывных отображений.** Постников М. М., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 46, 158 стр.

Монография, содержащая подробное изложение принадлежащего автору метода натуральных систем. Приведены также некоторые применения этого метода к решению гомотопических задач (результаты были ранее опубликованы автором в кратком изложении: Докл. АН СССР, 1951, 76, 359—362; 79, 573—576).

Монография начинается введением, в котором изложены основные определения и факты теории гомотопий (гомотопические группы, локальные семейства Стинрода, сингулярные группы когомологий и т. п.). Основное содержание монографии разбито на две части. Первая из них посвящена построению и изучению понятия «системы» и связанных с ней понятий (полусимплициальные комплексы, их расширения и т. п.). Эта часть работы носит чисто алгебраический характер Вторая часть работы посвящена применению понятия системы к теории гомотопий. Автор связывает с топологическим пространством его «натуральную систему», представляющую собой для ряда пространств (в частности, для полиэдров) алгебраический эквивалент гомотопических свойств этих пространств. В терминах натуральных систем автор полностью решает задачу о влиянии гомотопических групп на группы когомологий (§ 2 второй части) и задачу о характеризации гомотопического типа полиэдра (§ 3 второй части).

В дополнении излагается доказательство конечности числа образующих гомотопических групп любого односвязного пространства, группы когомологий которого имеют конечное число образующих.

Как указывает автор, для чтения монографии достаточна незначительная подготовка по топологии, но требуется достаточно высокая математическая культура.

В. Г. Болтянский

7238. **Трансгрессия и инвариант $k_n q^{+1}$.** Накаока (Transgression and the invariant $k_n q^{+1}$. Nakaoka Minoru), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 5, 363—368 (англ.)

Пусть X — произвольное односвязное топологическое пространство, B — содержащее его асферичное в размерностях, не меньших некоторого $r \geqslant 2$, пространство, полученное приклеиванием клеток размерностей, больших r, и E — пространство путей пространства B, начальные точки которых принадлежат пространству X. Отнеся любому пути из E его концевую точку, мы определим пространство E как расслоенное пространство с базой B. Слой F этого пространства, очевидно, односвязен и асферичен в размерностях, меньших r, а его r-мерная гомотопическая группа π_r изоморфна r-мерной гомотопической группе пространства X. Следовательно, согласно классической теореме Гуревича: $H^i(F;\pi_r)=0$, если $i<r$ и $H^r(F;\pi_r)\approx \mathrm{Hom}(\pi_r,\pi_r)$. Из того, что $H^i(F;\pi_r)=0$ для $i<r$, следует, что трансгрессия τ, соответствующая расслоенному пространству E, определена на всей группе $H^r(F;\pi_r)$ и отображает эту группу в группу $H^r(B;\pi_r)$. С другой стороны, как показал Уайтхед (РЖМат, 1955, 2601), пространство B может рассматриваться как геометрическая реализация $(r-1)$-го комплекса X_{r-1} натуральной системы пространства X (о натуральных системах см. реф. 7237), причем препятствие $\bar{k}_{r-1}\in H^r(B;\pi_r)$ к распространению тождественного отображения $X\to X$ до отображения $B\to X$ является ни чем иным, как $(r-1)$-м фактором пространства X в смысле референта. Автор доказывает (пользуясь методами упомянутой работы Уайтхеда), что $\bar{k}_{r-1}=-\tau b^r$, где класс когомологий $b^r\in H^r(F\ \pi_r)$ (фундаментальный класс пространства F) определяется как класс, соответствующий тождественному отображению $\pi_r\to\pi_r$ при изоморфизме Гуревича $H^r(F;\pi_r)\approx \approx \mathrm{Hom}(\pi_r;\pi_r)$. Подробно рассмотрен лишь случай первого нетривиального фактора (инварианта Эйленберга — Маклейна). М. М. Постников

7239. Доказательство одной теоремы Накаока. Мидзуно (A proof for a theorem of M. Nakaoka. Mizuno Katuhiko), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 6, 431—434 (англ.)

Теорема, изложенная в работе автора (реф. 7238), доказана непосредственно без использования результатов Уайтхеда. Доказательство проведено сразу для общего случая. М. М. Постников

7240. Невырожденные критические многообразия. Ботт (Nondegenerate critical manifolds. Bott Raoul), Ann. Math., 1954, 60, № 2, 248—261 (англ.)

Пусть J — гладкая функция, заданная на открытом множестве U риманова n-мерного многообразия E. Компактное многообразие M, гладко вложенное в U, называется критическим многообразием функций J, если каждая точка многообразия M является стационарной точкой функции J. Критическое многообразие M называется невырожденным, если в каждой его точке матрица $\|\partial^2 J/\partial x_i \partial x_j\|$ вторых производных функции J в локальной системе координат имеет ранг $n-r$, где r — размерность многообразия M.

Доказывается теорема: Если M — невырожденное критическое многообразие функции J, то для достаточно малой окрестности V многообразия M имеем

$$H_k(J_M\cap V;\ J_{\overline{M}}\cap V)\approx H_{k-\lambda}(M),$$

где $J_M[J_{\overline{M}}]$ обозначает множество точек x, в которых $J(x)\leqslant J(a)$ (соответственно $J(x)<J(a)$), $a\in M$, и λ обозначает число отрицательных характеристических корней матрицы $\|\partial^2 J/\partial x_i \partial x_j\|$ в точке многообразия M (гомологии рассматриваются по модулю 2). Иначе говоря, k-мерное типовое число по модулю 2 невырожденного критического многообразия M равно $(k-\lambda)$-мерному числу Бетти по модулю 2 многообразия M.

Эту теорему автор применяет к вычислению «ориентированных круговых чисел связности» (sensed circular connectivities) n-мерной сферы)) Ориентированные круговые числа связности многообразия совпадают, как показал референт, с числами Бетти по модулю 2 пространства ориентированных кривых на многообразии по модулю подмножества одноточечных кривых). Автор указывает, что тем же способом можно вычислить также неориентированные круговые числа связности для сферы, найденные ранее Морсом (Morse, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, 1934, 18). Однако вычисления автора необоснованы, так как он применяет сформулированную выше теорему к функции, заданной на пространстве, не являющемся многообразием. Вычисления Морса также неверны, поэтому вопрос о нахождении ориентированных и неориентированных круговых чисел связности для сферы остается открытым. А. С. Шварц

7241. Некоторые проблемы алгебраической топологии и теории косых произведений. Массе (Some problems in algebraic topology and the theory of fibre bundles. Massey W. S.), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 327—359 (англ.)

Автор суммирует проблемы, выдвинутые участниками конференции по косым произведениям и дифференциальной геометрии, которая происходила в мае 1953 г. в университете Корнелля.

Первый раздел статьи посвящен обзору различных определений косых произведений и расслоенных пространств.

Второй раздел посвящен спектральным последовательностям. Отметим здесь следующие проблемы: 3) Найти соотношения между когомологиями слоя и базы расслоенного пространства, спектральная последовательность E_r которого имеет следующие свойства: $E_2=H^*(B)\otimes H^*(F)$, $E_\infty=0$ (в положительных размерностях). 6) Возможно ли ввести квадраты и приведенные степени Стинрода в спектральную последовательность расслаивающего отображения, так чтобы для члена E_2 выполнялись обычные правила, известные для прямых произведений?

Третий, наиболее обширный раздел статьи посвящен рассмотрению гомотопических проблем. Прежде всего рассматривается вопрос о вычислении гомотопических групп различных пространств, в связи с чем автор выдвигает, в частности, следующую проблему: 10) При каких условиях отображение включения $A\subset X$ гомотопически эквивалентно отображению включения слоя в расслоенное пространство? Далее отмечаются вопросы вычисления гомотопических групп сфер и операций в гомотопических группах. Отметим здесь следующую проблему: 17) Обозначим через γ_n отображение $S_{n+1}\to S_n$, являющееся $(n-2)$-кратной надстройкой хопфовского отображения $S_3\to S_2$; тогда $\gamma_n\gamma_{n+1}\circ\gamma_{n+2}\neq 0$ но $\gamma_n\circ\gamma_{n+1}\circ\gamma_{n+2}\circ\gamma_{n+3}=0$; существуют ли аналогичные результаты для хопфовских отображений $S^7\to S^4$ и $S^{15}\to S^8$? Далее автор рассматривает проблемы вычисления гомотопических типов пространств, в частности следующую: 19) Передоказать результаты Уайтхеда о гомотопических типах полиэдров A_n^2 $(n>1)$, используя методы Постникова и Зильбера. (Вызывает недоумение упоминание о «методах Зильбера», так как автор перед этим пишет, что Зильбер ничего по указанному вопросу не опубликовал). Далее упоминаются проблемы, связанные с изучением комплексов Эйленберга — Маклейна

и когомологических операций. Из упоминаемых далее классификационных проблем отметим следующую: 28) Дать гомотопическую классификацию отображений $(n+2)$-мерного полиэдра в $(n-1)$-связное пространство $(n \geqslant 2)$. Раздел завершается некоторыми проблемами о когомотопических группах.

Последние два раздела содержат проблемы, связанные с изучением групп Ли и однородных пространств (раздел 4) и топологии H-пространств (раздел 5). Отметим проблему 47): Каким условиям должно удовлетворять H-пространство, для того чтобы существовало расслоенное пространство, имеющее его своим слоем?

В добавлении к статье автор рассматривает современное состояние проблем, перечисленных в 1949 г. Эйленбергом (Eilenberg S., Ann. Math., 1949, 50. 247—260). Статья содержит библиографию (61 название) работ самых последних лет. В. Г. Болтянский

7242. Топология групп Ли и характеристические классы. Борель (Topology of Lie groups and characteristic classes. Borel Armand), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 5, 397—432 (англ.)

Обзорная статья. Библ. 82 назв.

7243. Понимание множества как пространства. Жемона (La spazializzazione degli insiemi. Geymonat Ludovico), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, **13**, 47—58 (итал.)

7244 К. Теория топологического пространства. Кавано (位相空間論・河野伊三郎. 共立出版. 194頁, 250圓). Кёрицу-сюппан, 1954, 194 стр., 250 иен (япон.)

7245 К. Комбинаторная топология. Понтрягин (Kombinatorikus topologia. Pontrjagin L. Sz. [Oroszbol ord.], Budapest, Akad. Kiado, 1955, 146 l., 20 Ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 8, 259 (венг.)

7246 Д. Об аксиоматической теории спектров и о законах двойственности для произвольных множеств. Берикашвили Н. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилис. ун-т, Тбилиси, 1956

7247 Д. Почти непрерывные отображения хаусдорфовых пространств. Эдуардс (Almost-continuous mappings of Hausdorff spaces. Edwards Richard Dilworth.— Doct. diss. Univ. Pittsburgh, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 5, 838—839 (англ.)

7248 Д. Инварианты квазикомпактных отображений. Малбон (Invariants for quasi-compact mappings. Malbon Wendell Endicott.— Doct. diss., Univ. Virginia, 1955), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 10, 1864—1865 (англ.)

7249 Д. О когомологической структуре образований. Адамсон (The cohomology structure of formations. Adamson Iain Thomas Arthur Carpenter. Doct. diss., Princeton Univ., 1952), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 421 (англ.)

7250 Д. Гомотопическая теория совпадений. Фуллер (The homotopy theory of coincidences. Fuller Francis Brock. Doct. diss., Princeton Univ., 1952), Dissert. Abstrs, 1955, **15**, № 3, 424 (англ.)

См. также: 7212, 7258, 7259, 7448, 7453, 7455, 7458, 7475, 7601, 7632, 7634, 7647

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7251. Разложения плоскости на множества, имеющие положительную меру во всяком произведении двух множеств положительной меры. Эрдёш, Октоби (Partitions of the plane into sets having positive measure in every non-null measurable product set. Erdös Paul, Oxtoby John C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 1, 91—102 (англ.)

Пусть X, Y — пространства с мерой, $X \times Y$ — их произведение, μ—мера в нем. Множество $E \subset X \times Y$ называется обладающим свойством (М) относительно множества $U \subset X \times Y$, если для всяких двух множеств $A \subset X, B \subset Y$, для которых $\mu(A \times B) > 0$, $A \times B \subset U$, имеем $\mu(E \cap (A \times B)) > 0$. Разложение множества U на (по крайней мере две) части E_i называется (М)-разложением, если каждое из множеств E_i обладает свойством (М) относительно U. Как отмечают авторы, вопрос о существовании такого разложения был поставлен Махарам для случая, когда X и Y — отрезки прямой, а $U = X \times Y$, и положительно решен примером, построенным Махарам и Стоуном (пример не опубликован и авторами не приводится). Реферируемая работа посвящена развитию этой проблематики. Авторы рассматривают произвольную совокупность T-преобразований, переводящих часть плоскости в часть плоскости, и разложение плоскости на множества E_i называют T-инвариантным (М)-разложением, если для всякого преобразования $t \in T$ множества $t(E_i)$ образуют (М)-разложение множества значений преобразования t. Оказывается, что T-инвариантные (М)-разложения плоскости существуют для весьма обширных классов T, например, для совокупности T всех взаимно однозначных преобразований класса C^1, имеющих открытую область определения и не обращающийся в нуль якобиан, и для совокупности T всех взаимно однозначных вещественно аналитических преобразований с необращающимся в нуль якобианом. В противоположность этому T-инвариантного М-разложения не существует, если T есть совокупность всех взаимно однозначных преобразований с инвариантной мерой, или совокупность всех гомеоморфизмов, или даже совокупность всех сохраняющих меру гомеоморфных преобразований плоскости. Проблема существования (М)-разложения плоскости, T-инвариантного относительно совокупности T всех взаимно однозначных преобразований класса C^1, остается открытой.

В случае, когда X и Y суть единичные отрезки, проблема (М)-разложения изучается в работе еще и с другой точки зрения. Пусть S—пространство классов эквивалентных (т. е. различающихся на множество меры нуль) измеримых подмножеств квадрата $X \times Y$ с метрикой $\rho(E, F) = \mu((E \cup F) - (E \cap F))$ и M — совокупность классов тех множеств $E \subset X \times Y$, которые вместе со своими дополнениями $X \times Y - E$ обладают свойством (М) относительно $X \times Y$. Как известно, S есть полное пространство. Оказывается, что множество $S - M$ имеет в S первую категорию.

В заключение рассматривается более общий случай, когда X и Y суть произвольные пространства с вполне σ-конечными мерами (Халмош П., Теория меры, М., 1953, стр. 35). Доказывается, что пространство $X \times Y$ в том и только в том случае допускает (М)-разложение, если пространства X и Y являются неатомическими (см. там же, стр. 165). В. А. Рохлин

7252. О размерности и мере в смысле Минковского ограниченных точечных множеств в евклидовом про-

странстве. Дебруннер (Zur Minkowskischen Dimensions- und Maßbestimmung beschränkter Punktmengen des euklidischen Raumes. Debrunner H.), Comment. math. helv., 1955, 29, № 4, 273—278 (нем.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1956, 2864). Рассматриваются линейные точечные множества. К системе $\mathfrak{A}$ относятся множества с конечной внешней мерой Жордана, к системе $\mathfrak{B}$ — конечные точечные множества, и к системе $\mathfrak{C}$ — бесконечные множества жордановой меры нуль.

Через $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$ обозначается множество функций вида $\varphi(\rho) \equiv a = \text{const}\ (0 < a < \infty)$, через $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ — множество функций вида $\varphi(\rho) = 2n\rho$ (n — положительное целое), и, наконец, через $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ — множество функций $\varphi(\rho)$, удовлетворяющих для $\rho > 0$ следующим условиям: 1) $\varphi(\rho)$ монотонно возрастает, 2) выпукла вверх, 3) $\lim_{\rho \to +0} \varphi(\rho) = \varphi(0) = 0$, 4) $\lim_{\rho \to +0} \rho/\varphi(\rho) = 0$.

Доказывается теорема: Пусть $f(\rho)$ определена при $\rho > 0$. Ограниченное непустое линейное множество A, для которого одномерный параллельный объем удовлетворяет соотношению $\lim_{\rho \to +0} V(A_\rho)\,[f(\rho)]^{-1} = 1$, существует тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi(\rho)$, принадлежащая одному из классов $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ или $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ и такая, что $\lim_{\rho \to 0} \varphi(\rho)\,[f(\rho)]^{-1} = 1$. При этом множество A принадлежит классу $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C}$, смотря по тому, к какому из классов $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ и $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ принадлежит функция $\varphi(\rho)$, и наоборот. Р. С. Гутер

7253. Двумерная мера в трехмерном пространстве. Фрейлик (Two-dimensional measure in 3-space. Freilich Gerald), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 631—633 (англ.)

Доказывается неравенство $C_3^2(A \times h) \geqslant (h/2)\,C_2^1(A)$, где C_n^m означает m-мерную меру Каратеодори в n-мерном пространстве, $A - C_2^1$-измеримое множество из E^2 и $A \times h$—декартово произведение $A \times h = \{(x, y, z) | (x, y) \in A,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$. Вводится двумерная мера трехмерного множества $P_3^2(B)$, строящаяся так: Пусть G_n означает группу ортогональных преобразований в E^n, p_n^m — проекцию n-мерного пространства в m-мерное, определяющуюся равенством $p_n^m(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$, L_n — лебегову n-мерную меру и $f : g$ — суперпозицию функций f и g. Для открытого выпуклого множества $d \in E^3$ полагаем

$$P(d) = \sup_{S \in G_3} \int_{-\infty}^{\infty} \sup_{R \in G_2} L_1[(p_2^1 : R)(\{(x, y) | (x, y, z) \in S(d)\})]\,dz.$$

Для произвольных $B \in E^3$ и $r > 0$ полагаем $P_r(B) = \inf d \in D\,P(d)$, где D означает счетное покрытие B выпуклыми открытыми множествами с диаметрами $\leqslant r$. Наконец $P_3^2(B) = \lim_{r \to +0} P_r(B)$. Аналогично определяется мера P_2^1.

Для меры P_3^2 доказывается равенство $hP_2^1(A) = hC_2^1(A) = P_3^2(A \times h)$, которое автор называет «цилиндрическим свойством меры».

Примечание референта. Более общее цилиндрическое свойство было изучено Р. А. Минлосом (Докл. АН СССР, 1951, 81, 733—736) при менее общих конструкциях мер. Р. С. Гутер

7254. Тотализация первых симметрических производных. II. Интеграл Лебега и борелевская мера. Данжуа (Totalisation des dérivées premières symétriques. II. Intégrale de Lebesgue et mesure borélienne. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 14, 829—832 (франц.)

Ч. I см. РЖМат, 1956, 4408.

Автор (Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique, Gauthier-Villars, 1941—1948, гл. V, VI и VIII) построил процесс тотализации $(T_{2 \cdot S})_0$, позволяющий восстановить функцию $G(x)$ по ее второй симметрической производной $D_{2 \cdot S} G(x) = f(x)$, где

$$D_{2 \cdot S} G(x) = \lim_{h \to 0} [G(x + h) + G(x - h) - 2G(x)]/h^2.$$

В процессе тотализации $(T_{2 \cdot S})_0$ предполагается существование и непрерывность первой обычной производной $G'(x) = F(x)$. Тогда $D_{2 \cdot S} G(x) = D_S F(x) = f(x)$, где $D_S F(x)$ — первая симметрическая производная. Таким образом, построение промежуточной функции $F(x)$ облегчит построение функции $G(x)$.

В реферируемой работе строится новый процесс тотализации, позволяющий восстановить промежуточную функцию $F(x)$.

Пусть положительная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и

$$I = \int_E f(x)\,dx. \tag{1}$$

Введем множества

$s(y) = \{x \in E : f(x) \leqslant y\}$, $S = \{(x,\ y) : x \in E,\ 0 < y < f(x)\}$.

Пусть $l(y) = \lambda[s(y)]$ и $\alpha(S)$ — борелевские меры соответствующих множеств. Известно, что если (1) существует, то

$$I = \alpha(S) = \int_0^{\infty} l(y)\,dy \tag{2}$$

(здесь интеграл понимается в смысле Римана).

Доказывается, что если S измеримо по Борелю, то имеет место (2). А. Г. Джваршейшвили

7255. Об одной тотализации в пространствах многих измерений. I. Энomoto (Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions. I. Enomoto Shizu), Osaka Math. J., 1955, 7, № 1, 69—102 (франц.)

Дается некоторое обобщение интеграла Данжуа—Перрона на случай n-мерного пространства, в котором, как и в предшествовавших работах Кшижанского, Риддера, Кемписти и референта, интеграл рассматривается как некоторая функция интервала.

В § 1, имеющем вспомогательное значение, рассматриваются некоторые специальные свойства покрытий интервалов замкнутыми множествами.

В § 2 изучаются свойства одномерного интеграла Данжуа — Перрона, служащие основой для предлагаемого автором обобщения. Доказывается, что если $f(x)$ интегрируема по Данжуа — Перрону на $I_0 = [a, b]$, $F(I) = (D)\int_I f(x)\,dx$ ($I \subseteq I_0$), $\varepsilon_n \downarrow 0$, то существует такая неубывающая последовательность замкнутых множеств $F_n \subset I_0$, что $f(x)$ суммируема на каждом F_n и для всякой системы неперекрывающихся интервалов I_i ($1 \leqslant i \leqslant i_0$), где $I_i \cap F_n \neq 0$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_1^{i_0} F(I_i) - \sum_1^{i_0} (L) \int_{I_i \cap F_n} f(x)\,dx \right| < \varepsilon_n.$$

Отсюда следует: $F(I) = \lim_{n \to \infty} (L) \int_{I \cap F_n} f(x)\,dx$ при всяком $I \subseteq I_0$; если $\{I_i\}$ — такая последовательность неперекрывающихся интервалов, что $I_i \cap F_{n_0} \neq 0$ для

некоторого n_0 при всех i, то

$$\sum_1^\infty F(I_i) = \lim_{n\to\infty}(L)\int_{(\bigcup_i I_i)\cap F_n} f(x)\,dx;$$

для всякого $\varepsilon>0$ и любого натурального n найдется такое $\delta(n,\varepsilon)>0$, что

$$\left|\sum_1^{i_0} F(I_i) - \sum_1^{i_0}(L)\int_{I_i\cap F_n} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \qquad (1)$$

для любой системы неперекрывающихся интервалов I_i $(1\leqslant i\leqslant i_0)$ на I_0 таких, что $I_i\cap F_n\neq 0$, $\mu_1(\bigcup_1^{i_0} I_i - F_n)<\delta(n,\varepsilon)$.

Далее доказываются обратные предложения. Пусть для $f(x)$ на I_0 существуют конечноаддитивная функция интервала $F(I)$, неубывающая последовательность множеств M_n, покрывающих I_0, неубывающая последовательность замкнутых множеств $F_n\subseteq M_n$, почти покрывающих I_0, причем $f(x)$ суммируема на F_n и существуют такие $\delta(n,\varepsilon)>0$, что (1) выполняется всякий раз, когда I_i не перекрываются, $I_i\cap M_n\neq 0$, $\mu_1(\bigcup_i I_i - M_n)<\delta(n,\varepsilon)$; тогда $f(x)$ интегрируема по Данжуа—Перрону на I_0 и $F(I)=(D)\int_I f(x)\,dx$ при $I\subseteq I_0$. Отсюда следует: если конечноаддитивная $F(I)$ такова, что для всяких $\varepsilon_n\downarrow 0$ найдутся такие неубывающие M_n, покрывающие I_0, и замкнутые неубывающие $F_n\subseteq M_n$, почти покрывающие I_0, что $f(x)$ суммируема на F_n и (1) для $\varepsilon=\varepsilon_n$ выполняется всякий раз, когда I_i не перекрываются и $I_i\cap M_n\neq 0$, то $f(x)$ интегрируема по Данжуа — Перрону и $F(I)=(D)\int_I f(x)\,dx$ при $I\subseteq I_0$.

В § 3 дается определение $\mathfrak{D}$-интеграла в E_n. Функция $f(p)$ на интервале R_0 пространства E_{n_0} называется $\mathfrak{D}$-интегрируемой, если существуют такие конечноаддитивная функция интервала $F(I)$, неубывающая последовательность множеств M_n, покрывающих R_0, неубывающая последовательность замкнутых множеств $F_n\subseteq M_n$, почти покрывающих R_0, что: 1) $f(p)$ суммируема на каждом F_n, 2) существуют такие $\delta(n,\varepsilon)>0$, что

$$\left|\sum_1^{i_0} F(I_i) - \sum_1^{i_0}(L)\int_{I_i\cap F_n} f(p)\,dp\right| < \varepsilon$$

всякий раз, когда I_i не перекрываются, $I_i\cap M_n\neq 0$, $\mu_{n_0}(\bigcup_1^{i_0} I_i - M_n)<\delta(n,\varepsilon)$, $n(I_i)<1/n$. Последовательность $M_n(F_n)$ называется характеристической (фундаментальной) для $\mathfrak{d}$-интегрирования $f(p)$.

В § 4, после доказательства трех лемм, показывается, что для $\mathfrak{d}$-интеграла справедлива теорема Фубини.

П. И. Романовский

7256. Функции, симметричные относительно нескольких точек. Эрдеш, Голомб (Functions which are symmetric about several points. Erdős Paul, Golomb Michael), Nieuw arch. wiskunde, 1955, 3, № 1, 13—19 (англ.)

Рассматривается вопрос о существовании ограниченных функций, не эквивалентных постоянной и удовлетворяющих условию $f(x+t)-2f(x)+f(x-t)=0$ для несчетного множества значений x (РЖМат, 1953, 947). Пользуясь базисом Гамеля (Hamel, Math. Ann., 1605, 60, 459—462), авторы строят пример такой функции. Изучается также обобщение этой задачи применительно к функциям, удовлетворяющим условию

$$\sum_{m=1}^n \gamma_m f(z+c_m u) - f(z) = 0 \quad \left(\sum_{m=1}^n \gamma_m = 1,\ c_m\neq 0\right),$$

где γ_m, c_m $(m=1,\ldots,n)$ — данные комплексные числа, и, в частности, устанавливается существование ограниченной функции $f(u)$, не эквивалентной константе, которая в каждой точке z некоторого неизмеримого всюду плотного множества мощности континуума равна среднему арифметическому значений $f(u)$ в вершинах правильного многоугольника с центром в z. А. Ф. Тиман

7257. Проблема Лебега. Данжуа (Un problème de Lebesgue. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 19, 1237—1240 (франц.)

Аналитически решается проблема, которая ранее была разрешена Лебегом. Пусть G — открытое множество n-мерного эвклидова пространства R_n, а F — граница множества G. Пусть далее на F задана непрерывная функция $f(N)$. Требуется определить на множестве G такую бесконечно дифференцируемую по множеству G функцию $g(M)$, что $\lim_{M\to N} g(M)=f(N)$.

Пусть $\varphi(n)$ (n — целое положительное число) — такая возрастающая положительная функция, что $\Sigma 1/\varphi(n)<\infty$, и пусть $\psi(u)$ — положительная убывающая функция аргумента $u\geqslant 0$, причем $\psi(+0)=+\infty$. Выделим из F счетное всюду плотное в F множество точек N_n, $n=1,2,\ldots$ Положим $u_n(M)=\psi(MN_n)/\varphi(n)$, где $M\in G$ и MN_n означает расстояние между точками M и N_n. Пусть далее

$$B(M)=\sum u_n(M),\ \nu_n(M)=f(N_n)\,u_n(M),$$

$$A(M)=\sum \nu_n(M),\ g(M)=A(M)/B(M).$$

Доказывается теорема: Для того чтобы для заданной непрерывной функции $f(N)$, $N\in F$, $\lim_{M\to N} g(M)=f(N)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{M\to N} B(M)=\infty$.

Эта теорема позволяет эффективно построить функцию $g(M)$, если функции $\psi(u)$ и $\varphi(n)$ будут соответственно определены.

А. Г. Джваршейвили

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

7258. Простое доказательство теоремы Кантора — Бернштейна. Рейхбах (Une simple démonstration du théorème de Cantor — Bernstein. Reichbach M.), Colloq. math., 1955, 3, № 2, 163 (франц.)

Теорема Кантора — Бернштейна: Множество, промежуточное между двумя эквивалентными множествами, само им эквивалентно, —формулируется таким образом: Если f — взаимно однозначное отображение множества M на его часть $f(M)\subset M$, то для всякого множества $E\subset M$ — $f(M)$ существует взаимно однозначное отображение f^* такое, что $f^*(M)=E+f(M)$. Доказывается, что отображение $f^*(x)=\begin{cases} x \text{ для } x\in S,\\ f(x) \text{ для } x\in M-S,\end{cases}$ где $S=E+f(E)+f[f(E)]+\ldots$, удовлетворяет требуемым условиям. Доказательство использует ту же идею, что и известные доказательства теоремы Кантора—Бернштейна, отличаясь от последних лишь другой записью, соответствующей новой формулировке теоремы.

Е. А. Щегольков

7259. Замечание о множествах η_α. Гилман (Remarque sur les ensembles η_α. Gillman Leonard), C. r. Acad. sci., 1955, 241, № 1, 12—13 (франц.)

Следуя Хаусдорфу, автор называет упорядоченное

множество S множеством η_α, если: 1) S не содержит двух следующих непосредственно одно за другим подмножеств мощности $<\aleph_\alpha$, 2) S не конфинально и некоинициально никакому своему подмножеству мощности $<\aleph_\alpha$. Хаусдорф доказал (Hausdorff F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, 180—185): 1) два множества η_α мощности $\aleph_\alpha$ подобны при любом α; 2) при любом порядковом α существует порядковый тип $S=\eta_{\alpha+1}$ такой, что мощность его равна $2^{\aleph_\alpha}$, мощность всякого его вполне упорядоченного подмножества $\leqslant\aleph_{\alpha+1}$, всякое другое множество $\eta_{\alpha+1}$ содержит подмножество, подобное этому S. Ставится вопрос: можно ли доказать подобие двух любых $\eta_{\alpha+1}$ мощности $2^{\aleph_\alpha}$ без гипотезы $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$? Ответ дает теорема: Для любого порядкового числа α при условии $2^{\aleph_\alpha}\neq\aleph_{\alpha+1}$ существуют два не подобные друг другу множества $\eta_{\alpha+1}$ мощности $2^{\aleph_\alpha}$.

А. Л. Лунц

7260 К. Теория множеств. Камке (Mengenlehre. 3. neubearb. Aufl. Kamke E. Berlin, de Gruyter, 1955, 194 S., 4. 80 DM), Dtsch. Bibliogr., 1956, № 6, 320 (нем.)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

7261. Сходимость рядов Фурье. Сато (Convergence of Fourier series. Satô Masako), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 3, 116—118 (англ.)

Даются критерии сходимости рядов Фурье в точке, аналогичные по типу критерию Суноути (Sunouchi G., Tôhoku Math. J., 1952, **4**, 187—193) (см. также РЖМат, 1956, 2103).

Теорема 1. Пусть $f(x)\in L(0,\,2\pi)$ — функция с периодом 2π. Если для некоторого $\alpha\,(0<\alpha<1)$ справедливо

$$\varphi_x(t)-\varphi_x(t')=o\left(\log|t-t'|^{-\alpha}\right)\text{ при }(t,\,t')\to 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\pi n^{-1}e^{\log^\alpha n}}^{\eta}\left|\frac{\varphi_x(t)-\varphi_x(t+\pi/n)}{t}\right|dt=0,$$

где $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, а η — некоторое фиксированное положительное число, то ряд Фурье функции f сходится в точке x.

Аналогичного типа теоремы доказываются и при некоторых других предположениях. П. Л. Ульянов

7262. Критерии сильной суммируемости продифференцированного ряда Фурье и сопряженного к нему ряда. Чжоу Хун-цзин (Criteria for the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series. Chow Hung Ching), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 1, 57—64 (англ.)

Пусть

$$f(x)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Положим $A_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$, $B_n(x)=\varepsilon_n\cos nx-a_n\sin nx$,

$\psi(t)=\{f(x+t)-f(x-t)\}/2$, $\omega(t)=\{f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)\}/2$.

Через $\sigma_n(x)$ и $\bar\sigma_n(x)$ обозначим частные суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}nB_n(x)\text{ и }\sum_{n=1}^{\infty}-nA_n(x).\qquad(1)$$

Доказываются следующие теоремы, являющиеся обобщением результатов Прасада и Сингха:

1. Если в точке x

$$\sum_{n=1}^{m}n\,|\,B_n(x)\,|=o(m),\qquad(2)$$

и функция $\chi(t)=\psi(t)/t$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $t=0$, то $\Sigma_{n=1}^{m}|\,\sigma_n(x)-\chi(+0)/=o(m)$.

2. Если в точке x

$$\sum_{n=1}^{m}n\,|\,A_n(x)\,|=o(m),\qquad(3)$$

функция $\omega(t)/t$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $t=0$ и существует предел $\lim_{\eta\to+0}\int_\eta^\pi\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt$, то $\Sigma_{n=1}^{m}|\,\bar\sigma_n(x)-H_n(x)\,|=o(m)$, где $H_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(t)\left(\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\,t\right)^2dt$.

Указывается, что при замене в этих теоремах условий (2) и (3) соответственно на условия $nB_n(x)=o$ (1) и $nA_n(x)=o$ (1) получим обычную сходимость рядов (1) к $\chi(+0)$ и $\lim_{n\to\infty}H_n(x)$. А. А. Шнейдер

7263. Интегральные неравенства и некоторые приложения к рядам Фурье. Коидзуми (On integral inequalities and certain applications to Fourier series. Koizumi Sumiyuki), Tôhoky Math. J., 1955, **7**, № 1—2, 119—127 (англ.)

Регулярная функция в единичном круге $\varphi(z)\in H^r$ $(r>0)$, если

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\,\varphi(\rho e^{i\theta})\,|^r d\theta=O(1)\ (\rho\to 1-0).$$

Вводится в рассмотрение функция

$$g_p^*(\theta,\,\varphi)=g_p^*(\theta)=\left\{\int_0^1(1-\rho)^{p-1}\chi_p^p(\rho,\,\theta)\,d\rho\right\}^{1/r}\ (p>1),$$

где

$$\chi_p(\rho,\,\theta)=\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\,\varphi'(\rho e^{i\theta+it})\,|^pP(\rho,\,t)\,dt\right\}^{1/p},$$

а $P(\rho,\,t)$ — ядро Пуассона.

Доказывается, что если $\varphi(z)\in H^r$ $(r>1)$, то для $q>2$

$$\left\{\int_0^{2\pi}[g_q^*(\theta)]^r d\theta\right\}^{1/r}\leqslant A_{r,\,q}\left\{\int_0^{2\pi}|\,\varphi(e^{i\theta})\,|^r d\theta\right\}^{1/r},\qquad(1)$$

а для $1<p<2$ $(\varphi(0)=0)$

$$B_{r,\,p}\left\{\int_0^{2\pi}|\,\varphi(e^{i\theta})\,|^r d\theta\right\}^{1/r}\leqslant\left\{\int_0^{2\pi}[g_p^*(\theta)]^r d\theta\right\}^{1/p},\qquad(2)$$

причем $A_{r,\,q}$ и $B_{r,\,p}$ — константы, зависящие лишь от r и q соответственно — r и p.

При $q=2$ и $p=2$ неравенства (1) и (2) были установлены Литлвудом и Пейли (Littlewood J. E., Paley R. E. A. C., J. London Math. Soc., 1931, **6**, 230—233; Proc. London Math. Soc., 1937, **42**, 52—89; **43**, 105—162).

При помощи неравенств (1) и (2) даются более простые доказательства некоторых известных теорем о сильной суммируемости рядов. И. М. Ганзбург

7264. Суммируемость одного класса рядов Фурье — Стилтьеса. Кьоу (Summability of a class of Fourier — Stieltjes series. Keogh F. R.), J. London Math Soc., 1956, **31**, № 1, 64—67 (англ.)

Рассматриваются ряды Фурье — Стилтьеса

$$a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\theta+b_k\sin k\theta),\qquad(1)$$

где $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, dF(t)$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt\, dF(t)$, причем $F(t)$ — функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$ и $F(t+2\pi) - F(t) = F(2\pi) - F(0)$. Пусть далее $u(r, \theta)$ и $\varphi_\alpha(\theta, t)$ — соответственно (A)- и (C, α)-средние, т. е.

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(r, t)\, d\varphi(\theta, t),$$

$$\varphi_\alpha(\theta, t) = \frac{\alpha}{t}\int_0^t \left(1 - \frac{u}{t}\right)^{\alpha-1} d\varphi(\theta, u),\ \alpha > 0,$$

где $\varphi(\theta, t) = 2^{-1}[F(\theta+t) - F(\theta-t)]$, а $P(r, t)$ — ядро Пуассона.

Доказывается следующий (основной) результат: Если $F(t)$ возрастает в окрестности точки $t = \theta_0$, то для ряда (1) при $\theta = \theta_0$: 1) методы суммирования (A) и (C, α) эквивалентны; 2) для A-суммируемости к сумме s достаточно, чтобы для некоторого $\alpha > 0$ $\varphi_\alpha(\theta_0, t) \to s$, и необходимо, чтобы $\varphi_1(\theta_0, t) \to s$.

Для случая $F(t) = \int_0^t f(u)\, du$ ($f(u) > 0$ в окрестности $u = \theta_0$) подобные исследования проводились Харди и Литлвудом (Hardy G. H., Littlewood J. E., J. London Math. Soc., 1926, 1, 134—138). И. М. Ганзбург

7265. О сходимости рядов с лакунами. Мацуяма, Такахаси (On the convergence of some gap series. Matsuyama Noboru, Takahashi Shigeru), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 3, 111—115 (англ.)

Рассматриваются вопросы сходимости рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(n_k x)$. При этом обобщается, например, теорема Каца — Салема — Зигмунда (Kac M., Salem R., Zygmund A., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 235—243).

Определение (Алексича). Пусть $\lambda(n)$ — неубывающая последовательность положительных чисел. Тогда $\{a_k\}$ называется $\lambda(k)$-лакунарной последовательностью, если число тех индексов k, для которых $2^n \leqslant k < 2^{n+1}$ и $a_k \neq 0$, будет порядка не выше $\lambda(n)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям: $f(x+1) = f(x)$, $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$, $\int_0^1 f^2(x)\, dx = 1$, $\omega(n) = (\int_0^1 |f(x) - s_n(x)|^2 dx)^{1/2} = O(\log^{-\alpha} n)$, где $\alpha > 1$ и $s_n(x)$ — частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда, если последовательность c_k является $\lambda(k)$-лакунарной и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k) \log^2 k (\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} c_i^2) < \infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(kx)$ сходится почти всюду на $[0,1]$.

П. Л. Ульянов

7266. К теории F_2-рядов. Верблюнский (An outline of the theory of F_2 series. Verblunsky S.), Amer. J. Math., 1955, 77, № 4, 628—654 (англ.)

Пусть

$$A(z) = z^2 + a,\ B(z) = bz \tag{1}$$

или

$$A(z) = az,\ B(z) = z^2 + b. \tag{2}$$

Функциям $f(x) \in L(\alpha,\ \alpha + 2\pi)$ (α — любое число) ставятся в соответствие ряды

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{i\mu_\nu x}\ (\alpha,\ \alpha + 2\pi), \tag{3}$$

$$f(x) \approx \sum_{|\nu|>1} c_\nu e^{i\mu_\nu x}\ (\alpha,\ \alpha + 2\pi), \tag{4}$$

где $c_\nu = \lambda_\nu \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\, e^{-i\mu_\nu x} dx$ ($c_{-\nu} = \overline{c_\nu}$), а λ_ν — вычеты функции $Q(z) = {}^1/_2 (A\cos\pi z + B\sin\pi z) / (A\sin\pi z - B\cos\pi z)$ относительно полюсов μ_ν ($\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots$) (РЖМат, 1956, 321). Если нуль не является полюсом, то $c_0 = 0$. В случае (1) ряд (3) называется F_2A-рядом, а ряд (4) — RF_2A-рядом; исследование их свойств проводится в предположении, что $b^2 + 4a > 0$. В случае (2) имеем соответственно F_2B- и RF_2B-ряды ($a^2 + 4b > 0$). Доказывается, что коэффициенты F_2A-ряда связаны двумя линейными соотношениями

$$\sum c_k e^{i\mu_k \alpha} / (\mu_k - im_1) = 0,\ \ \sum c_k e^{i\mu_k \alpha} / (\mu_k - im_2) = 0,$$

где $A - iB = (z - im_1)(z - im_2)$. Относительно RF_2A-рядов устанавливается, что если для $(\alpha,\ \alpha + 2\pi)$ имеет место (4), то, каков бы ни был интервал $(\beta,\ \beta + 2\pi)$, существует функция $G(x)$ такая, что

$$G(x) \approx \sum_{|\nu|>1} c_\nu e^{i\mu_\nu x}\ (\beta,\ \beta + 2\pi).$$

Доказывается, что RF_2A-ряд суммируем $(C, 1)$ почти всюду и является рядом Фурье своей $(C, 1)$-суммы (в смысле теории почти периодических функций). Показывается также, что для F_2A-рядов функций $f(x) \in L^2(\alpha,\ \alpha + 2\pi)$ выполняется равенство Парсеваля. Для F_2A-рядов устанавливаются также теоремы типа Хаусдорфа — Юнга и теоремы единственности. Аналогичные результаты имеют место для F_2B-рядов и RF_2B-рядов.

Реферируемая работа является продолжением исследований автора и других математиков (РЖМат, 1955, 2624; 1956, 321). И. М. Ганзбург

7267. Некоторые теоремы о дробном интеграле в смысле Рисса. Плесси (Some theorems about the Riesz fractional integral. Plessis Nicolaas du), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 124—134 (англ.)

В евклидовом m-мерном пространстве E дробным интегралом α-го порядка в смысле Рисса от суммируемой по всему пространству E функции $f(P)$ называется функция

$$f_\alpha(P) = K_m^{-1} \int_E r_{PQ}^{\alpha-m} f(Q)\, dQ,$$

где $K_m = \pi^{m/2} 2^\alpha \Gamma(\alpha/2) [\Gamma((m-\alpha)/2)]^{-1}$ и r_{PQ} обозначает расстояние между точками P и Q.

Доказываются 4 теоремы, из которых первые три служат обобщением на m-мерные пространства результатов Харди и Литлвуда (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939, 9.81 (I) и 9.82 (I, II)).

1. Если $f(P) \in \mathrm{Lip}\,\beta$, $0 < \beta < 1$, то $f_\alpha(P) \in \mathrm{Lip}(\alpha+\beta)$, $0 < \alpha + \beta < 1$.

2. Если $f(P) \in L^q$, $q > 1$, $1 + m/q$, $\neq \alpha \neq m/q$, то $f_\alpha(P) \in \mathrm{lip}\,(\alpha - m/q)$.

3. Если $f(P) \in L^q$ и $0 < \alpha < m/q$, то $f_\alpha(P) \in L^r$, где $\alpha = m(1/q - 1/r)$.

4. Если $f(P) \in L^q$, то а) для $0 < \alpha < m$ и $2 < q < \infty$, $f_{\alpha|q}(P)$ конечна почти всюду, за исключением, быть может, множества с β-емкостью нуль в смысле Фростмана (Frostman O., Medd. Lunds Univ. Mat. sem., 1935, 3, 1—118) для всех $\beta > m - \alpha$; б) для $0 < \alpha < m$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, $f_{\alpha|q}(P)$ конечна почти всюду, за исключением, быть может, множества с $(m - \alpha)$-емкостью, равной нулю. Результаты а) и б) являются точными.

В. К. Дзядык

См. также: 7365, 7471, 7476, 7606, 7647

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

7268. Практическое применение комплексных чисел. Ли Ен-Фир (복수수간단한응용리영필과), 학과기술. Квахак на кисуль, 1955, № 11, 60—67 (кор.)

7269. О голоморфных в единичном круге функциях, обладающих некоторым множеством дефектных значений. Сюн Цзин-лай (Sur les fonctions holomorphes dans le cercle-unité admettant un ensemble de valeurs déficientes. Hiong King-Lai), J. math. pures et appl., 1955, 34, № 4, 303—335 (франц.)

Главные результаты статьи были сформулированы в заметке автора (ГЖМат, 1953, 701), однако некоторые формулировки слегка изменены, так как оказалось необходимым исправить ряд просмотров. Кроме того, почти каждая теорема приводится в модифицированных вариантах, где часть ограничений заменена другими. А. А. Гольдберг

7270. Об аналитических функциях с заданными граничными значениями. Локки (Über analytische Funktionen mit gegebenen Randwerten. Lokki Olli). Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1955, Sar. A I, № 202, 10 S. (нем.)

Рассматривается вопрос о построении аналитической в круге $|z|<1$ функции $\Phi(z)$, для которой модуль радиальных граничных значений $|\Phi(e^{i\theta})|=\lim_{r\to 1}|\Phi(re^{i\theta})|$ совпадает почти всюду на $|z|=1$ с заранее заданной функцией $a(\theta)$.

В случае, когда $a(\theta)$ такова, что $\int_0^{2\pi}|\ln a(\theta)|\,d\theta<\infty$, как известно, существует бесконечное множество аналитических в круге $|z|<1$ функций $\Phi(z)$ ограниченного вида, для которых $|\Phi(e^{i\theta})|=a(\theta)$. Одна из таких функций может быть тогда определена по формуле

$$\Phi(z)=\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln a(\theta)\,d\theta. \qquad (1)$$

Известно также, что если интеграл $\int_0^{2\pi}|\ln a(\theta)|\,d\theta$ расходится, то среди функций ограниченного вида не будет существовать функции $\Phi(z)$, для которой $|\Phi(e^{i\theta})|=a(\theta)$ почти всюду на $(0, 2\pi)$. (Привалов, Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М., 1950, гл. II). Автор указывает метод построения функции $\Phi(z)$ для случая, когда заданная функция $a(\theta)\geqslant 0$ такова, что $a(\theta)\leqslant 1$ и существует интеграл $\int_0^{2\pi}\ln_{n-1}|\ln a(\theta)|\,d\theta$, где $\ln_n a$ означает применение к a n раз подряд операции взятия логарифма. Для этого вначале строится аналитическая в $|z|<1$ функция $W(z)$ ограниченного вида, граничные значения которой $W(e^{i\theta})$ почти всюду на $|z|=1$ являются действительными числами, удовлетворяющими неравенству $W(e^{i\theta})\geqslant\ln_{n-1}|\ln a(\theta)|$. Затем по формуле (1) строится функция $f(z)$, для которой $|f(e^{i\theta})|=[a(\theta)]^{\{\exp_{n-1}W(e^{i\theta})\}^{-1}}$. Тогда для функции $\Phi(z)=[f(z)]^{\exp_{n-1}W(z)}$ имеем $|\Phi(e^{i\theta})|=a(\theta)$ почти всюду. Поэтому $\Phi(z)$ будет одной из искомых функций, так как и в рассматриваемом случае, кроме построенной функции $\Phi(z)$, существует бесконечное множество других аналитических в круге $|z|<1$ функций, в том числе и не обращающихся в нуль в $|z|<1$, обладающих требуемым свойством. Г. Ц. Тумаркин

7271. Применение метрик Орлича к некоторым граничным задачам теории аналитических функций. Сафронова Г. П., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 2, 222—224

Приводится обобщение на случай некоторых классов Орлича следующей теоремы В. И. Смирнова: Если аналитическая в $|z|<1$ функция $f(z)\in H_\delta$, а ее граничные значения $f(e^{i\theta})\in L_p$ при $p>\delta$, то $f(z)\in H_p$. Пусть $M(u)\geqslant 0$ при $u\geqslant 0$, $\lim_{u\to\infty}M(u)=+\infty$. Через $L_M[0,2\pi]$ обозначается класс функций $f(\theta)$, для которых $\int_0^{2\pi}M[|f(\theta)|]\,d\theta<\infty$. Через H_M — класс аналитических в $|z|<1$ функций, для которых $\int_0^{2\pi}M[|f\leqslant\leqslant(re^{i\theta})|]\,d\theta\leqslant H, (0<r<1)$. В теореме 1 дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы гармоническая в $|z|<1$ функция $u(r,\theta)$ представлялась в виде интеграла Пуассона

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\lambda)}u(\lambda)\,d\lambda,$$

где $u(\lambda)\in L_M[0,2\pi]$, причем $M(u)$ — выпуклая функция такая, что $\lim_{u\to+\infty}[M(u)/u]=\infty$, заключающееся в том, что $\int_0^{2\pi}M[|u(r,\theta)|]\,d\theta\leqslant L$, $(0<r<1)$.

Следует заметить, что этот факт был известен и раньше (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М., 1939, стр. 91). Из этой теоремы следует теорема 2: Пусть $M(u)$ и $N(u)$ — выпуклые функции. Тогда если $f(z)\in H_M$, $f(e^{i\theta})\in L_N[0,2\pi]$, то $f(z)\in H_N$. В приводимых далее без доказательства теоремах 3 и 4 делаются такие же заключения, как и в теореме 2, при несколько иных, чем в теореме 2, допущениях о функциях $M(u)$ и $N(u)$. Г. Ц. Тумаркин

7272. Об областях значений аналитических функций, представимых интегралом Стилтьеса. Ашневиц И. Я., Улина Г. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 31—42

Рассматривается класс $E=E[G(\zeta,t)\,a,b]$ функций $f(\zeta)$, регулярных в круге $|\zeta|<1$, представимых интегралом Стилтьеса $f(\zeta)=\int_0^b G(\zeta,t)\,d\mu(t)$, где $G(\zeta,t)$ — функция (заданная для данного класса), регулярная по ζ в $|\zeta|<1$ и непрерывная по t в $a\leqslant t\leqslant B$, $\mu(t)$ — монотонная неубывающая в $[a,b]$ функция и такая, что $\int_0^b d\mu(t)=1$. Доказывается, что область D значений $f(z)$ в классе E является связным, выпуклым и замкнутым множеством, выпуклой оболочкой кривой L: $w=G(z,t)$, $a\leqslant t\leqslant b$.

Теорема 3. Пусть дана функция $\Phi(w)$, непрерывная и вещественная в области D^*, содержащей область D значений $f(z)$ в классе E. $\max_{f(\zeta)\in E}\Phi(f(z))$ достигается только для функций вида $f(\zeta)=\lambda_0 g(\zeta,t_1)+(1-\lambda_0)g(\zeta,t_2)$, где $0\leqslant\lambda_0\leqslant 1$ и t_1 и t_2 — фиксированные числа из $[a,b]$.

Эта теорема дает возможность свести задачу отыскания максимума функционала $\Phi(f(z))$ в классе E к нахождению максимума функции $\Phi(w)$ в области D.

Таким образом, функция $\mu_0(t)$, реализующая максимум функционала $\Phi(f(z))$, имеет не более двух точек разрыва, а геометрическая картина облегчает их нахождение.

С помощью теоремы 3 авторы находят ряд известных оценок для C-функций (функций Каратеодори, для которых $\operatorname{Re} f(z)>0$), звездных и типично-вещественных однолистных функций. В работе имеются опечатки. С. А. Касьянюк

7273. **К теории интегралов Лапласа-Стилтьеса.** Майер-Калькшмидт (Zur Theorie der Laplace-Stieltjes-Integrale. Mayer-Kalkschmidt Jörg), Mitt. math. Semin. Giessen, 1954, № 47, 1—26 (нем.)

Исследуется вопрос о наличии особенностей у аналитической функции, представимой интегралом Лапласа-Стилтьеса, на границе полуплоскости (C, n)-суммируемости этого интеграла. В качестве примера приведем следующий результат автора.

Пусть

$$f(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^n}\int_0^t (t-\tau)^n e^{-s\tau} ds(\tau) \quad (\operatorname{Re} s > \beta_n),$$

где $n \geqslant 1$ — целое, β_n — абсцисса (C, n)-суммируемости. Если $f(s)$ в точке $s = \beta_n$ имеет неотрицательную производную справа, и функция

$$\sigma_n(\beta_n, t) = \frac{1}{t^n}\int_0^t (t-\tau)^n e^{-\beta_n\tau} ds(\tau)$$

монотонно возрастает при $t \geqslant T \geqslant 0$, то $s = \beta_n$ есть особая точка $f(s)$.

Случай нецелого n в работе также рассмотрен. Для $n = 0$ аналогичные вопросы изучались Ландау (1905 г.) и Гамбургером (1920 г.). Б. И. Коренблюм

7274. **О коэффициентах Фурье функции $t(\omega_1, \omega_2)$.** Лу Ци-кэн (函數的富氏係數. 陸啓鏗), 數學學報, Шусюэ сюэбао, 1954, 4, № 2, 115—124 (кит.; рез. англ.)

Пусть ω_1 и ω_2 — два комплексные числа и $\tau = \omega_2/\omega_1$; предполагаем, что мнимая часть величины τ положительна. Обозначим эллиптическую функцию Вейерштрасса, как принято, следующим образом $\wp(z) = \wp(z; \omega_1, \omega_2)$. Далее введем обозначение:

$$t(\tau) = t(\omega_1, \omega_2) = \frac{12\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right)}{\wp\left(\frac{1}{4}\omega_1\right) - \wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right)}.$$

Цель настоящей заметки — найти коэффициенты Фурье функции $t(\tau)$ в представлении

$$t(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m e^{2\pi i\tau}.$$

Доказываем, что

$$a_m = \frac{\pi}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{0<h<k\leqslant\infty \\ (h,k)=1}} \frac{\lambda(h,k)}{k} e^{-\pi i/2k(h'+4mh)} I_1\left(\frac{2\pi\sqrt{m}}{k}\right),$$

где $hh' \equiv -1 \pmod{k}$, $I_1(z)$ — функция Бесселя первого порядка с чисто мнимым аргументом и $\lambda(h, k)$ равна $0, +1, -1, +i$ или $-i$, смотря по принадлежности значений h и k к разным классам. Резюме автора

7275. **Интерполяционный ряд Ньютона.** Эвейда (On Newton's series of interpolation. Eweida M. T.), Math. Z., 1955, 62, № 4, 352—353 (англ.)

Доказывается, что если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, то ряд

$$f(a_1) + (z-a_1) f(a_1, a_2) + (z-a_1)(z-a_2) f(a_1, a_2, a_3) + \ldots$$
$$\ldots + (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n) f(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) + \ldots,$$

где $f(a_1, a_2)$, $f(a_1, a_2, a_3)$, ... — ньютоновы разности функции $f(z)$, образованные с помощью последовательности $\{a_n\}$, равномерно сходится в круге $|z| \leq R_1 < R$, если выполняются условия:

1) $\overline{\lim}|a_n| = A < \infty$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i| = 0$,

3) $R > A$.

Показано на примере, что если одно из условий (2) или (3) не выполняется, то теорема может быть не верна. Л. Илиев

7276. **О приближении аналитических функций.** Чжан Сяо-ли (關於近似解析函數的一個定理. 張孝禮), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, 1, № 2, 392—396 (кит.)

7277. **Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области.** Джрбашян М. М., Матем. сб., 1955, 36, № 3, 353—440

В первой главе дается развернутое изложение метода интегрального преобразования Коши в применении к исследованию полноты системы полиномов с весом на достаточно широком классе неограниченных линий. Предполагая, что

$$\int_L e^{-p(z)}\overline{f(z)}\, z^n ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

автор рассматривает функцию

$$F(w) = \int_L \frac{e^{-p(z)}\overline{f(z)}}{z-w} ds.$$

где $p(z) > 0$ — достаточно регулярно растущая функция. Соотношения (1) позволяют оценить через $p(z)$ быстроту убывания к нулю $F(w)$ при $w \to \infty$ в каждой из областей, ограниченных L. Посредством отображения на полуплоскость и применения теоремы Карлемана об убывании аналитической функции около $w = \infty$, достаточном для единственности, устанавливается порядок роста $p(z)$ в зависимости от свойств L, при котором $F(w) \equiv 0$, т. е. $f(z) \equiv 0$. Таким путем находятся метрические критерии полноты в смысле

$$\inf_{\{P(z)\}} \int_L e^{-p(z)} |f(z) - P(z)|^2 ds = 0.$$

Указывается переход от среднеквадратических приближений к приближениям равномерным при наличии веса. Приводится серия следствий применительно к различным частным классам неограниченных линий. Полученные достаточные критерии полноты смыкаются с необходимыми критериями А. Л. Шагиняна, излагаемыми в конце главы.

Во второй главе приводятся оценки производных полинома с заданной мажорантой на всей числовой оси, на системе лучей и внутри угла. С помощью этих оценок доказываются обратные теоремы о наилучшем приближении с весом на соответствующих множествах. Свойства функции, определяемые заданной скоростью приближения, существенно зависят при этом как от линии L, так и от весовой функции. Выявляется количественная сторона этой зависимости. При некоторых дополнительных (по сравнению с обратными теоремами) ограничениях на весовую функцию доказывается ряд прямых теорем о наилучшем приближении с весом на оси, на лучах и в угловой области.

С. Н. Мергелян

7278. **О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутых областях.** Альпер С. Я., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 6, 423—444

Пусть D — область, ограниченная гладкой кривой, гомеоморфной окружности. Предполагается, что модуль непрерывности $\gamma(\delta)$ угла, составленного касательной к границе D с фиксированным направлением, как функ-

ция длины дуги, удовлетворяет условию

$$\int_0^c \frac{\gamma(x)}{x} |\ln x|\, dx < \infty.$$

Рассматривая функции $f(z)$, аналитические в D и непрерывные в $\overline{D}$, автор исследует скорость сходимости в $\overline{D}$ некоторых процессов суммирования ряда по полиномам Фабера для функции $f(z)$. В работе доказывается неравенство

$$\max_{z\in\overline{D}} |f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z)| < C\omega(n^{-1}),$$

в котором C не зависит от n, $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ в $\overline{D}$, $\Sigma a_k \Phi_k(z)$ — отрезок разложения $f(z)$ в ряд по полиномам Фабера $\Phi_k(z)$, соответствующим $\overline{D}$, а множители суммирования $\rho_k^{(n)}$ могут соответствовать как методу средних арифметических, так и методу Бернштейна — Рогозинского ($\rho_k^{(n)} = 1 - (k/n)$; $\rho_k^{(n)} = \cos[k\pi/(2n+1)]$).

Для любой матрицы $\{\rho_k^{(n)}\}$ с условиями

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1,$$

$$2)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt|\, dt < \text{const}$$

и любой $f(z)$, аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, устанавливается равномерная сходимость в $\overline{D}$ к $f(z)$ полиномов

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \rho_k^{(n)} \Phi_k(z).$$

Приводится новое доказательство теоремы референта: Для любой области D с гладкой границей, гомеоморфной окружности, и функции $f(z)$, аналитической в D и удовлетворяющей в $\overline{D}$ условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$,

$$\inf_{\{P_n\}} \max_{z\in\overline{D}} |f(z) - P_n(z)| < \frac{C(\varepsilon)}{n^{\alpha-\varepsilon}},\ \varepsilon > 0 \text{ любое.}$$

Дается конструкция аппроксимирующих полиномов с указанным порядком приближения. В качестве таких полиномов можно брать средние арифметические отрезков ряда по полиномам Фабера для $f(z)$.

С. Н. Мергелян

7279. К аппроксимационной проблеме С. Н. Бернштейна. Фукс, Поллард (A note on Bernstein's approximation problem. Fuchs W. H. J., Pollard Harry), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 613—615 (англ.)

Пусть $K(u)$ — непрерывная функция, определенная на всей вещественной оси, C_0 — класс непрерывных на оси функций $f(u)$ с условием $f(u) \to 0$ при $u \to \pm\infty$. Доказывается, что если 1) существует последовательность полиномов $p_n(u)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} p_n(u) K(u) = 1,\ |p_n(u) K(u)| < \text{const},$$
$$-\infty < u < \infty,$$

2) функция $\dfrac{1}{K(u)}$ не является целой функцией первого порядка минимального типа, тогда система полиномов полна в классе C_0 с весом $K(u)$, т. е. для любой функции $f(u) \in C_0$

$$\inf_{\{p\}} \sup_{-\infty<u<\infty} |f(u) - p(u) K(u)| = 0.$$

Этот результат усиливает критерий полноты, ранее установленный Видавом (РЖМат, 1956, 2950).

Примечание референта. Рассуждения авторов доказывают несколько более общее предложение: Если $h(x)$, $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$, — произвольная весовая функция, для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty,$$

то из соотношений

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x),\ x \in E,\ h(x)|P_n(x)| < \text{const},$$
$$-\infty < x < \infty,$$

где E — произвольное множество, расположенное на вещественной оси, следует, что функция $f(x)$ на множестве E должна совпадать с некоторой целой функцией первого порядка минимального типа. С. Н. Мергелян

7280. Обобщенный принцип максимума для гармонических функций в трехмерном пространстве. Габриэл (An extended principle of the maximum for harmonic functions in 3-dimensions. Gabriel R. M.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 388—401 (англ.)

Доказываются следующие теоремы: 1. Поверхности уровня функции Грина некоторой выпуклой трехмерной конечной области строго выпуклы. 2. Предположим, что граница области D, содержащей бесконечно удаленную точку, выпукла. Пусть гармоническая в D функция $h(x, y, z)$ аналитична на бесконечности и такова, что $h \to 1$ при $\rho \to \infty$ и $h \to 0$ равномерно при приближении к границе D; при этих условиях поверхности $h = k$ будут строго выпуклы при $0 < k < 1$.

Эти теоремы обобщают и дополняют результаты Гергена относительно звездообразности поверхностей уровня функции Грина звездообразной области (Gergen, Amer. J. Math., 1931, **42**, 746—752). Доказательства частично опираются на теорему Гергена. Е. Д. Соломенцев

7281. Доказательство гипотезы Бибербаха для четвертого коэффициента. Гарабедян, Шиффер (A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient. Garabedian P. R., Schiffer M.), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 3, 427—465 (англ.)

Доказывается теорема: Для всего класса функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, имеет место точная оценка $|a_4| \leqslant 4$, причем знак равенства достигается функцией $w = z/(1 - e^{i\theta}z)^2$.

Эта теорема решает для a_4 в положительном смысле известную гипотезу Бибербаха о тейлоровских коэффициентах однолистных функций. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_4 > 0$.

Доказательство теоремы проводится при помощи ряда лемм, из которых основными являются следующие:

Лемма 1.1. Экстремальная в задаче максимума $|a_4|$ функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{z^2 f'^2(z)}{f^2(z)}\left[\frac{1}{f^3(z)} + \frac{3a_2}{f^2(z)} + \frac{2a_3 + a_2^2}{f(z)}\right] = \frac{1}{z^3} + \frac{2a_2}{z^2} + \frac{3a_3}{z} + 3a_4 + 3\bar{a}_3 z + 2\bar{a}_2 z^2 + z^3,$$

причем круг $|z| < 1$ отображается функцией на всю плоскость w с разрезом вдоль аналитических дуг, удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\frac{w'^2}{w^2}\left[\frac{1}{w^3} + \frac{3a_2}{w^2} + \frac{2a_3 + a_2^2}{w}\right] \leq 0.$$

Лемма 1.3. Коэффициенты a_2 и a_3 экстремальной функции удовлетворяют уравнениям: $a(0)=2a_2$, $a(1)=\frac{4}{3}a_2$, $b(0)=\frac{1}{3}(2a_3+a_2^2)$, $b(1)=a_3$, составляющим граничные условия задачи

$$\frac{da}{dt}=-\frac{4}{3}k,\quad \frac{db}{dt}=-\frac{2}{3}tk^2,$$

$$\operatorname{Im}\{t^2k^3-atk^2+bk\}=0,\ 0\leqslant t\leqslant 1$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — неизвестные функции, $k(t)=e^{i\varphi(t)}$ и $\varphi(t)$ — действительная аналитическая функция.

Лемма 1.1 была известна ранее, а лемма 1.3 установлена авторами при помощи вариации коэффициента a_4 с применением известных формул Левнера для тейлоровских коэффициентов однолистных функций. Общая идея доказательства теоремы: полагая $a_4\geqslant 4$, путем ряда последовательных оценок уточняется возможная область значений коэффициентов a_2 и a_3 для экстремальной функции, а затем доказывается, что в этой области граничная задача леммы 1.3 возможна только при $a_2=2$, $a_3=3$, откуда следует справедливость теоремы.

Г. В. Корицкий

7282. Дополнение к теории однолистных функций. Теоремы искажения. І. Гун Шэн (Contributions to the theory of schlicht functions. I. Distortion theorems. Kung Sun). Acta sci. sinica, 1955, 4, № 2, 229—249 (англ.)

Для класса S функций $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n$, регулярных и однолистных в единичном круге $|z|<1$, автор доказывает теорему: Если $f(z)\in S$, то

$$|zf'(z)/f(z)|\leqslant[(1+r)/(1-r)]\,|f(z)\,(1-r)^2/r|^{(1-r)^2/(1+r)^2}$$

при $|z|=r<1$

(в реферируемой статье в правой части неравенства опечатка). Заметим, что более сильную (но и более сложную) оценку дал Голузин для функций $f(z)$ с фиксированным $|f(z)|$. (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, 27).

В статье приводятся некоторые оценки $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ для функций класса S и класса $S(a)$ (подкласс S функций $f(z)$, для которых $c_2=a$).

Для функций класса S получена оценка

$$|c_n|\leqslant n\exp\left\{1-2\left(1-\frac{|f''(0)|}{4}\right)^2\right\}+O(\ln n)$$

В частности:

1) при $|c_2|\leqslant 2-\sqrt{2}$ $|c_n|\leqslant n+O(\ln n)$;

2) при $c_2=0$ $|c_n|\leqslant (n/e)+O(\ln n)$;

3) при $c_2=c_3=0$ $|c_n|\leqslant n/e^3+O(\ln n)$.

Обобщено на класс регулярных и однолистных в области $1<|\xi|<\infty$ функций вида $F_k(\xi)=\xi+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{nk+1}^{(k)}}{\xi^{nk+1}}$ неравенство Базилевича

$$\left|\ln\frac{F_k^k(\xi_1)-F_k^k(\xi_2)}{(F_k(\xi_1)-F_k(\xi_2))^k}\,\frac{(\xi_1-\xi_2)^k}{\xi_1^k-\xi_2^k}\right|\leqslant 2k$$

$$\sum_{\substack{i,j=0\\ i+j=k-2}}^{k-2}\times\left(\int_{|\xi_1|}^{\infty}\frac{x^{2i+1}\,dx}{x^{2k}-1}\right)^{1/2}\left(\int_{|\xi_2}^{\infty}\frac{x^{2j+1}dx}{x^{2k}-1}\right)^{1/2},$$

где ξ_1 и ξ_2 — две любые точки области $1<|\xi<\infty$.

В. Н. Телиянц

7283. Некоторые замечания об однолистных функциях и гармонических фукциях равномерно ограниченной вариации. Флетт (Some remarks on schlicht functions and harmonic functions of uniformly bounded variation. Flett T. M.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 59—72 (англ.)

Пусть $\sigma(z)$ — однолистная аналитическая функция в круге $|z|<1$, $\sigma(0)=0$, $\sigma'(0)=1$. Исследуется вопрос об условиях, при которых $\ln\sigma'(z)$ представляется формулой

$$\ln\sigma'(z)=-\pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-ze^{-i\psi})\,dU(\psi),\qquad(1)$$

где $U(\psi)$ — действительная периодическая функция ограниченной вариации на $[-\pi,\pi]$. Формула (1) имеет место, в частности, для однолистных функций, отображающих $|z|<1$ на выпуклую область, так как в этом случае $\operatorname{Re}\{1+[z\sigma''(z)/\sigma'(z)]\}>0$, откуда, используя известные результаты о представлении аналитических функций с положительной действительной частью, получим (1). Для решения указанной выше проблемы автор вначале изучает свойства гармонических в круге функций $u(\rho,\theta)$, представимых интегралом Пуассона от функции с ограниченной вариацией, после чего доказывает теорему, которая дает следующие необходимые и достаточные условия для справедливости равенства (1):

а) $$\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+|\sigma'(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant A,\quad 0<\rho<1,\qquad(2)$$

б) гармоническая функция $\arg\sigma'(\rho e^{i\theta})$ ($\arg\sigma'(0)=0$) имеет почти всюду при $\rho\to 1$ предел $U(\theta)$, причем предельная функция $U(\theta)$ является периодической функцией ограниченной вариации.

Далее автор изучает некоторые свойства класса T функций, регулярных и однолистных в $|z|<1$, допускающих представление (1) или, что равносильно (1), удовлетворяющих условию $\int_{-\pi}^{\pi}|d\arg\sigma'(\rho e^{i\theta})|\leqslant A$, $0<\rho<1$. Класс таких функций рассматривался Патеро (Paatero, Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1931, A33, № 9). Дается новое доказательство теоремы Патеро о том, что функции класса T будут непрерывны в круге $|z|\leqslant 1$, за исключением, быть может, конечного числа точек z_i на $|z|=1$, для которых $\sigma(z)\to\infty$ при $z\to z_i$. В заключение разбирается вопрос об оценке роста $\int_{-\pi}^{\pi}|d\arg\sigma'(z)|$ при $\rho=\to 1$ для произвольных однолистных $\sigma(z)$. Показывается, что в общем случае оценку $\int_{-\pi}^{\pi}|d\arg\sigma'|=\int_{-\pi}^{\pi}|Re(z\sigma''/\sigma')|\,d\theta=O\{(1-\rho)^{-1}\}$, получаемую из известного результата, что $|\sigma''/\sigma'|=O\{1-\rho)^{-1}\}$, существенно улучшить нельзя.

Примечание референта. В настоящее время известны примеры однолистных в круге функций, для которых условие (2) не имеет места (РЖмат, 1956, 4440). Однако такие примеры строились и ранее. Возьмём функцию $\sigma(z)$, конформно отображающую круг $|z|<1$ на жорданову область D, на границе которой существует множество E, линейной меры нуль, переходящее на окружности $|z|=1$ во множество положительной меры. Пример такой области построил М. А. Лаврентьев (Матем. сб., 1936, 1 (43), № 6, 815—846). Если бы для такой функции $\sigma(z)$ выполнялось (2), то $\sigma'(z)$ была бы функцией ограниченного вида, имела бы поэтому почти всюду угловые предельные значения и тогда множество E должно было бы переходить при конформном отображении во множество меры нуль, что было доказано также М. А. Лаврентьевым (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, 1950, изд. 2-е, стр. 293).

Г. Ц. Тумаркин

7284. О кругообразно симметричных функциях. Дженкинс (On circularly symmetric functions.

Jenkins James A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 4, 620—624 (англ.)

Пусть S есть класс функций вида $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, регулярных и однолистных в $|z|<1$. Пусть D есть область плоскости w, содержащая точку $w = 0$, и такая, что пересечение D с окружностью $|w| = R$ при $R<R_0$, $R_0>0$ состоит из всей этой окружности, а при $R_0 \leqslant R<R_1$ — из дуги $-l(R)<\Phi<l(R)$, где $0<l(R)\leqslant\pi$ и R_1 может быть равно ∞. Если R_1 конечно, то при $R\geqslant R_1 D$ не имеет общих точек с $|w| = R$. При этом R, Φ являются полярными координатами плоскости w и допускается, как особый случай, когда D есть круг $|w|<R_0$. Область D указанного вида называется кругообразно симметричной областью. Рассматривается подкласс Y функций из S, отображающих $|z|<1$ на кругообразно симметричные области. Функции класса Y называются кругообразно симметричными функциями. Через T обозначается класс типично вещественных функций, а именно класс функций $f(z)$ с разложением вышеуказанного вида, регулярных в $|z|<1$ и принимающих вещественные значения для вещественных z с $|z|<1$ и только для них. Доказываются следующие результаты:

1) Если $f(z)\in Y$ и $|z|<1$, то $\operatorname{Im}\{zf'(z)/f(z)\}\geqslant 0$ при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, $\operatorname{Im} zf'(z)/f(z)\}\leqslant 0$ при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$.

2) Если $f(z)\in Y$, то $f(z)$ отображает каждый круг $|z|<r$, $0<r<1$ на кругообразно симметричную область.

3) Если $f(z)\in Y$, то или $f(z)\equiv z$ или $a_2>0$.

4) Функция $f(z)$ принадлежит классу Y тогда и только тогда, когда или $f(z)\equiv z$ или обе функции $f(z)$ и $a_2^{-1}\{zf'(z)/f(z)-1\}$ принадлежат классу T.

Последний результат позволяет дать необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты функции $f(z)$ для того, чтобы $f(z)$ принадлежала классу Y. Отмечается, что аналогичные результаты могут быть получены для функций, аналогично связанных с другими формами симметризации, например с симметризацией Штейнера. Ю. Е. Аленицын

7285. Одно замечание к задаче коэффициентов. Кучарев П. П., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 15—18

Доказана условная теорема: Если функция, дающая в классе S функций

$$z = f(w) = w + c_2w^2 + \ldots + c_nw^n + \ldots,$$

однолистных в круге $|w|<1$, функционалу $\operatorname{Re} c_n$ максимум, отображает $|w|<1$ на область B, ограниченную отрезками прямых, то $\operatorname{Re} c_n\leqslant n$. И. Е. Базилевич

7286. Мажорантная область для выражения $I = \ln\dfrac{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}}{f(z)^\lambda}$ в классе S. Лебедев Н. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 8, 29—41

Рассматривается задача определения множества D всех значений, принимаемых в фиксированной точке z, $|z|<1$, функционалом $I = \ln\dfrac{z^\lambda f'(z)^{1-\lambda}}{f(z)^\lambda}$ (λ вещественно) на классе S функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярных и однолистных в $|z|<1$.

Привлекая вариационный метод Г. М. Голузина и некоторые новые соображения, автор получает дифференциальное уравнение для функций $f(z)\in S$, которым соответствуют «неособые» граничные точки I_0 области D (точки, для которых существует $a\notin D$ такое, что $|I-a|$, $I\in D$, достигает минимума при $I = I_0$). Исследование этого уравнения приводит по существу к полному решению задачи, поскольку она сводится к определению корней алгебраического уравнения 6-й степени. В частных случаях автор получает новое решение ряда известных задач, например задачи о максимуме $|\arg f'(z)|$, а также точное решение задачи о максимуме и минимуме $\operatorname{Re} I$. П. П. Куфарев

7287. Асимптотическое поведение p-листных функций. Хайман (The asymptotic behaviour of p-valent functions. Hayman W. K.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 19, 257—284 (англ.)

В классическом определении функция $f(z)$ называется p-листной в области Δ, если p — целое положительное число и уравнение $f(z) = w$ имеет не более p корней в Δ для всякого комплексного w. Для регулярных и p-листных в круге $|z|<1$ функций $f(z) = \sum_0^\infty a_nz^n$ известны оценки $M(r, f) = \max_{|z|=r}|f(z)|$ и $I_1(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f re^{i\varphi})|\,d\varphi$. Картрайтом было впервые доказано (Cartwright M. L., Math. Ann., 1935, 3, 98—118) неравенство

$$M(r, f)<A(p)\,\mu_p(1-r)^{-2p} \quad (0<r<1), \qquad (1)$$

где $\mu_p = \max_{0\leqslant k\leqslant p}|a_k|$, и $A(p)$ зависит только от p. Следствием этого и теоремы площадей, как показал Бернацкий (Biernacki M., C. r. Acad. sci., 1936, 203, 449—451), является неравенство

$$I_1(r, f)<A(p)\,\mu_p(1-r)^{1-2p} \qquad (2)$$

и, следовательно, поскольку $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})e^{-in\varphi}d\varphi$ и можно положить $r = 1-n^{-1}$, неравенство

$$|a_n|<A(p)\,\mu_p n^{2p-1}. \qquad (3)$$

Эти результаты были обобщены Спенсером (Spencer D. C., Proc. London Math. Soc., 1942, (2), 47, 201—222; Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 48, 418—435) на случай p-листных функций, обладающих более общим свойством: каждый круг с центром в точке $w = 0$ римановой поверхности функции $w = f(z)$ покрывает на ней множество точек, имеющее плоскую меру, не превышающую p-кратной площади этого круга. В определении Спенсера p может быть любым положительным числом. Тогда неравенство (1) остается верным всегда, но (2) только при $p>2^{-1}$ и (3) только при $p>4^{-1}$.

Автор вводит промежуточное по общности определение p-листной функции и доказывает, что для фиксированной функции $f(z)$ величины порядка O в неравенствах (1), (2) и (3) либо могут быть заменены величинами порядка o, либо там имеет место асимптотическое равенство с сохранением O. Некоторые из доказанных здесь результатов были анонсированы (РЖМат, 1955, 696).

Автор называет функцию $f(z)$ p-листной в круге $|z|<1$ или кольце $r_0<|z|<1$, если $p>0$ и выполнены следующие условия: 1) имеет место разложение функции $f(z)/z^\mu$, $0\leqslant\mu<1$, в ряд Лорана,

$$f(z) = z^\mu\sum_{-\infty}^{\infty} a_nz^n \quad (r_0<|z|<1), \qquad (4)$$

причем в случае многозначности $f(z)$ рассматривается какая-нибудь фиксированная ее ветвь; в частности, $f(z) = z^\mu\Sigma_0^\infty a_nz^n$, $|z|<1$; 2) любая окружность $|w| = R$ покрывает на римановой поверхности функции $w = f(z)$ множество точек, имеющее линейную меру, не превышающую p-кратной длины этой окружности.

Теорема 1. Если функция (4) p-листна в кольце $r_0<|z|<1$, то существует конечный предел

$$\alpha = \lim_{r\to 1}(1-r)^{2p}M(r, f), \qquad (5)$$

причем при $p > 4^{-1}$ существует

$$\lim_{n\to\infty}(|a_n|/p^{2p-1}) = \alpha/\Gamma(2p). \qquad (6)$$

Теорема 2. Если функция $f(z) = z^p(1 + a_1 z + \cdots)$ p-листна, $p > 0$, в круге $|z| < 1$, то $r^{-p}(1 - r^{2p}) \times \times M(r, f)$ строго убывает с возрастанием r, $0 < r < 1$, откуда $\alpha < 1$ в (5), за исключением $f(z) = z^p(1 - ze^{i\theta})^{-2p}$.

Теорема 3. Если функция $f(z)$ p-листна и $f(z) \neq 0$ в круге $|z| < 1$, то $[(1-r)/(1+r)]^{2p} M(r, f)$ строго убывает с возрастанием r, $0 < r < 1$, откуда $\alpha < 4^p |f(0)|$ в (5), за исключением $f(z) = f(0) \times \times [(1 + ze^{i\theta})/(1 - ze^{i\theta})]^{2p}$.

Теорема 4. Если функция k-кратной симметрии $f(z) = z^{\mu}\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_{kn} z^{kn}$ p-листна в кольце $r_0 < |z| < 1$, то существует конечный предел $\alpha = \lim_{r\to 1}[(1 - r^k)^{2p/k} \times \times M(r, f)]$, причем при $1 \leqslant k < 4p$ существует $\lim_{n\to\infty}(|a_{kn}|/n^{2p/k-1}) = \alpha/\Gamma(2p/k)$. В случае p-листной в круге $|z| < 1$ функции $f(z) = z^p(1 + a_k z^k + \cdots)$ имеем $\alpha < 1$, за исключением $f(z) = z^p(1 - z^k e^{i\theta})^{-2p/k}$. При $p = k = 1$ для однолистной в круге $|z| < 1$ функции $f(z) = z + \Sigma_2^{\infty} \sigma_n z^n$ имеем $\alpha = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n/n) < 1$, за исключением $f(z) = z(1 - ze^{i\theta})^{-2}$, откуда для каждой фиксированной функции этого класса и достаточно больших n следует известное неравенство, впервые предположенное Бибербахом: $|\sigma_n| \leqslant n$.

Теорема 5. Если функция $f(z) = z^{\mu}\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ p-листна в кольце $r_0 < |z| < 1$ и $\alpha = \lim_{r\to 1}(1 - r)^{2p} M(r, f) > 0$, то существует радиус этого кольца, $\arg z = \theta_0$, обладающий следующими свойствами:

1) $|f(re^{i\theta_0})| \sim M(r, f) \sim \alpha(1 - r)^{-2p}$, $r \to 1$;

2) $f(re^{i\theta}) \sim f(re^{i\theta_0})\left[\dfrac{1-r}{1-re^{i(\theta-\theta_0)}}\right]^{2p}$ равномерно при $r \to 1$ и $|\theta - \theta_0| < K(1 - r)$ для некоторого фиксированного K;

3) при $p > 4^{-1}$ $na_n \sim f[(1 - n^{-1})\, e^{i\theta_0}]e^{-i(n+\mu)\theta_0}/\Gamma(2p)$, $n \to \infty$;

4) если $0 < \eta < 2p$, то существуют такие постоянные $K_1 < 1$, K_2, K_3, что при $K_1 < r < 1$, $K_2(1 - r) \leqslant \leqslant |\theta - \theta_0| \leqslant \pi$ справедливо неравенство

$$|f(re^{i\theta})| < K_3|\theta - \theta_0|^{2p-\eta}(1 - r)^{\eta};$$

5) если $\lambda(r) = \arg f(re^{i\theta_0})$, то $(1 - r)\lambda'(r) \to 0$ при $r \to 1$ и $\int_{k_1}^{1}(1 - r)\lambda'^2(r)\, dr < \infty$.

Работа содержит еще ряд интересных предложений.

И. Е. Базилевич

7288. Замечание к предыдущей статье. Вильсон (Note on a previous paper. Wilson R.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 18, 99—101 (англ.)

Реферируемая статья примыкает к статье Вильсона (РЖМат, 1954, 4793). С помощью критерия Кронекера рациональности функции $f(z) = \Sigma_0^{\infty} c_n z^{-n-1}$ автор получает детерминантный критерий того, что целая функция $F(z) = \Sigma_0^{\infty}[c_n z^n/\Gamma(n\sigma + \sigma)]$ представляется в форме конечной линейной комбинации вида $E_{\rho}(\alpha z)$ и $\dfrac{1}{m!}\dfrac{\partial}{\partial\alpha^m}E_{\rho}(\alpha z)$, где $E_{\rho}(\alpha z)$ — функция Миттаг—Леффлера. Дается также критерий того, что главный член функции $F(z)$ совпадает с такой линейной комбинацией.

Б. Я. Левин

7289. Асимптотическое поведение целой функции. Клуни (The asymptotic behaviour of integral functions. Clunie J.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 21, 1—3 (англ.)

Оценивается скорость приближения целой функции к ее асимптотическим значениям. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — асимптотические значения, к которым стремится целая функция $f(z)$ соответственно вдоль путей $L_1, L_2, \ldots, L_n$ и

$$\varepsilon(r) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\max_{\substack{|z|\geqslant r\\ z\in L_i}}|f(z) - a_i|\}.$$

Очевидно, что $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Автор устанавливает следующие неравенства:

Если $f(z)$ имеет асимптотические значения, то

$$\varepsilon(r) \geqslant \frac{[M(r)]^4}{[M(re^{2\pi})]^3}\{1 + o(1)\}.$$

Если $f(z)$ имеет два различных асимптотических значения a и b, то

$$\varepsilon(r) \geqslant \frac{|a - b|^3}{16\, M(r)\, M(re^{\pi})}\{1 + o(1)\}.$$

Из первого неравенства автор выводит оценку

$$\varepsilon(r) \geqslant \frac{[M(r)]^2}{M(re^{6\pi})}\{1 + o(1)\}.$$

Б. Я. Левин

7290. О теореме Коллингвуда и Валирона. Клуни (On a theorem of Collingwood and Valiron. Clunie J.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 2, 228—231 (англ.)

Пусть $f(z)$ — функция, регулярная в области D, ограниченной простой замкнутой кривой L, проходящей через изолированную существенно особую точку α функции $f(z)$.

Кроме того, $f(z)$ ограничена на L и непрерывна на L всюду, кроме, быть может, точки α. Вводятся обозначения

$$m(r) = \max_{\substack{|z-\alpha|\leqslant r\\ z\in L}}|f(z)|; \qquad M(r) = \max_{\substack{|z-\alpha|=r\\ z\in D}}|f(z)|.$$

Коллингвуд и Валирон показали, что если $\lim_{r\to 0} M(r) = \infty$, то при $k = (2\sqrt{3} + 1)^{-36}$ и всех достаточно малых значений r справедливо неравенство $M(kr)\, m(r) > M^2(r)$.

В реферируемой статье автор доказывает это неравенство другим путем и при этом получает большее значение для k ($k = e^{-4\pi}$). Автор применяет это неравенство к оценке скорости, с которой целая функция $f(z)$ стремится по некоторому пути L к асимптотическому значению a.

Если

$$M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)| \text{ и } \varepsilon(r) = \max_{\substack{|z|\geqslant r\\ z\in L}}|f(z) - a|,$$

то

$$\varepsilon(r) > \{1 + o(1)\}\,[M^2(r)/M(re^{4\pi})].$$

Это неравенство точнее ранее полученного автором (реф. 7289). (В последней формуле опечатка: вместо 4π напечатано -4π).

Б. Я. Левин

7291. О четных целых функциях с корнями, имеющими плотность. Редхеффер (On even entire functions with zeros having a density. Redheffer R. M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 1, 32—61 (англ.)

Рассматриваются функции вида

$$F(x) = x^m \prod_1^\infty (1 - x^2/\lambda_k^2), \qquad (1)$$

где λ_k — вещественные, $\sum_1^\infty \lambda_k^{-2} < \infty$ — целое положительное число. Через $\Lambda(u)$ обозначено число точек λ_k на интервале $(0, u)$. Доказано:

1. Если $\Lambda(u)/u$ — ограничено и при любом положительном v

$$\lim_{x\to\infty} \left\{ \frac{\Lambda(vx)}{vx} - \frac{\Lambda(x/v)}{x/v} \right\} = 0, \qquad (2)$$

то

$$\ln^+ |F(x)| = o(|x|). \qquad (3)$$

2. Существует такая последовательность $\{\lambda_k\}$, что $\Lambda(u)/u$ — ограниченно, $\operatorname{Inf}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, (2) не имеет места, но выполняется (3).

Если $|\Lambda(u) - Du| \leqslant H(u)$, где $H''(u) < 0$, $\lim H'(u) = 0$, $\lim H(u) = \infty$, то $|F(x)| < G(x)$, где $G(x) \sim 4H(x) \times \ln[x/H(x)]$. Автор исследует связь между ростом функции $F(z)$ по мнимой оси и плотностью точек $\{\lambda_k\}$. В частности, показано, что

$$\tau D \leqslant \overline{\lim}_{y\to+\infty} [(\ln |F(iy)|/y)] \leqslant \pi D, \qquad (4)$$

где $D = \overline{\lim}_{u\to\infty} [\Lambda(u)/u]$ и τ — положительный корень уравнения $s \ln s = 2(s-1)$. Оценка (4) точная. Показано, что

$$\int_0^\infty \left| \frac{\ln |F(iy)|}{y} \right|^2 \frac{dy}{y} < \pi^2 \int_0^\infty \left[\frac{\Lambda(u)}{u} \right]^2 \frac{du}{u}$$

и

$$\int_0^\infty \left| \frac{F'(iy)}{F(iy)} \right|^2 \frac{dy}{y} < \pi^2 \int_0^\infty \left[\frac{\Lambda(u)}{u} \right]^2 \frac{du}{u}.$$

Оба неравенства справедливы при ограниченной правой части. Имеет место также следующая тауберова теорема:

$$\lim_{y\to\infty} \{iF'(iy)/F(iy)\} = \pi \lim_{u\to\infty} [\Lambda(u)/u],$$

причем существование одного из пределов влечет существование другого. Получены также новым путем некоторые результаты Винера и Пейли, Левинсона, Пфлюгера и др. Результаты применяются к исследованию вопроса о полноте системы функций на конечном интервале. Б. Я. Левин

7292. О целых алгебраических функциях с двумя ветвями. Чао Т. И., Матем. сб., 1955, **37**, № 3, 573—576

Рассматривается многозначная функция $x(y)$ с двумя ветвями, определяемая уравнением

$$F(x, y) = x^2 + 2a_1(y)\, x + a_2(y) = 0,$$

где $a_1(y)$ и $a_2(y)$ — целые функции комплексной переменной y. Устанавливается теорема: Если одна из ветвей функции $x(y)$, например $x_1(y)$, является голоморфной и принимает значение α для $y = \infty$, то либо α будет предельной точкой множества абсцисс двойных точек кривой $F(x, y)$, либо существует контур, уходящий в бесконечность, вдоль которого ветвь $x_2(y)$ стремится к α. В. П. Громов

7293. О голоморфных функциях, производные которых имеют исключительное значение. Сюн Цзинлай (Sur les fonctions holomorphes dont les dérivées admettent une valeur exceptionnelle Hiong King-Lai), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1955, 72, № 2, 165—197 (франц.)

Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$. Вводится понятие исключительного значения B (и. з. B) для функции, $f(z)$. Число a называется и. з. B функции $f(z)$, если

$$\overline{\lim}_{r\to 1} N(r, a, f)/\ln(1-r)^{-1} \leqslant \tau < \infty. \qquad (1)$$

Семейство $\{f\}$ называется принимающим и. з. B a равномерно, если для всех функций семейства выполняется (1) с фиксированным τ. Если $\overline{\lim}_{r\to 1} T(r, f)/\ln(1-r)^{-1} = \infty$, то $f(z)$ имеет не более двух и. з. B.

С помощью и. з. B формулируется ряд теорем, устанавливающих оценки модуля голоморфной функции, критерии нормальности и квазинормальности, а также теоремы типа теоремы Ландау (Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, М.—Л., 1948, стр. 268). Следующие теоремы являются типичными.

Теорема А. Пусть $f(z) = c_0 + c_h z^h + \ldots$, $c_0 \neq 0, 1$, $h \neq 0$, голоморфная функция в $|z| < 1$, имеющая в $|z| < 1$ не более p нулей $(a_\nu, \nu = 1, \ldots, p)$, $d \leqslant \min |a_\nu|$. Обозначим, γ_ν кружки $|z - a_\nu| < \delta$, $C' : |z| < R' < 1$. Тогда, если $w = 1$ является и. з. B для $f(z)$ с постоянной τ, то в $C' \setminus \bigcup \gamma_\nu$ имеет место неравенство

$$\ln |f(z)| < (R' - r)^{-3} [H(\Omega_0 + \omega) + K \ln 2 (R' - r)^{-1}],$$

где $\Omega_0 = |\ln c_0| + \ln^+ |c_0 - 1|^{-1}$, $\omega = -\ln r - p \ln(d\delta)$, H и K — числовые постоянные, зависящие от τ и R'.

Теорема III. Пусть дано семейство голоморфных в $|z| < 1$ функций вида $f(z) = c_0 + \ldots + c_k z^k + \cdots$ $\cdots (c_0, c_k \neq 0)$. Пусть каждая функция семейства имеет не более p нулей, модули нулей равномерно ограничены снизу, c_0 равномерно ограничены сверху. Тогда, если $w = 1$ является равномерным и. з. B для $\{f^{(k)}\}$, $k \neq 1$, $n(r, 1, f^{(k)}) < \overline{n}(r) < \infty$ для всех f семейства, то семейство является нормальным в каждом круге, содержащемся в $|z| < 1$ А. А. Гольдберг

7294. Множества предельных значений для функций, мероморфных в единичном круге. Носиро (Cluster sets of functions meromorphic in the unit circle. Noshiro Kiyoshi), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1955, **41**, № 6, 398—401 (англ.)

Обобщаются некоторые результаты о множествах предельных значений мероморфных функций, принадлежащие Оцука, Ловатер (РЖМат, 1954, 2568), Лехто (РЖМат, 1954, 2175) и Сторвику. Пусть $w = f(z)$ — мероморфная функция в единичном круге D: $|z| < 1$, $z_0 = e^{i\theta_0}$ — фиксированная точка на C: $|z| = 1$ и A открытая дуга C, содержащая z_0. Пусть далее E — множество со свойствами: $z_0 \in E \subset A$, $mE = 0$. С каждой точкой $e^{i\theta} \in A - E = CE$ свяжем произвольную простую кривую $\Lambda(e^{i\theta}) \subset D$, оканчивающуюся в $z = e^{i\theta}$. Определим $S_{z_0}^{(D)}$ как множество всех тех значений α, для каждого из которых существует $\{z_n\}$, $z_n \in D$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$, аналогично определяется $S_\Lambda(e^{i\theta})$ (теперь допускается лишь $z_n \in \Lambda$). Через $R_{z_0}^{(D)}$ обозначим множество значений, принимаемых $f(z)$ бесконечное число раз в любой окрестности z_0, и $\Gamma_{z_0}^{(C)} = \bigcap_{r>0} M_r$, где $M_r = \overline{\bigcup S_\Lambda(e^{i\theta})}$, причем суммирование ведется по всем $e^{i\theta} \in CE \cap |z - z_0| < r$. Тогда из определения следует $\Gamma_{z_0}^{(C)} \subset S_{z_0}^{(D)}$, но во многих случаях оказывается, что $S_{z_0}^{(D)} \neq \Gamma_{z_0}^{(C)}$

В работе исследуются соотношения между $S_{z_0}^{(D)}$, $\Gamma_{z_0}^{(C)}$ и $R_{z_0}^{(D)}$. Приводится доказательство теоремы:

Теорема 1. $S_{z_0}^{(D)} - \Gamma_{z_0}^{(C)}$ — открытое множество. Кроме того, даются формулировки трех других теорем, которые могут быть доказаны рассуждениями, подобными приведенным при доказательстве теоремы 1. Приведем формулировки теорем 2 и 3.

Теорема 2. Если $\alpha \in S_{z_0}^{(D)} - \Gamma_{z_0}^{(C)}$ является исключительным значением $f(z)$ в окрестности z_0, то либо α будет асимптотическим значением $f(z)$ в z_0, либо существует последовательность точек $z_n' \in C$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z_0$, такая, что α будет асимптотическим значением $f(z)$ в каждой z_n'.

Теорема 3. Если $\Omega_0 = S_{z_0}^{(D)} - \Gamma_{z_0}^{(C)}$ не пусто, то $\Omega_0 - R_{z_0}^{(D)}$ имеет емкость нуль. Г. Ц. Тумаркин

7295. **Множество покрытия функции, мероморфной в единичном круге.** Эглстон (The range set of a function meromorphic in the unit circle. Eggleston H. G.), Proc. London. Math. Soc., 1955, 5, № 20, 500—512 (англ.)

Пусть функция $w = f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$. Множеством покрытия $f(z)$: $R(f)$ (the range set) называется множество таких a, что $f(z)$ имеет бесконечное множество a-точек. Известно (Gross W., Monatsh. Math. Phys., 1918, 29, 1—47), что для того чтобы множество было множеством покрытия для некоторой мероморфной функции, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить как пересечение монотонно убывающей последовательности связных областей. В реферируемой статье изучаются свойства множеств, допускающих такое представление.

Пусть K — замкнутое множество, $C_1, C_2, \ldots$ — компоненты его дополнения. Выберем по одной точке $p_i \in C_i$; $P = \bigcup p_i$. Множество точек сгущения P назовем основной (в оригинале — the nub) множества K и обозначим $n(K)$. $n(K)$ не определяется однозначно множеством K. Пусть G — некоторое открытое множество. K — его дополнение, G_1 — сумма тех компонент дополнения к $n(K)$, которые содержат точки из G. Далее определим G_α, где α — некоторое порядковое число, следующим образом. Если α — порядковое число первого рода (Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948, гл. III, § 3), то G_α получается из $G_{\alpha-1}$, как G_1 из G; если α — порядковое число второго рода, то $G_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$. Дополнение к $G_\zeta = \bigcup G_\alpha$ обозначается $N(G)$ и называется крайней основой (the ultimate nub) открытого множества G. Доказывается, что $N(G)$ однозначно определяется заданием G.

Главным результатом статьи является следующая теорема: Для того чтобы открытое множество G было представимо как пересечение монотонно убывающей последовательности связных областей, необходимо и достаточно, чтобы $N(G)$ было пустым множеством.

Построен пример открытого множества с непустой крайней основой, которое, следовательно, не является множеством покрытия ни для какой мероморфной функции $f(z)$. Как отмечает автор в примечании, аналогичный пример был построен независимо от него Рудиным (РЖМат, 1956, 2941).

Доказано также, что для того чтобы некоторое G_δ-множество K было представимо как пересечение монотонно убывающей последовательности связных областей, необходимо и достаточно, чтобы каждое открытое множество $G \supset K$ такое, что в каждой компоненте G содержится точка из K, имело пустую крайнюю основу. Приводятся некоторые свойства таких множеств. А. А. Гольдберг

7296. **О последовательностях мероморфных функций с равномерно ограниченными площадями римановых поверхностей над сферой.** Тумаркин Г. Ц., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 199—202

Пусть $w = f(z)$ — мероморфная в круге $|z| < 1$ функция и $A(f)$ — площадь римановой поверхности над w-сферой, на которую $w = f(z)$ отображает $|z| < 1$, измеренная в сферической метрике. Если $A(f) < \infty$, то $f(z)$ почти всюду на $|z| = 1$ имеет угловые граничные значения $f(e^{i\theta})$. Рассматривается семейство функций $\{f_n(z)\}$, для которого

$$A(f_n) \leqslant C, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

и устанавливается связь между сходимостью $\{f_n(e^{i\theta})\}$ и сходимостью $\{f_n(z)\}$ внутри $|z| < 1$. Типичные результаты следующие.

Теорема 2. Если для $\{f_n(z)\}$ выполняется условие (1) и $\{f_n(z)\}$ всюду внутри $|z| < 1$ с возможным исключением конечного числа иррегулярных точек равномерно сходится к $f(z)$ (может быть $f(z) \equiv \infty$ то $\{f_n(e^{i\theta})\}$ сходится по мере к $f(e^{i\theta})$. Здесь сходимость $\{f_n(e^{i\theta})\}$ по мере нельзя заменить обычной сходимостью, даже если вместо (1) потребовать, чтобы $f_n(z)$ были однолистны.

Теорема 5. Пусть дана последовательность $\{f_n(z)\}$ голоморфных в $|z| < 1$ функций, удовлетворяющих условию (1). Тогда, если $\{f_n(e^{i\theta})\}$ сходится по мере на множестве E, $mE > 0$, причем предельная функция для $\{f_n(e^{i\theta})\}$ на множестве положительной меры $\neq \infty$, то $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $|z| < 1$ к некоторой функции $f(z)$, а $\{f_n(e^{i\theta})\}$ сходится по мере на $|z| = 1$ к $f(e^{i\theta})$.

В примере на стр. 202 опечатка. Должно быть

$$\varphi_k(z) = k \prod_{i=k+1}^{k+N} \frac{z - \alpha_i}{1 - z\bar{\alpha}_i}.$$

А. А. Гольдберг

7297. **Об областях полноты систем аналитических функций многих комплексных переменных.** Еремин С. А., Сб. науч. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1955, вып. 5, 24—29

Дается определение области полноты системы аналитических функций многих комплексных переменных. Излагается доказательство теоремы о том, что область полноты является областью регулярности. (РЖМат, 1956, 374). Б. А. Фукс

7298. **Обратные краевые задачи.** Тумашев Г. Г., Нужин М. Т., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1955, 115, № 6, 1—167

Систематическое изложение теории обратных краевых задач и ее приложений к вопросам гидромеханики, теории фильтрации, теории упругости. В первых двух главах рассматривается задача: найти область G и аналитическую в ней функцию f так, чтобы на границе G функция f принимала заданные от дуговой абсциссы граничные значения. Рассмотрены случаи: G конечна и односвязна, f регулярна, имеет простой полюс в области и на границе; G бесконечна, f регулярна, имеет простой полюс в бесконечности, простой полюс и логарифмическую особенность; G двусвязна и конечна, f — регулярна; G двусвязна, содержит бесконечно удаленную точку, f имеет простой полюс в бесконечности. Делаются замечания о задачах, в которых f — функция одной из прямоугольных или одной из полярных координат.

Третья и четвертая главы содержат задачи о построении крыловых профилей и гидродинамических решеток по заданной на их поверхности величине скорости или давления в функции дуговой абсциссы; для решения задач, в которых давление задано в виде хордовой диаграммы, используется метод последовательных приближений.

В пятой главе решается задача об определении контура основания гидротехнического сооружения по заданному распределению скорости фильтрации. Приводятся примеры. В шестой главе приближенно решается обратная задача для $f+\Delta f$ в предположении, что для f задача решена, $\Delta f(1)$, $\Delta f'$, $\Delta f''$ малы. Решение используется для вывода формул, дающих вариацию профиля при вариации распределения скорости на его поверхности.

Решается задача об изменении формы основания гидротехнического сооружения, соответствующего заданному изменению распределения скорости фильтрации.

В седьмой главе задача об определении формы цилиндрического стержня, который при кручении испытывает заданные продольные смещения, сводится к обратной задаче для аналитических функций. Рассматривается задача построения сопла по заданному на его стенках распределению сверхзвуковых скоростей. В основу здесь положено решение задачи о газовых струях, предложенное С. А. Христиановичем (Прикл. матем. и механика, 1947, 9). Ставится новая задача: найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0,$$

и кривую l, несущую данные Коши, таким образом, чтобы на l функции u и du/dx принимали заданные значения $f_1(y)$ и $f_2(y)$ и, кроме того, $u(x,y)$ принимала заданные значения на характеристике $x=x_0$. Однако решение задачи содержит ошибку (неправильно выписана формула Римана на стр. 155).

Изучаются задачи о построении препятствий, обтекаемых с отрывом струй, по заданному распределению скорости на их поверхности — в бесконечном потоке и в потоке, ограниченном параллельными стенками. Последняя задача (стр. 156—158) явно не формулируется. Кратко описывается один приближенный метод решения задачи теории струй для препятствия, помещенного между параллельными стенками.

Во всей статье конструируются решения задач; вопросы существования и единственности решения, как правило, не рассматриваются. Библ. 106 назв.

С. Н. Андрианов

7299. Обобщения формулы обращения теории тонкого крыла. Чжен, Ротт (Generalizations of the inversion formula of thin airfoil theory. Cheng H. K., Rott N.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 3, 357—382 (англ.)

Строится формула для решения задачи смешанного типа, которая имеет приложение в теории тонкого крыла: требуется определить функцию $w=u+iv$, голоморфную в верхней полуплоскости, когда вдоль отрезков действительной оси попеременно заданы значения действительной и мнимой частей u, v (рассматривается и более общая задача: вдоль отрезков действительной оси задаются значения $g_n u+h_n v$, g_n и h_n — действительные постоянные).

Результаты статьи известны в литературе. Например, в книге Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения. М.—Л., 1946) даны формулы для решения различных смешанных задач теории аналитических функций (там приведена и формула М. В. Келдыша и Л. И. Седова, решающая упомянутую выше задачу), формулы обращения сингулярного интеграла, взятого по совокупности разомкнутых дуг.

С общей точки зрения вопрос обращения сингулярных интервалов, когда область интегрирования есть система интервалов оси, рассмотрен в статье Н. И. Ахиезера (Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, 9, № 4, 275—290). Г. Ф. Манджавидзе

7300. Постоянная Блоха для выпуклого отображения. Чжан Мин-юн (凸像象形照相的 Bloch 常數 · 張鳴鏞), 數學進展, Шусюэ цзиньчжань, 1955, **1**, № 2, 387—391 (кит.)

7301. О дифференцируемости функций комплексного переменного. Трохимчук Ю. Ю. Науч. зап. Укр. полигр. ин-та, 1955, **11**, 137—141

Пусть $f(z)$ — однозначная и непрерывная в некоторой области D плоскости комплексного переменного $z=x+iy$. Для данной точки z этой области и для всякого заданного числа $\varepsilon>0$ рассмотрим множество M_ε значений разностного отношения $[f(z+\Delta z)-f(z)]/\Delta z$ для всех таких комплексных значений Δz, что 1) $\Delta z\neq 0$; 2) $|\Delta z|\leqslant\varepsilon$; 3) точка $z+\Delta z$ принадлежит области D. Пересечение замыканий всех таких множеств M_ε для всех положительных ε (точка z фиксированная) Н. Н. Лузин называет множеством моногенности функции $f(z)$ в точке z и обозначает $\mathfrak{M}_z$ (Федоров В. С., Успехи матем. наук, 1952, 7, № 2, 7—16). Автор доказывает, что если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в некоторой точке z, то множество $\mathfrak{M}_z$ функции $f(z)=u+iv$ является окружностью или точкой. Даются примеры 1) такой $f(z)$, у которой одно из множеств $\mathfrak{M}_z$ не является жордановой кривой, 2) такой $f(z)$, у которой множество $\mathfrak{M}_z$ есть полная плоскость в каждой точке z, кроме, быть может, множества точек плоской меры нуль в любом конечном круге (и указывается, что можно построить пример $f(z)$, имеющей почти в каждой точке z какие угодно производные числа). Имеются опечатки. В. С. Федоров

7302. О функциях p-значных в среднем на окружности. Дженкинс (On circumferentially mean p-valent functions. Jenkins James A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 2, 423—428 (англ.)

Пусть F_p — класс регулярных в $|z|<1$ функций, которые представимы рядом Маклорена вида $f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+a_{p+2}z^{p+2}+\ldots$ и которые p-значны в среднем на окружности, т. е. на римановой поверхности, на которую $f(z)$ отображает $|z|<1$; дуги, лежащие над $|w|<\rho$, $0<\rho<\infty$, имеют суммар радианную меру не больше $2\pi p$. Доказывается, что если $f(z)\in F_1$, $0<r_1\leqslant r_2<1$, $0\leqslant\theta<2\pi$, то $|f(-r_1e^{i\theta})|+|f(r_2e^{i\theta})|\leqslant r_2/(1-r_2)^2+r_1/(1+r_1)^2$, равенство достигается для функции $z(1-ze^{-i\theta})^{-2}$; $|a_3|\leqslant 3$. Если $f(z)\in F_p$, то $|p^{-1}a_{p+2}+2^{-1}p^{-2}(1-p)a_{p+1}^2|\leqslant 3$, $|a_{p+2}|\leqslant 2p^2+p$; равенства достигаются для функции $z^p(1-ze^{i\theta})^{-2p}$.

Доказательство опирается на следующую теорему: Пусть над $0<|w|<\infty$ лежит односвязная риманова поверхность; радианная мера лежащих на ней дуг, проектирующихся в $|w|=R$, равна $l(R)$, $0\leqslant l(R)\leqslant\infty$. Проводя разрез внутри этой римановой поверхности по кусочно-аналитической дуге γ, получаем двусвязную риманову поверхность D с модулем M (т. е. D конформно эквивалентна $1<|z|<M$). Пусть $R_1=\min|w|$, $R_2=\max|w|$, когда $w\in\gamma$. Возьмем односвязную риманову поверхность, которая является подобластью римановой поверхности логарифма, определяемой соотношением $-l(R)/2<\arg w<l(R)/2$. Проводя разрез

по отрезку $\arg w = 0$, $R_1 \leqslant |w| \leqslant R_2$, получим двусвязную риманову поверхность D^* с модулем M^*. Показано, что $M^* \geqslant M$. А. А. Гольдберг

7303. Об аналитических функциях, определенных неалгебраическими дифференциальными уравнениями. **Журкеску** (Asupra funcţiilor analitice definite prin ecuaţii diferenţiale nealgebrice. Jurchescu M.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 2, 347—354 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть риманова поверхность R над w-сферой определена заданием внутреннего по Стоилову отображения $w = f(p)$ двумерного многообразия V в w-сферу (Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950, гл. VIII, §§ 1—3). Путь $l: w = w(t)$, $0 \leqslant t < 1$, начинающийся в $w_0 \in f(V)$, называется переносимым на V в точке $p_0 \in f^{-1}(w_0)$, если на V существует путь $\lambda: p = p(t)$, $0 \leqslant t < 1$, $p(0) = p_0$, такой, что $f[p(t)] = w(t)$, $0 \leqslant t < 1$. Поверхность R называется принадлежащей к классу (I) (Stoilov S., Ann. Inst. H. Poincaré, 1932, 2, 233—266; ср. также Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, п. 239), если для всякого пути $l_0, w_0 \in f(V)$, и произвольном выборе $p_0 \in f^{-1}(w_0)$ существует путь l, имеющий те же начало и конец, что и l_0, и лежащий в произвольно малой окрестности l_0, такой, что l переносим на V в точке p_0.

Доказывается, что всякий интеграл $w = f(z)$ уравнения $w' = M(z, w)$, где $M(z, w)$ — мероморфная функция от z и w, $|z| < \infty$, $|w| < \infty$, определяет над z-плоскостью и w-плоскостью римановы поверхности, принадлежащие к классу (I). Для алгебраического уравнения $P(w', w, z) = 0$, где $P(w', w, z)$ — рациональная функция от z и полином от w' и w, этот результат следует из того обстоятельства (Пенлеве), что соответствующие римановы поверхности имеют не более конечного числа неалгебраических особых точек (Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.— Л., 1950, гл. II, § 3). А. А. Гольдберг

7304. Связи между нормально исчерпываемыми римановыми поверхностями и римановыми поверхностями с алгебраическими точками, приближающимися к ∞: A_∞. **Андреян-Казаку** (Legături între suprafeţele riemanniene normal exhaustibile şi suprafeţele riemanniene cu puncte de ramificare algebrice care se apropie de ∞: A_∞. Andreian Cazacu Cabiria), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 3, 529—542 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть дано $w = f(p)$ — внутреннее по Стоилову отображение двумерного многообразия V в w-сферу, тем самым определяется риманова поверхность (р. п.) R, накрывающая w-сферу (Маркушевич А. М., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950, гл. VIII, §§ 1—3). Поверхность R называется нормально исчерпываемой (н. и. п.) (Stoilow S., Compositio math., 1940, 7, 428—435), если существует такая последовательность замкнутых областей $D_i \subset V$, ограниченных конечным числом жордановых кривых, что $D_i \subset D_{i+1}$ (включение строгое), $\bigcup D_i = V$, D_i являются нормальными областями относительно $f(p)$, т. е. образом границы D_i является граница образа $f(D_i)$, а внутренние точки D_i переходят во внутренние точки $f(D_i)$. Точки w-сферы, не покрытые поверхностью R, образуют лакунарное множество R. Для н. и. п. лакунарное множество является непустым замкнутым множеством. Н. и. п. называется поверхностью 1-го рода, если она односвязна и ее лакунарное множество состоит из одной точки.

Односвязная р. п. F, имеющая бесконечное число алгебраических точек ветвления, называется поверхностью с алгебраическими точками ветвления, сближающимися в ∞ ($F \in A_\infty$), если можно найти такое ее исчерпание $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \to F$, что каждая F_n является односвязной р. п., имеющей не более конечного числа только алгебраических точек ветвления и ограниченной одной кривой, проектирующейся в $|w| = \rho_n$, $\rho_1 < \rho_2 < \ldots \to \infty$ (Волковыский Л. И., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1950, 34, гл. III, § 7).

Доказаны следующие результаты. Любая н. и. п. 1-го рода, имеющая бесконечное число точек ветвления, является р. п. класса A_∞ (с точностью до линейного преобразования, приводящего лакунарную точку к ∞). Отсюда следует возможность применения к н. и. п. 1-го рода критерия параболического типа, принадлежащего Л. И. Волковыскому (цит. выше). У р. п. класса A_∞ лакунарное множество может состоять из одной точки (тип A), или быть пустым (тип B). Для того, чтобы р. п. класса A_∞ была н. и. п., необходимо и достаточно, чтобы она была типа A. Стоиловым (цит. выше) было доказано, что всякая односвязная н. и. п. является регулярно исчерпываемой (р. и. п.) по Альфорсу (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941, гл. XIII) и обладает самое большее двумя вполне разветвленными областями или точками (в общем случае р. и. п. число 2 заменяется на 4 (Неванлинна Р., цит. выше, п. 320)). Автор, дополняя этот результат, показывает, что р. п. класса A_∞ типа B р. и. п. и обладают самое большее тремя вполне разветвленными областями или точками (число 3 нельзя заменить меньшим). А. А. Гольдберг

7305. Принцип Дирихле для аналитических функций многих комплексных переменных. **Ушницер** (A Dirichlet principle for analytic functions of several complex variables. Washnitzer G.), Ann. Math., 1955, 61, № 1, 190—195 (англ.)

$\mathfrak{B}$ — линейное пространство комплексных плотностей W, определенных на комплексном аналитическом многообразии V комплексной размерности n; $\mathfrak{B}^*$ — замыкание $\mathfrak{B}$, являющееся гильбертовым пространством. $\mathfrak{Z}$ — линейное подпространство $\mathfrak{B}$, составленное якобианами финитных функций $\xi^1, \ldots, \xi^n$, определенных на V (при определении этих финитных функций рассматриваются компакты, состоящие из точек V). $\mathfrak{Z}^*$ — замыкание $\mathfrak{Z}$; оно является гильбертовым подпространством $\mathfrak{B}^*$. Автор доказывает: Пусть $W_0 \in \mathfrak{B}^*$, $W \in \mathfrak{B}^*$, W имеет те же граничные значения, что и W_0, $d = \inf_{W - W_0 \in \mathfrak{Z}^*} \|W\|$. Тогда существует один и только один такой элемент $I \in \mathfrak{B}^*$, что $d = \|I\|$. При этом оказывается, что I — комплексная плотность. Б. А. Фукс

7306. Гармонические мажоранты и принцип максимума. **Брело** (Majorantes harmoniques et principle du maximum. Brelot M.), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 429—440 (франц.)

Работа тесно связана с работами автора по современной теории потенциала (Brelot M., Choquet G., Ann. Inst. Fourier, 1951, 3, 199—263).

Изучаются некоторые свойства гармонических и субгармонических функций на введенных автором так называемых пространствах Грина. Путь ε — топологическое хаусдорфово пространство. Предполагается, что вокруг каждой точки ε «выделена» некоторая окрестность, допускающая гомеоморфное отображение на некоторую подобласть $\bar{R}^n$ (n-мерного евклидова пространства, к которому присоединена бесконечно далекая точка), причем так, что естественное отображение друг на друга подобластей $\bar{R}^n$, порожденное двумя заходящими на себя «выделенными» окрестностями, является изометрией ($n > 2$) или конформным отображением— необязательно сохраняющим направление ($n = 2$). На ε можно определить гармонические, суб- и супергармонические функции. Если на ε существует не равная постоянной положительная супергармоническая функция, то ε называется пространством Грина. Тогда на ε

существует функция Грина G_p с полюсом в любой фиксированной точке $p \in \varepsilon$. В работе фундаментальную роль играют линии (поверхности) уровня $G_p = \lambda$ функции Грина и их ортогональные траектории (линии Грина). На множестве линий Грина естественным образом вводится топология и мера (мера Грина). Изучается связь между граничными значениями субгармонических и гармонических функций вдоль линии Грина в среднем по мере Грина и свойствами самих функций. В этом смысле доказан принцип максимума.

В качестве приложений известные для круга теоремы Хинчина — Островского и теорема единственности Ф. и Н. Рисс доказаны для любых римановых поверхностей гиперболического типа.

Вводятся классы индифферентных и абсолютно индифферентных гармонических функций на ε, исследуется их связь с решением задачи Дирихле (в соответствующей естественной постановке) и другие задачи. В частности, на примерах указывается, что в общем случае задача Дирихле может оказаться неразрешимой (даже в том случае, если «граничные значения», которые предполагаются заданными на пространстве линии Грина, непрерывны и ограничены). Б. Боярский

7307. К теории модификаций. 1. Непрерывные и собственные модификации комплексных пространств. Грауэрт, Реммерт (Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Grauert Hans, Remmert Reinhold), Math. Ann., 1955, **129**, № 3, 274—296 (нем.)

Ставится задача изучения «процессов изменения», при которых многие функционально-теоретические свойства остаются неизменными, и, в частности, такого «процесса изменения», при котором остаются неизменными кольцо голоморфных и тело мероморфных функций. Первый шаг в этом направлении был сделан Бенке и Штейном (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1951, **124**, 1—16) и далее Штоллем (РЖМат, 1956, 1296, 6546, 6547), рассматривающими модификации комплексных многообразий и римановых областей. Модификация может рассматриваться как первое приближение «соответствующего процесса изменения» в упомянутом выше смысле.

В § 1 устанавливаются основные понятия и, прежде всего, понятие комплексного пространства и его модификации.

Локально компактное хаусдорфово пространство R называется аналитически-разветвленным наложением n-мерного единичного полицилиндра Z^n: $\{|z_1|<1, \ldots, |z_n|<1\}$, если имеет место:

1. Непрерывным собственным отображением Φ пространство R переходит в Z^n. Точка $r \in R$ называется лежащей над точкой $z = \Phi(r) \in Z^n$. Над каждой точкой $z \in Z^n$ лежит только конечное число точек R.

2. В Z^n существует такое аналитическое множество M, что $\Phi^{-1}(M)$ нигде не плотно в R и $\widetilde{R} = R \setminus \Phi^{-1}(M)$ локально топологически отображается через Φ на $Z^n \setminus M$.

3. К каждой точке $r \in R$ существует такая произвольно малая окрестность $U(r)$, что $U(r) \setminus U(r) \cap \cap \Phi^{-1}(M)$ связно.

Точку R, в которой Φ не является локально топологическим, называют точкой разветвления R. Под размерностью пространства R понимают комплексную размерность полицилиндра Z^n.

В наложении R могут быть введены понятия голоморфной и мероморфной функций. Непрерывная комплекснозначная на открытом множестве $W \subseteq R$ функция g называется голоморфной на W, если в каждой точке $r \in R \cap W$ существует окрестность $U(r) \subseteq W$, которая через Φ топологически так отображается на $\Phi(U(r)) \subseteq Z^n$, что $g \cdot \Phi^{-1}$ есть голоморфная функция в $\Phi(U(r))$. Отображение Γ открытого множества $W \subseteq R$ в C^n называется голоморфным, если оно осуществляется функциями $r_\nu = f_\nu(r)$ $(\nu = 1, \ldots, n;$ $r \in W)$, голоморфными на W.

Если R, R' — два аналитически разветвляемых наложения (с принадлежащими им проективными отображениями Φ, Φ'), то непрерывное отображение Γ открытого множества $W \subseteq R$ в R' называется голоморфным, если отображение $\Phi' \cdot \Gamma$; $W \to C^n$ голоморфное. Обращение голоморфного взаимно однозначного отображения есть также голоморфное отображение.

Под комплексно аналитической структурой в хаусдорфовом пространстве X понимается следующее:

1. X — обладает покрытием $\mathfrak{A}$ локальных координатных систем (U_j, ψ_j) $(j \in I$, I — множество индексов). Под системой (U, ψ) понимается открытое множество $U \subseteq X$, которое топологическим отображением ψ переводится на открытое множество W аналитически разветвляемого наложения R.

2. Если (U_i, ψ_i) и (U_j, ψ_j) — две локальные координатные системы из $\mathfrak{A}$ с непустым пересечением $U_i \cap U_j$, то топологическое отображение $\psi_j \cdot \psi_i^{-1} : \psi_i(U_i \cap U_j) \to$ $\to \psi_j(U_i \cap U_j)$ голоморфное ((U_i, ψ_i) и (U_j, ψ_j) связаны голоморфно).

3. Если (U, ψ) — локальная система координат, голоморфно связанная со всеми $(U_j, \psi_j) \in \mathfrak{A}$, то $(U, \psi) \in \mathfrak{A}$.

Связное хаусдорфово пространство X с определенной на нем комплексно аналитической структурой называется комплексным пространством.

Следуя Бенке и Штейну, авторы вводят понятие модификации комплексного пространства следующим образом: имеет место модификация (X', N', τ, N, X) комплексного пространства X в комплексное пространство X', если выполняются следующие условия:

1. X, X' — комплексные пространства одной размерности; N', N — замкнутые (возможно пустые) множества в X', соответственно в X, отличные от X', соответственно от X.

2. К каждой точке $x \in N$ существует такая связная окрестность $U(x)$, что $N \cap U(x)$ охватывает аналитическое множество $M \neq U$.

3. Отображение τ взаимно однозначно и голоморфно отображает пространство $X' \setminus N'$ на пространство $X \setminus N$.

4. Если U — произвольная окрестность N, то $\tau^{-1}(U \setminus N) \cup N'$ всегда содержит окрестность множества N'.

Две модификации $(X'_i, N'_i, \tau_i N_i, X_i)$ $(i = 1, 2)$ называются эквивалентными, если $X'_1 = X'_2$, $X_1 = X_2$, $\tau_1^{-1}(x) = \tau_2^{-1}(x)$ для каждого $x \in X_1 \setminus (N_1 \cup N_2)$. Модификация называется непрерывной, если выполняется условие 4′: Если (U_j), $j \in I$ — произвольное открытое покрытие N, то каждое множество $\tau^{-1}(U_j \setminus U_j \cap N) \cup N'$ содержит такое открытое множество V_j, что $\bigcup_{j \in I} V_j$ есть окрестность N'.

В § 2 устанавливаются основные свойства непрерывных модификаций. Модификация (X', N', τ, N, X) только тогда непрерывна, когда отображение $\tau X' \setminus N'$ на $X \setminus N$ продолжимо к голоморфному отображению X' на X.

Непрерывная модификация $(X', N', \tau N, X)$ называется непрерывной существенной модификацией, если не существует такой непрерывной модификации

$(X', \dot{N}', \tau, \dot{N}, X)$, что $\dot{N} \subset N$. Для таких модификаций множество N' всегда аналитическое в X'. Множество же $N \subset X$ не будет всегда, как показывает пример, при непрерывных существенных модификациях аналитическим множеством.

В § 3 изучаются собственные модификации — непрерывные модификации, при которых отображение τ: X' в X собственное (переводящее компакт в компакт). При собственных существенных модификациях n-мерного комплексного пространства множество N есть аналитическое множество размерности самое большее $(n-2)$. Отсюда следует, что при собственных модификациях кольцо голоморфных и тело мероморфных функциях пространств X и X' изоморфны. В § 4 даются примеры модификаций. В частности, примером собственной существенной модификации является σ-процесс Хопфа (РЖМат, 1956, 6548). А. В. Лебедев

7308 К. Теория функций комплексного переменного. Учеб. пособие для пед. ин-тов. **Гончаров В. Л.**, М., Учпедгиз, 1955, 352 стр., илл., 6 р. 25 к.

Изложение основ аналитических функций, предназначенное для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. После изучения комплексных чисел делается переход к понятиям функции комплексного переменного, предела функции и к числовым рядам. Гл. III и IV посвящаются изучению элементарных функций. В гл. V вводится понятие производной и интеграла от функций комплексного переменного. В гл. VI рассматриваются степенные ряды, ряды многочленов и дробных рациональных функций. Понятие аналитической функции дается в гл. VII; в эту главу включается интеграл Коши, теорема Вайерштасса о пределе последовательности аналитических функций, аналитическое продолжение и римановы поверхности с иллюстрацией на простейших примерах. Изолированные особые точки однозначных функций, ряд Лорана, теорема Коши о вычетах и приложения теории функций комплексного переменного к алгебре и анализу являются содержанием гл. VIII. Заканчивается книга гл. IX: «Конформное отображение. Применение теории функций комплексного переменного к вопросам физического содержания. Гидродинамическая интерпретация функций комплексного переменного».

Особенностью этого учебника является то, что в нем уделяется большое внимание раскрытию природы аналитических функций и детально изучаются элементарные функции. А.А. Темляков

7309 К. Аналитические функции. Привалов (Analytické funkce. Privalov I. I. Z ruš. Praha, ČSAV, 1955, 517, [1] str., il., 44, 30 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 13, 321 (чеш.)

7310 К. Аналитическое продолжение. Бибербах (Analytische Fortsetzung. Bieberbach Ludwig, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verl. 1955, 167 S., 24. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 23, 1258 (нем.)

7311 К. Понятие римановой поверхности. Вейль (Die Idee der Riemannschen Fläche. 3. volst. umgearb. Aufl. Weyl Hermann. Stuttgart, Teubner. 1955, VII, 162 S., 15.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 40, 2266 (нем.)

7312 К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. Спенсер, Шиффер (Functionals of finite Riemann surfaces. Spencer D. C., Schiffer M. M. Princeton, N. Y., Univ. Press, 1954, X, 451 pp., 8. 00 doll.) (англ.)

Авторы называют конечной риманову поверхность конечного рода с конечным числом невырожденных компонентов края. Одним из основных понятий, с успехом систематически применяемым авторами, является понятие дубля (т. е. двулистной поверхности наложения) конечной римановой поверхности. Вводится несвязный дубль замкнутой римановой поверхности и дубль неориентируемой поверхности.

Первая, вводная, глава содержит весьма краткий очерк теории дифференциальных форм. Небольшой параграф, посвященный изложению основных топологических понятий, естественно не может дать всех сведений из топологии поверхностей, необходимых для чтения книги. В последующих двух главах излагается классическая теория римановых поверхностей. Топологическая классификация только приводится, но теоремы существования полностью доказываются методом ортогонального проектирования. Приводятся необходимые сведения из теории гильбертовых пространств. Изложение теории абелевых дифференциалов содержит теорему Римана — Роха.

Более современная теория начинается с четвертой главы. На протяжении всей книги основное внимание уделяется так называемым «принадлежащим поверхности функционалам». К этой категории, например, относятся функции Грина и Неймана, гармоническая мера, матрица периодов.

В главе четвертой производится сравнение функционалов, принадлежащих одной и той же поверхности. Завершением этого сравнения является выражение основных функционалов через функцию Грина. Авторы отправляются от нормированного интеграла третьего рода $\Omega_{qq_0}(p)$, определенного на дубле и имеющего для замкнутой поверхности однозначную действительную часть и логарифмические полюсы в точках q, q_0. Изучается гильбертово пространство M дифференциалов, интегрируемых вместе со своим квадратом над исходной поверхностью $\mathfrak{M}$. При этом внутренние произведения распространены на всю поверхность $\mathfrak{M}$. Доказывается, что функция (билинейный дифференциал)

$$L(p, q) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial^2 \Omega_{qq}(p)}{\partial p\, \partial q}$$

($\tilde{q}$ — точка дубля, симметричная точке q) обладает производящими свойствами и свойствами симметрии. Эта функция является производящим ядром для пространства M. При помощи этого же дифференциала третьего рода вводятся функции Грина и Неймана.

Пятая глава посвящена выводу важных соотношений, имеющих место в случае вложения одной поверхности $\mathfrak{M}$ в другую $\mathfrak{R}$. Получены, в частности, условия возможности распространения локально заданного билинейного дифференциала на всю поверхность $\mathfrak{M}$. Отсюда выводится важная теорема относительно возможности вложения одной поверхности в другую, являющаяся обобщением условий однолистности Грунского. Не все доказательства излагаются достаточно полно.

В главе шестой продолжается теория подобластей и вводятся линейные интегральные операторы:

$$T_f(q) = (L(q, p)\, dp,\ f' dp)_{\mathfrak{M}},$$

$$\tilde{T}_f(q) = (f' dp,\ L(p, \tilde{q})\, dp)_{\mathfrak{M}},$$

где $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$, $f' \in M$, L — билинейный дифференциал $\mathfrak{R}$. Строится далеко не тривиальная алгебра, порожденная T и $\tilde{T}$. Для многих целей достаточно рассмотреть операции только над областью $\mathfrak{M}$. Соответствующие операторы t, $\tilde{t}$ вполне непрерывны. Для них строится спектральная теория, позволяющая обобщить классические методы теории потенциала, связанные с именами Пуанкаре и Фредгольма.

В главах седьмой и восьмой детально излагается вариационное исчисление для римановых поверхностей и даются многочисленные приложения. Основной про-

блемой является отыскание вариаций, принадлежащих поверхности дифференциалов. Вначале приводится формула Адамара. Затем рассматриваются вариации, возникающие при различных изменениях поверхности: вырезании отверстий, присоединении ручек I рода, заклеивании отверстий листом Мёбиуса, замене клеток. Выясняются связи с квадратичными дифференциалами. Рассматривается важная проблема построения вариаций, сохраняющих конформный тип.

Последняя глава представляет собой краткое изложение теории гармонических дифференциалов на кёлеровых многообразиях. Теория распространена на случай многообразий с краем. Е. Д. Соломенцев

7313 К. Униформизация. Неванлинна Р. Перев. с нем. М., Изд-во ин. лит., 1955, 435 стр., илл., 18 р. 65 к.

Перевод Л. И. Волковыского монографии Неванлинна (РЖМат, 1954, 2571), представляет первое на русском языке систематическое изложение общей теории римановых поверхностей. При переводе устранены некоторые мелкие погрешности, имевшиеся в оригинале. Переводчиком отмечена ошибочность приведенного автором доказательства топологической инвариантности эйлеровой характеристики поверхности (стр. 122). А. А. Гольдберг

7314 Д. О сходимости гармонического и тригонометрического интерполирования. Киш О. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

7315 Д. Метрические свойства квазиконформных отображений. Песин И. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1955

7316 Д. О моногенности кватернионных и гиперкомплексных функций. Шнеерсон. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорус. ун-т, Минск, 1955

См. также: 7810

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7317. Теорема существования на вещественной оси решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Кордуняну (Teoreme de existenţă pe axa reală a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Cordueneanu C.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi. fiz., 1955, 7, № 3, 645—651 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказаны утверждения: Если $f(x, y, z)$ непрерывна, $|f(x, 0, 0)| \leqslant L$, $0 < m \leqslant f'_y \leqslant M$, $|f'_z| \leqslant A$, $A\sqrt{M} < m$, то уравнение $y'' = f(x, y, y')$ имеет единственное решение в классе функций, ограниченных вместе с первой производной при $-\infty < x < \infty$. Это решение может быть получено методом последовательных приближений: y_0 — произвольно ($|y_0|$ и $|y'_0|$ ограничены);

$$y''_n - My_n = f(x, y_{n-1}, y'_{n-1}) - My_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Это решение является почти периодическим, если $f(x, y, z)$ почти периодическая по x равномерно относительно y и z в области

$$(M - m)|y| + A|z| \leqslant [M/(m - A\sqrt{M}) - 1]\,L.$$

А. Ф. Филиппов

7318. Аналитические исследования, связанные с уравнением Максвелла — Больцмана. Моргенштерн (Analitical studies related to the Maxwell-Boltzmann equation Morgenstern Dietrich), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, 4, № 4, 533—555 (англ.)

В первой части рассматривается дифференциальное уравнение в банаховом пространстве L_1 вида $df/dt = \mathfrak{A}(t, f, g)$, где $\mathfrak{A}(t, f, g)$—ограниченный билинейный оператор в L_1. Устанавливается локальная теорема существования решения с помощью принципа сжатых отображений. Для отыскания решения также указывается метод разложения в ряд по параметру. При частном виде оператора $\mathfrak{A}(t, f, g)$ исследуется итерационный процесс, при котором все последовательные приближения не отрицательны. Если дополнительно интеграл по всему пространству от $\mathfrak{A}(t, f, f)$ равен нулю при всех $f \in L_1$, то справедлива нелокальная теорема существования решения для неотрицательных начальных данных.

Во второй части результаты применяются к доказательству существования решения «усредненного» уравнения Максвелла—Больцмана кинетической теории газа. В третьей исследуется асимптотическое поведение решений уравнения Максвелла — Больцмана в пространственно однородном случае. С. Г. Крейн

7319. Об одном линейном дифференциальном уравнении. Годо (Sur une équation différentielle linéaire. Godeaux Lucien), Mathesis, 1955, 64, № 3—5, 81—87 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение n-го порядка с переменными коэффициентами, символически записываемое в виде

$$(y + ax)^n \equiv \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p x^p y^{(n-p)} = 0. \qquad (1)$$

Доказывается, что с помощью подстановки $y = z\exp(-ax^2/2)$ уравнение (1) преобразуется в линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Приводится, в историческом аспекте, библиография, относящаяся к уравнению (1). Б. П. Демидович

7320. К вопросу-интегрирования дифференциальных уравнений типа Риккати. Сахаров Н. В. В сб.: Механика (МВТУ, 50). М., Оборонгиз, 1956, 367—381

Автор дает метод построения решения уравнения типа Риккати вида $x^\beta y' + px^{\beta-1}y + qy^2 = rx^\alpha$, где p, q, r, α, β — постоянные, в случае, если существует такое целое и положительное число n, которое удовлетворяет соотношению $p = (2n - 1)\alpha/2 - 2(\beta - 1)n$. Приведены три примера. С. А. Самедова

7321. Примечания к теории разрывных решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Микеладзе Ш. Е., Сообщ. АН Груз ССР, 1954, 15, № 10, 647—654

Рассматривается краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения в конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$ с заданными для искомой функции и ее производных скачками. Решение однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка, обладающее заданными особенностями, $y(x, \alpha, \beta, \ldots)$ ($\alpha, \beta, \ldots$ — входящие в уравнение параметры) представляется в виде

$$y(x, \alpha, \beta, \ldots) = \sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(a)\, Y_{k+1}(x, a, \alpha, \beta, \ldots) + \sum_m A_m Y_1(x, a_m, \alpha, \beta, \ldots) + \sum_r B_r Y_2(x, b_r, \alpha, \beta, \ldots) + \ldots + \sum_\mu Q_\mu Y(x, q_\mu, \alpha, \beta, \ldots), \qquad (1)$$

где a_m — точки разрыва функции y, A_m — ее скачки в этих точках, b_r — точки разрыва производной y', B_r — скачки функции y' в этих точках и т. д. $Y_\nu(x, s, \alpha, \beta, \ldots)$ — функция, тождественно равная нулю при $a \leqslant x < s$ и удовлетворяющая при $s \leqslant x \leqslant b$ заданному однородному дифференциальному уравнению и начальным условиям $Y_\nu^{(k)}(s, s, \alpha, \beta, \ldots) = 0$ при $k \neq \nu - 1$ и $Y_\nu^{(k)}(s, s, \alpha, \beta, \ldots) = 1$ при $k = \nu - 1$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Подробнее рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$(\rho_1(x, \alpha, \beta, \ldots) y')' + \rho_2(x, \alpha, \beta, \ldots) y = 0. \quad (2)$$

Путем последовательного почленного интегрирования уравнения (2) строятся интегральные уравнения для функций Y_1 и Y_2, решение этих интегральных уравнений осуществляется методом последовательных приближений.

Отдельно рассматривается случай $(\rho_1(x, \alpha, \beta, \ldots))^{-1} \equiv \rho_2(x, \alpha, \beta, \ldots)$. В этом случае функции Y_1 и Y_2 строятся автором путем свертывания построенных ранее рядов. Заметим, что в этом нет надобности, так как при $\rho_1^{-1} = \rho_2 = \rho$ уравнение (2) заменой независимой переменной $\xi = \int_a^x \rho\, dx$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. И. М. Рапопорт

7322. Решение линейных дифференциальных уравнений. Деннис, Путс (The solution of linear differential equations. Dennis S. C. R., Poots G.), Proc. Cambridge Philos Soc., 1955, 51, № 3, 422—432 (англ.)

Рассматривается интегрирование линейного дифференциального уравнения

$$\Sigma_{p=0}^{N} f_p(x)\, y^{(p)} = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant R \quad (1)$$

с заданными начальными или краевыми условиями посредством рядов Фурье. В уравнении (1) осуществляется сначала подстановка $y = Y + h(x)$, где $h(x)$ — некоторая фиксированная функция, после чего Y ищется в виде ряда Фурье. Определение коэффициентов Фурье функции $Y(x)$ сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Быстрота сходимости ряда Фурье для функции $Y(x)$ зависит от выбора $h(x)$. Высказаны некоторые общие соображения по вопросу о рациональном выборе функции $h(x)$. Рассмотрено несколько примеров, в качестве $h(x)$ в этих примерах берется полином, удовлетворяющий всем или некоторым из заданных краевых условий, приближенное решение бесконечной системы алгебраических уравнений осуществляется методом последовательных приближений. И. М. Рапопорт

7323. О применении теоремы свертки к анализу систем автоматического регулирования с переменными коэффициентами. Чернов Е. И., Тр. 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования. Т. 2., М.—Л., Изд-во АН СССР, 1955, 386—398. Выступления 399—400

В этой работе используется теорема о свертке двух функций. Свертка $f(t)$ двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, определенных для $t > 0$, будет иметь вид

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t - \tau)\, d\tau. \quad (1)$$

Довольно широкий класс дифференциальных уравнений может быть отображен в область комплексной переменной преобразования Лапласа с помощью уравнения

$$y(s) = \varphi_0(s) - \frac{f(s)}{2ni} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s-\psi)\, y(s-\psi)}{m(\psi)}\, d\psi. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) ищется в виде ряда

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_n + \ldots \quad (3)$$

Если в правой части исходного уравнения стоит единичный импульс $\delta(t)$, соответствующее ему функциональное уравнение (2) будет иметь вид

$$y_g(s) = \psi(s) - \frac{f(s)}{2ni} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{g(s-\psi)\, y_g(s-\psi)}{m(\psi)}\, d\psi. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) дает нам изображение односторонней функции Грина. Изображение решения исходного уравнения, если в правой части стоит заданная функция времени $f(t)$ $(F(s) \doteq f(t))$ имеет вид $y = y_g(s) F(s)$. А. С. Ткаченко

7324. Линейные дифференциальные уравнения бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами. Хапланов М. Г., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 6, 1162—1165

Дается классификация бесконечных матриц, преобразующих в себя координатные пространства, введенные Кёте и Теплицем (Köthe G., Toeplitz O., J. reine und angew Math., 1934, 171, 193).

Далее рассматриваются вопросы, связанные с отысканием аналитических решений уравнений бесконечного порядка

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \ldots = f(x). \quad (1)$$

Решение ищется в виде

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \frac{c_2}{2!} x^2 + \ldots + \frac{c_n}{n!} x^n + \ldots$$

Тогда $c = (c_0, c_1, \ldots)$ определяется из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$Mc = b, \quad (2)$$

где $b = (b_0, b_1, \ldots)$ и $f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots$, а $M\{a'_{j,n}\}$ — матрица с элементами

$$a'_{j,n} = a_{j,n} + a_{j-1,n-1} + \frac{a_{j-2,n-2}}{2!} + \frac{a_{j-3,n-3}}{3!} + \ldots,$$

причем $a_k(x) = a_{0,k} + a_{1,k} x + \ldots + a_{n,k} x^n + \ldots$ и $a_{m,n} = 0$, если хотя бы один из индексов отрицателен.

Сформулирован ряд теорем, устанавливающих изоморфизм между бесконечными матрицами и решениями системы (2), с одной стороны, и уравнениями (1) и их решениями, — с другой. Вследствие этого классификация матриц порождает соответствующую классификацию линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

Результаты автора позволяют, например, исследовать вопросы существования и единственности аналитического в начале координат решения дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$(a_0 + b_0 x)\, y + (a_1 + b_1 x)\, y' + \ldots = f(x) \quad (3)$$

в предположении, что функции $a(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$, $b(x) = b_0 + b_1 x + \ldots$ аналитичны в некотором круге $|x| < R$. Сформулирована следующая теорема 6. Пусть правая часть уравнения (3) — целая функция степени $\sigma < R$. Если в замкнутом круге $|x| \leqslant \sigma$ дробь $a(x)/b(x)$ регулярна или имеет только простые полюса с вычетами, равными целым отрицательным числам, то уравнение (3) имеет экспоненциального типа решение в том и только в том случае, если функция, ассоциированная с правой частью $f(x)$, ортогональна к решению урав-

нения $a(x)z + b(x)z' = 0$ (решение — целая функция той же степени σ, что и правая часть, и зависит от n произвольных постоянных), где n — число нулей $b(x)$ в круге $|x| \leqslant \sigma$ с учетом их кратности. Если же дробь $a(x)/b(x)$ в круге $|x| \leqslant \sigma$ имеет $m \geqslant 1$ различных полюсов, кратных или таких простых, в которых вычеты отличны от целых отрицательных чисел, то решение уравнения существует для всякой правой части — целой функции степени σ, является целой функцией той же степени и зависит от $n - m$ произвольных постоянных. М. А. Красносельский

7325. О нелинейных колебаниях в системах с изменяющимися параметрами. К о н о н е н к о В. О., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 2, 229—232

Рассматривается колебательная система, описываемая уравнениями:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= q_{11}(\theta, \tau)\, x_1 + q_{12}(\theta, \tau)\, x_2 + \varepsilon V_1(x_1, x_2, \theta, \tau, \varepsilon), \\ dx_2/dt &= q_{21}(\theta, \tau)\, x_1 + q_{22}(\theta, \tau)\, x_2 + \varepsilon V_2(x_1 x_2, \theta, \tau, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1)$$

где V_1, V_2 — неограниченно дифференцируемые функции своих аргументов для конечных значений x_1, x_2, θ, τ и достаточно малых ε, периодические по θ с периодом 2π; $\tau = \varepsilon t$, $q_{ij}(\theta + 2\pi, \tau) = q_{ij}(\theta, \tau)$, $(i, j = 1, 2)$, $d\theta/dt = \nu(\tau)$. Вводится в рассмотрение вспомогательная система

$$\begin{aligned} dy_1/dt + q_{11}(\theta, \tau)\, y_1 + q_{12}(\theta, \tau)\, y_2 &= 0, \\ dy_2/dt + q_{21}(\theta, \tau)\, y_1 + q_{22}(\theta, \tau)\, y_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

и предполагается, что для нее известны частные решения (τ рассматривается как параметр):

$$y_i^{(k)} = e^{\vartheta_k} \varphi_i^{(k)} \quad (i, k = 1, 2), \quad (3)$$

в которых $d\vartheta_k/dt = \alpha_k(\tau)$ — характеристические показатели, $\varphi_i^{(k)}(\theta, \tau)$ — периодические по θ с периодом 2π. После этого путем замены

$$z_1 = \varphi_1^{(1)}(\theta, \tau)\, x_1 + \varphi_2^{(1)}(\theta, \tau)\, x_2,$$

$$z_2 = \varphi_1^{(2)}(\theta, \tau)\, x_1 + \varphi_2^{(2)}(\theta, \tau)\, x_2$$

система (1) преобразуется к виду

$$dz_i/dt + \alpha_i(\tau)\, z_i = \varepsilon F_i(z_1, z_2, \theta, \tau, \varepsilon) \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Для системы (4) в областях значений параметра τ, где решения (3) устойчивы, строятся приближенные решения при помощи методов асимптотического интегрирования (Митропольский Ю. А. Прикл. матем. и механика, 1950, **14**, № 2, 139—170).

Ю. А. Митропольский

7326. О колебаниях в нелинейных системах со многими степенями свободы. К о н о н е н к о В. О., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 4, 664—667

Рассматриваются одночастотные колебания системы с N степенями свободы, описываемые системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_\sigma}{dt} = \sum_{s=1}^{n} q_{\sigma s}(\theta, \tau)\, x_s + \varepsilon V_\sigma(x_1, \ldots, x_n\, \theta, \tau, \varepsilon), \quad (1)$$

в которых ε — малый параметр, $\tau = \varepsilon t$, $d\theta/dt = \nu(\tau)$, V_σ — неограниченно дифференцируемые функции своих аргументов для конечных значений $x_1, \ldots, x_n$, θ, τ и достаточно малых ε, периодические по θ с периодом 2π, $q_{\sigma j}(\theta + 2\pi, \tau) = q_{\sigma j}(\theta, \tau)$.

Система уравнений (1) при помощи преобразования, аналогичного приведенному в работе (реф. 7326), приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dz_\rho}{dt} + i\alpha_q(\tau)\, z_\rho &= \varepsilon \Phi_\rho(z_1, \ldots, z_n, \theta, \tau, \varepsilon), \\ \frac{dz_{\rho+1}}{dt} - i\alpha_q(\tau)\, z_{\rho+1} &= \varepsilon \Phi_{\rho+1}(z_1, \ldots, z_n, \theta, \tau, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2)$$

Для системы (2) строится двупараметрическое семейство частотных решений, соответствующее одночастотным колебаниям при резонансе, при помощи асимптотического метода интегрирования, изложенного в работах (Боголюбов Н. Н., Сб. тр. Ин-та строит. механ. АН УССР, 1949, **10**, 9—21; Митропольский Ю. А., Прикл. матем. и механика, 1950, **14**, № 2, 139—170).

Ю. А. Митропольский

7327. О системах канонических переменных. С у д а н (Sur des systèmes de variables canoniques. S o u d a n A d e l), Bull. Astron., 1955, **19**, № 3, 225—326 (франц.; рез. англ., нем., русс.)

Работа, состоящая из пяти глав, представляет обширное исследование в области теории канонических уравнений, их преобразований и интеграции. В 1-й главе излагаются основные положения теории: определение канонических уравнений, сопряженных канонических переменных, генератрисы (порождающей функции). Устанавливаются три условия, относящиеся к преобразованиям, переводящим канонические переменные в канонические же переменные. Одно из условий, выраженное через таблицу скобок Лагранжа, принадлежит автору. Дополняются соответствующие предложения А. Пуанкаре в том смысле, что, если в преобразования канонических уравнений входит явно время t, то генератриса изменяется.

Во 2-й главе излагаются методы интеграции системы дифференциальных уравнений в канонических переменных. Формулируется метод Якоби, приводятся интересные и малоизвестные теоремы Лиувилля и Бертрана, выражающие при помощи скобок Пуассона условия интегрируемости системы уравнений. Автор устанавливает еще три предложения, относящиеся к свойствам интегралов системы и скобок Пуассона для них, а также устанавливает связь между интегралами канонических уравнений и тремя формами условия каноничности переменных.

В 3-й главе излагаются дальнейшие приложения условий каноничности переменных, в частности изучается случай, когда некоторые канонические переменные могут рассматриваться как постоянные.

В 4-й главе рассматриваются шесть канонических переменных, вводившихся различными авторами (Andouer, Bull. Astron., 1913, **30**, 159; 425; Levi — Civita, Ann. mat., 3e série, 1913, 20, 153—169; Hill, Astron. J., 1913, **27**, 171—177; Delaunay, Mém. Acad. Sci., 1860, **27**, 13) для изучения эллиптического движения планеты. Показывается, что из данных переменных независимыми являются только пять, а следовательно, вся система по существу не является канонической системой.

В 5-й главе автор рассматривает предложенные им более общие переменные, показывает их каноничность и связь их с оскуляционными элементами в классической теории возмущенного движения планеты.

В. В. Добронравов

7328. Об особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. IV. К а т о (Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre. IV. K a t ō T i z u k o), お栞の水女子大學, 自然科學告, Otяномидзу дзёси дайгаку сидзэн кагаку хококу Natur. Sci. Rept. Ochanomizu Univ., 1955, **5**, № 2, 175—177 (франц.)

Усиление прежней теоремы автора (РЖМат, 1956, 2970) о представлении равномерно сходящимися рядами решений дифференциального уравнения $xdy/dx = P(x,y)/yQ(x,y)$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$—полиномы, в окрестности особой точки его (0, 0). Б. П. Демидович

7329. Исследование поведения интегральных кривых одной системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Андреев А. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 8, 43—65

В малой окрестности начала координат исследуется поведение интегральных кривых системы:

$$dx/dt = y + X(x, y);\ dy/dt = Y(x, y), \qquad (1)$$

где $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ — аналитические функции, не содержащие членов ниже второй степени. Исследование системы (1) сводится к исследованию уравнения

$$dy/dx = [f(x) + y\varphi(x) + y^2Y_1(x, y)]/y\,[1 + X_1(x + y)], \qquad (2)$$

где $f(x) = ax^\alpha(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$; $\varphi(x) = bx^\beta(1 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)$, $a, b \neq 0$, $\alpha > 2, \beta \geqslant 1$. Применяя метод Фроммера, основанный на изучении порядка и меры кривизны характеристик, входящих в начало, автор показывает, что начало принадлежит ко второй группе особых точек (т. е. является центром, или фокусом) лишь в двух случаях: 1) $\alpha = 2\beta + 1$, причем $b^2 + 4a \times (\beta + 1) < 0$ и 2) $\alpha < 2\beta + 1$ или $\varphi(x) \equiv 0$, причем $a < 0$ и α — нечетное. Во всех остальных случаях в начало входят характеристики с определенными касательными, т. е. оно принадлежит к первой группе. Следует заметить, что этот результат не является новым, так как в работе референта (Докл. АН СССР, 1944, **62**, № 6, 262—265), которую автор не цитирует, приводится тот же результат. Строится общая топологическая картина поведения характеристик в окрестности начала во всех случаях, когда оно принадлежит к первой группе, находя для всех этих случаев порядки и меры кривизны характеристик, входящих в начало. В последнем, седьмом параграфе показывается, что уравнение (2) с помощью подстановки: $y = (u - \gamma)x^\lambda$, при надлежаще выбранных λ и γ может быть сведено к уравнению Брио и Буке:

$$x^m du/dx = \mu x + \lambda u + Z(x, u), \qquad (3)$$

где $\lambda \neq 0$ и $Z(x, u)$ — аналитическая функция в окрестности начала, не содержащая членов ниже второй степени. Для уравнения (3) Бендиксон (Bendikson J., Acta. Math., 1901, **24**, § 58, 83—85) разработал метод последовательных приближений, дающий возможность получить аналитическое представление характеристик, входящих в начало. Автор показывает, таким образом, что аналитическое представление Бендиксона применимо и для уравнения (2).

В заключение указывается, что качественным исследованием уравнения (2) занимался также Н. Б. Хаимов (Уч. зап. Сталинаб. гос. пед. и учит. ин-та, 1952, 2), который пришел в основном к тем же результатам, что и автор.

Отметим, что имеется некоторая (правда, несущественная) разница в результатах, полученных обоими авторами, а именно: в случае, когда $\alpha > 2\beta + 1$, α и β — нечетные и $\alpha < 0$, автор доказывает, что к началу примыкает закрытая узловая и гиперболическая область; Н. Б. Хаимов показывает, что в этом случае к началу может примыкать, помимо указанных областей, еще открытая узловая область. То же самое имеет место в случае, когда $\alpha = 2\beta + 1$, $-b^2/4(\beta + 1) \leqslant a < 0$, β — нечетное. И. С. Куклес

7330. Замечания к статье «Особые точки и периодические решения». Барбэлат (Observaţii asupra notei «Puncte şingulare şi soluţii periodice». Barbălat I.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 2, 325—328 (рум.; рез. русс. франц.)

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = Q(x, y) + \mu X(x, y, t),\ dy/dt = P(x,y) + \mu Y(x, y, t), \qquad (1)$$

где $Q(x, y)$ и $P(x, y)$ — действительные функции, аналитические в окрестности Ω общего изолированного нуля их; $X(x, y, t)$ и $Y(x, y, t)$ — непрерывные периодические функции по t с периодом T, имеющие при $0 \leqslant t \leqslant T$, $(x, y) \in \Omega$ непрерывные производные по x и y; μ — действительный параметр. Ссылаясь на свой прежний результат, автор утверждает, что если кривая

$$xQ(x,y) + yP(x,y) = 0 \qquad (2)$$

имеет простые действительные ветви в Ω и определяет в Ω только секторы 1-го типа по Лефшецу (Lefschetz S., Contributions to the theory of nonlinear oscillations, II, Princeton, 1952, 61), числом не меньше четырех, то при $|\mu| < |\mu_0|$ в Ω существует периодическое решение системы (1) с периодом T. Б. П. Демидович

7331. Две теоремы о нелинейном обыкновенном дифференциальном уравнении. Мак-Лаклан (Two theorems on ordinary non-linear differential equations. McLachlan N. W.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 329, 200—202 (англ.)

Излагаются известные результаты о поведении при $t \to +\infty$ решений уравнения $\ddot{y} + g(y)\dot{y} + f(y) = 0$, где при $y \neq 0$ $g(y) > 0$, $yf(y) > 0$. А. Ф. Филиппов

7332. Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка (Второе сообщение). Рейссиг (Über eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung. (2. Mitteilung). Reissig Rolf), Math. Nachr., 1955, **14**, № 2, 65—71 (нем.)

Доказывается, что уравнение

$$\ddot{u} + F(\dot{u}) + u = E(t),$$

где $E(t)$ — периодическая непрерывная функция, $F(v)$ — непрерывная, строго монотонная, $vF(v) \geqslant 0$,

$$F(+\infty) - F(-\infty) > \max E(t) - \min E(t), \qquad (1)$$

имеет единственное периодическое решение, а все другие решения стремятся к нему при $t \to +\infty$. То же доказывается для уравнения $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = e(t)$, где $e(t)$ и $f(x)$ кусочно непрерывны, $e(t)$ — периодическая, $f(x) > 0$ (может быть, кроме отдельных точек),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx > \max E(t) - \min E(t), \qquad (2)$$

$E(t)$ — неопределенный интеграл от $e(t) - d$, d — такая постоянная, что $E(t)$ периодическая. Это обобщает результат автора (РЖМат, 1956, 1321). Показывается, что применяемый метод неподвижной точки не позволяет доказать существования периодического решения в тех случаях, когда требования (1) или (2) не выполнены. А. Ф. Филиппов

7333. Поведение в целом решений некоторых дифференциальных уравнений второго порядка. Барбэлат (Comportarea în mare a soluţiilor unor ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul al doilea. Barbălat I.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 3, 653—666 (рум.; рез. русс., франц.)

Исследуется уравнение $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$, где $f(x) = a_px^p + \ldots + a_{2n}x^{2n}$, $a_p \neq 0$, $a_{2n} > 0$. 1) Если при малых x $f(x) + f(-x) < 0$, то на фазовой плоскости существует один или конечное число предельных циклов; внутри внутреннего и вне внешнего из циклов траекто-

рии расположены так же, как в случае уравнения Ван-дер-Поля. Приведены условия, достаточные для единственности предельного цикла. 2) Если $\int_{-x}^{x} f(\xi)d\xi > 0$ при $x > 0$ (и $a_0 < 2$ в случае $p = 0$), то при $t \to +\infty$ все траектории спиралевидно стремятся к $(0, 0)$, а при $t \to -\infty$ уходят в бесконечность; все траектории, кроме двух, имеют вертикальные асимптоты. А. Ф. Филиппов

7334. О некоторых новых свойствах решений дифференциального уравнения $y''' + Q'y + Qy' = 0$. **Грегуш** (O niektorých novÿch vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y''' + Qy' + Q'y = 0$. Greguš Michal), Spisy vyd. přirodoved. fakult. Masarykovy univ. 1955, № 5, 237—254 (словац.; рез. русс., нем.)

Рассматриваются уравнения

$$y''' + Qy' + Q'y = 0, \qquad (в)$$

$$y'' + Q(x)\,y = 0. \qquad (а)$$

Пусть $Q(x) > 0$ для $x \in (-\infty, \infty)$ и $Q'(x) > 0$ [$Q'(x) < 0$, для $x \in (-\infty, \infty)$. Тогда а) все решения уравнения (в) которые имеют в точке a нуль, осцилляторны для $x > a$ [$x < a$] и их нули разделяются; среди них будет решение уравнения (а); в) решения уравнения (в), не имеющие нулей, имеют форму $y = c_1y_1 + c_3(-ty_2 + y_3)$, где y_1, y_2, y_3 образуют фундаментальную систему решений уравнения (в) и t — параметр, значения которого лежат в некотором интервале (t_1, t_2). Далее устанавливаются критерии осцилляторности и для случая $Q > 0$; $Q < 0$. Далее с помощью введенного Борувка понятия центральных дисперсий второго рода (РЖМат, 1956, 406) установлена теорема: Пусть: а) $Q = Q(x, \lambda)$ непрерывна для $x \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$; в) при каждом $x \in (-\infty, \infty)$ $Q(x, \lambda)$ — возрастающая функция параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$ и $\lim_{\lambda \to \lambda_2} Q(x, \lambda) = +\infty$ для каждого $x \in (-\infty, \infty)$; с) $\partial Q(x, \lambda)/\partial x > 0$ [$\partial Q(x, \lambda)/\partial x < 0$] и непрерывна для $x \in (-\infty, \infty)$ и $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$. Для каждых двух чисел $a < b \in (-\infty, \infty)$ имеется бесконечно много значений параметра $\lambda \in (\Lambda_1, \Lambda_2)$: $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+p}, \ldots$, для которых существует решение $y_{n+p} = y(x, \lambda_{n+p})$ уравнения (в), удовлетворяющее краевым условиям:

$$y(a, \lambda_{n+p}) = y'(a, \lambda_{n+p}) = y'(b, \lambda_{n+p}) = 0 \; [y'(a, \lambda_{n+p}) = y(b, \lambda_{n+p}) = y'(b, \lambda_{n+p}) = 0]$$

и имеющее в интервале (a, b) точно $n + p$ нулей.

В. В. Немыцкий

7335. Об устойчивости вынужденных колебаний с трением и линейной возвращающей силой (Дополнение). Рейссиг (Über die Stabilität gedämpfter erzwungener Bewegungen mit linearer Rückstellkraft (Ergänzung). Reissig Rolf), Math. Nachr., 1955, **14**, № 1, 17—20 (нем.)

Утверждения статьи автора (РЖМат, 1956, 2995) доказываются при других предположениях относительно функции $g(x)$: требуется, чтобы $g(x)$ была непрерывной, монотонной и чтобы $g(0) = 0$ при $x > a > 0$ $g(x) > M - m - 2\mu > 0$. А. Ф. Филиппов

7336. О периодических решениях уравнения Даффинга с трением. Лауд (On periodic solutions of Duffing's equation with damping. Loud W. S.), J. Math. and. Phys., 1955, **34**, № 3, 173—178 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + \beta x^3 = p(t), \qquad (1)$$

где $c > 0$, $\beta > 0$, функция $p(t)$ непрерывна, $p(t) \equiv -p(t + T/2)$, $\max |p(t)| = 1$. Если $c^2 > 48\beta \min\{1 + 4c^{-1}, 1 + 4c^{-2}, \beta^{-1/3} + 4c^{-2}\}$, то существует единственное периодическое решение $x_0(t)$ уравнения (1); $x_0(t) \equiv -x_0(t + T/2)$; все другие решения стремятся к нему при $t \to +\infty$.

А. Ф. Филиппов

7337. Поведение решений самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка. Барретт (Behavior of solutions of second order self-adjoint differential equations. Barrett J. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 2, 247—251 (англ.)

Исследуется дифференциальное уравнение

$$(r(x)\,y')' + q(x)\,y = 0, \; x \geqslant a, \qquad (1)$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, непрерывные при $x \geqslant a$, $r(x) > 0$ при $x \geqslant a$. Пусть $w(x)$ — некоторая вещественная функция, положительная и непрерывная вместе со своей первой производной при $x \geqslant a$. Показано, что если $w'(x) \leqslant 0$, то для любого решения $y(x)$ уравнения (1) имеют место оценки

$$|y(x)| \leqslant \frac{\rho w(a)}{w(x)} \exp \frac{Q(x)}{2}, \; |y'(x)| \leqslant \frac{\rho w(a)}{r(x)} \exp \frac{Q(x)}{2},$$

где $Q(x) = \int_a^x |w(t)\,r^{-1}(t) - g(t)\,w^{-1}(t)|\,dt$, $\rho = (y^2 + (ry'/w)^2)^{1/2}_{x=a}$.

Если

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x \left(\frac{w(t)}{r(t)} + \frac{q(t)}{w(t)} - \left| \frac{w(t)}{r(t)} - \frac{q(t)}{w(t)} \right| - \frac{|w'(t)|}{w(t)} \right) dt = \infty,$$

то любое нетривиальное решение уравнения (1) — осциллирующее. Показано далее, что если существует такое положительное число k, что $\int_a^\infty |k/r(t) - q(t)/k|dt < \infty$, то любому нетривиальному решению $y(x)$ уравнения (1) можно поставить в соответствие такие числа A и α, для которых

$$\lim_{x \to \infty} [y(x) - A \sin(\beta(x) + \alpha)] = 0,$$

где $\beta(x) = \frac{1}{2} \int_a^x (k/r(t) + q(t)/k)\,dt$.

И. В. Рапопорт

7338. О собственных функциях уравнения Гельмгольца. Эйдус Д. М., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4 (66), 201—202

Пусть Ω — конечная односвязная область в m-мерном пространстве, ограниченная поверхностью S, удовлетворяющей условиям Ляпунова. Изучается интегральный оператор A_λ в пространстве $L_2(S)$, определяемый равенством

$$A_\lambda f = \int_S \frac{I_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k} f(y)\,ds_y,$$

где $\lambda > 0$, $k = (m - 2)/2$, r_{xy} — расстояние между точками x и y, лежащими на S. Формулируется теорема: Пусть при некотором $\lambda > 0$ уравнение $A_\lambda f = 0$ имеет нетривиальное решение f. Тогда число λ^2 является собственным значением для уравнения

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \qquad (1)$$

в Ω при краевом условии

$$U|_S = 0, \qquad (2)$$

причем существует такая собственная функция u, соответствующая собственному значению λ^2, что $(\partial u/\partial n)|_S = f$.

Пусть λ^2 не является собственным значением уравнения (1) при условии (2). Ставится задача: найти решение уравнения (1) при краевом условии $U|_S = \varphi$ с за-

данной на S непрерывной φ. Утверждается, что

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\theta_i)}{\mu_i}\int_S\frac{I_k(\lambda r_{xy})}{r_{xy}^k}\theta_i(y)\,ds_y \text{ (сходимость в среднем),}$$

где μ_i — собственные значения, θ_i — соответствующие собственные функции оператора A_λ. Б. М. Левитан

7339. Об асимптотике и некоторых тождествах для спектральной функции Штурм — Лиувиллевского оператора. Дикий Л. А., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 5, 687—690

Изучается оператор

$$Au=-u''+p(x)u,\ u'(0)=0,\ 0\leqslant x<\infty.$$

Предполагается, что $p(x)$ бесконечно дифференцируема и спектр оператора положителен. Пусть

$$\theta(x,y;\ t)=\int_0^t\omega(x,\lambda)\,\omega(y,\lambda)\,d\rho(\lambda)$$

— спектральная функция оператора. Обозначим: $Mf(x)=x^{-1}\int_x^{2x}f(t)\,dt$, M^kf — результат k таких осреднений

$$\int_0^{\infty(k)}f(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T(1-t/T)^kf(t)\,dt$$

Доказываются следующие две теоремы:

I. Существуют $r_i=r_i(x,y)$ такие, что при $x,y\neq0$ и $t\to\infty$

$$M^{k+2}\left[\theta(x,y;\ t-1)-\sum_{i=0}^{k}r_it^{-i+1/2}\right]=O(t^{-k-1/2+\varepsilon})$$

II.

$$\int_0^{\infty(2k+1)}t^{k-1}\left\{\theta(x,y;\ t-1)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{k}r_it^{-\nu+1/2}\right\}dt=0\ (x,y\neq0).$$

Доказательства основаны на изучении аналитического продолжения операторной «дзета-функции» $Z(s;x,y)=\int_0^\infty(t+1)^{-s}d\theta(x,y;\ t)$. Б. М. Левитан

7340. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с почти периодическими коэффициентами и квазилинейные уравнения с малым параметром. Сандор (Ecuaţiile diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi aproape-periodici şi equaţiile cvasiliniare cu parametru mic. Sandor Ştefan), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, 7, № 3, 683—698 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^{n}p_j(t)\,x^{(n-j)}=f(t)+\mu F(t,X,\mu),\qquad(1)$$

где $p_0(t)\equiv1$; $p_j(t)=\mu_j+\sum_{k=1}^{\infty}a_{kj}e^{i\alpha_{kj}t}\in C^{(n-j)}(-\infty,+\infty)$ $(j=1,2,\ldots,n)$, причем $\alpha_{kj}\geqslant\beta>0$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kj}|=M_j<+\infty$; $f(t)$, $F(t,X,\mu)$ — непрерывные, почти периодические по t функции и, сверх того, F удовлетворяет в некоторой области условиям Липшица по аргументу $X=(x,x',\ldots,x^{(n-1)})$; μ — малый параметр. Предполагается, что замыкание множества чисел $\sum_{k,j}l_{kj}\alpha_{kj}$ ($l_{kj}\geqslant0$ — целое) не содержит ни одного из чисел $i(\alpha_r-\alpha_s)$ $(r,s=1,2,\ldots,m;\ r\neq s)$, где α_k $(k=1,2,\ldots,m)$ — различные корни уравнения $\alpha^n+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\alpha^{n-j}=0$ (условие A).

Доказывается, что если $\operatorname{Re}\alpha_j\neq0$ $(j=1,2,\ldots,m)$, то для достаточно малого $|\mu|$ уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение, которое при $\mu=0$ сводится к почти периодическому решению порождающего уравнения.

Для случая $\operatorname{Re}\alpha_s=0$ $(0\leqslant s\leqslant m)$, если $\mu=0$, то для существования почти периодического решения уравнения (1) достаточно, чтобы спектр функции $f(t)$ находился правее числа $\gamma=\max(\delta+\operatorname{Im}\alpha_s)\leqslant\beta$, где $\delta>0$. Если же $\mu\neq0$, то условия усложняются. Методы доказательства аналогичны методам Малкина (РЖМат, 1955, 3197; 1956, 417). Автор отмечает, что задача была поставлена А. Халанаем. Б. П. Демидович

7341. О t-подобии матриц и устойчивости линейных дифференциальных систем. Конти (Sulla t-similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari. Conti Roberto), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e natur, 1955, 19, № 5, 247—250 (итал.)

Рассматривается система

$$\dot y=A(t)\,y,\qquad(I)$$

где вещественная или комплексная $n\times n$-матрица $A(t)$ измерима и суммируема в каждом конечном интервале Δ вещественной полуоси $0\leqslant t<\infty$. Множество таких матриц обозначено через $\mathfrak{M}$. Через τ обозначено множество матриц $T(t)$, абсолютно непрерывных в каждом Δ и таких, что $\|T(t)\|$ и $\|T^{-1}(t)\|$ ограничены на всей полуоси $0\leqslant t<\infty$.

Матрицы A и $B\in\mathfrak{M}$, а вместе с ними системы (I) и

$$\dot z=B(t)\,z\qquad(II)$$

называются t-подобными, если существует такая $T\in\tau$, что $\dot T+TB-AT=0$ во всех точках, где $\dot T$ существует и конечна, т. е. почти всюду в $0\leqslant t<\infty$. Очевидно, система (II) возникает из (I) в результате замены $z=T(t)\,y$. Отсюда выводятся весьма простые замечания об одновременной устойчивости (обычной, равномерной, асимптотической) или неустойчивости решений t-подобных систем (I) и (II). Р. Э. Виноград

7342 К. Вынужденные колебания в нелинейных системах. Хаяси (Forced oscillations in non-linear systems. Hayashi Chihiro, Osaka, Nippon Printing and Publ. Co., Ltd, 1953, XIV + 164 p., 4.50 doll.) (англ.)

Книга предназначена для инженеров и физиков; ее задача — дать практическое знание о том, какие явления могут возникнуть в нелинейных обыкновенных уравнениях 2-го порядка вида

$$d^2v/dt^2=F(v,\ dv/dt,\ t),$$

часто встречающихся в физических задачах. Автор справился с этой задачей хорошо как по громадному количеству числовых результатов, представленных в хорошо выполненных диаграммах, так и по многим ценным экспериментальным результатам, полученным из нелинейных электрических систем. Числовые и экспериментальные результаты — на самом деле выдающаяся черта этой книги, в этом отношении никакую книгу нельзя сравнивать с этой. Подход к математической проблеме реалистический. Изложение не чисто описательное, однако автор не считал нужным вводить-

сложный аппарат, необходимый для развития теории с абсолютной строгостью. Обычно он выбирает решение в виде суммы ряда круговых функций различных гармоник и субгармонических последовательностей и подставляет его в уравнение. В полученном уравнении коэффициенты при некоторых гармониках приравниваются нулю, чтобы получить неизвестные коэффициенты, а остальные игнорируются. Затем приближенное решение, полученное таким путем, исследуется на устойчивость с помощью теории возмущений, примененной Хиллом при изучении движения Луны. Эти приемы достаточны для целей автора и он поэтому не ставит задачу — дать различные другие, но более или менее эквивалентные методы, которые можно найти в других книгах. В гл. 1 подробно излагаются вопросы устойчивости и выводятся более удобные формулы, чем обычно встречаются при изложении методом Хилла. В гл. 2, 3 и 4 описываются соответственно колебания, обертоны и гармонические колебания. В гл. 5 и 6 излагаются неустановившиеся собственные и субгармонические колебания с использованием метода фазовой плоскости. В приложениях объясняются разнообразные специфические особенности, использованные в тексте. Книга является ценной с точки зрения любого читателя. Много труда вложено автором при ее создании.

E. Pinney

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 250

7343 К. Общая теория уравнения Матьё и некоторых других дифференциальных уравнений механики. Кемпбелл (Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique. Campbell Robert, Paris, Masson, 1955, xvi, 272 p., ill.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 5, 102 (франц.)

7344 К. Элементарные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Кауцкий (Elementární metody rosení obycejnych diferenciálnich rovnic. Kaucký Josef), Praha, Nakl. Ceskosl. akad. ved., 1953, 22 s., 88 Kčs.) (чеш.)

Рассматриваются такие типы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых можно выразить через элементарные функции или интегралы от этих функций. Книга предназначена для слушателей высших технических школ и техников-практиков. В ней подробно разобрано много конкретных примеров из геометрии и физики, которые сводятся к исследуемым типам уравнений.

J. Mařík

7345 К. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Коддингтон, Левинсон (Theory of ordinary differential equations. Coddington Earl A., Levinson Norman, International Series in Pure and Applied Mathematics, N.-Y., McGraw-Hill, 1955, 429 p., 8.50 doll.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 7, 23 (англ.)

Монография по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая много нового материала, в том числе ряд недавних результатов авторов, а также новое изложение ряда вопросов; в особенности это относится к разделам, посвященным исследованию решений в окрестности иррегулярной особой точки, асимптотическому поведению решений уравнений, содержащих большой параметр, теории устойчивости нелинейных систем, теории возмущений систем, имеющих периодическое решение, и теории уравнений на торе.

Книга состоит из 17 глав, причем материал по главам распределяется следующим образом: Гл. 1 и 2. Вопросы существования и единственности решения; кроме обычного материала, здесь имеется много результатов, усиливающих и обобщающих известные теоремы о существовании и единственности решения и зависимости решения от начальных данных и параметров. Для случая системы дифференциальных уравнений применяется векторная запись, упрощающая изложение. Гл. 3. Системы линейных дифференциальных уравнений и линейные дифференциальные уравнения высших порядков, включая системы с постоянными и с периодическими коэффициентами, причем применяется векторно матричная запись. Гл. 4 и 5. Аналитическая теория дифференциальных уравнений и исследование решений в окрестности изолированной особой точки; случай иррегулярной особой точки здесь изложен по-новому, причем доказательства упрощаются благодаря применению теоремы Фрагмена—Линделефа. Гл. 6. Асимптотика решений линейных уравнений и систем линейных уравнений, содержащих большой параметр, включая случай кратных характеристических корней. Гл. 7. Самосопряженные задачи о собственных значениях в конечном интервале. Существование бесконечного числа собственных значений и теорема о разложении по собственным функциям получаются путем сведения к интегральному уравнению и доказательства этих теорем для интегрального уравнения. Гл. 8. Теоремы осцилляции и сравнения для линейного уравнения второго порядка и исследование областей устойчивости и неустойчивости для линейного уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами. Гл. 9. Сингулярные краевые задачи о собственных значениях для уравнения второго порядка. Излагаются вейлевская классификация таких задач (круг и точка Вейля), теоремы о разложении в интеграл по собственным функциям и формула для спектральной функции. Рассматривается также случай сингулярности обоих концов интервала. Гл. 10. Результаты гл. 9 обобщаются на сингулярные краевые задачи для уравнений высших порядков. Доказательство теоремы о разложении в интеграл по собственным функциям в гл. 9 и 10 является видоизменением известного доказательства Б. М. Левитана. Гл. 11. Алгебраические свойства линейных краевых задач в конечном интервале. Излагаются формула Лагранжа и соотношения между рангом данной и сопряженной краевых задач, а также свойства неоднородных краевых задач. Применение матричной записи дает здесь возможность записать в удобной матричной форме условие сопряженности краевых условий. Гл. 12. Несамосопряженные краевые задачи о собственных значениях в конечном интервале. Сперва рассматривается случай уравнения $-x'' = \lambda x$ с произвольными краевыми условиями и полученные результаты применяются к случаю уравнения $-x'' + q(t)x = \lambda x$. Аналогично общий случай уравнения n-го порядка сводится к более простому случаю уравнения $y^{(n)} = \lambda y$. Теорема о разложении по собственным функциям излагается только для случая простых полюсов резольвенты. Гл. 13. Вопросы устойчивости нелинейных систем и асимптотическое поведение их решений при больших по модулю значениях аргумента. Кроме обычных теорем об устойчивости, излагаются также теоремы об условной устойчивости, когда начальные значения должны находиться на фиксированном многообразии. Гл. 14. Теория возмущений нелинейных систем, имеющих периодическое решение. Излагаются условия, при которых возмущенное уравнение также имеет периодическое решение. Гл. 15 и 16. Исследование поведения интегральных кривых системы двух уравнений в окрестности изолированной особой точки и теория Пуанкаре — Бендиксона. Гл. 17. Дифференциальные уравнения на торе, включая эргодический случай.

В конце каждой главы помещены задачи, некоторые из которых весьма трудны. В частности, в задачи помещены отсутствующие в основном тексте вопросы исследования спектра сингулярных краевых задач в зависимости от свойств коэффициентов.

М. А. Наймарк

7346 Д. **Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые множители при производных. Беднягин Ф. В.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. авиац. ин-т., М., 1956

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

7347. **Решение обобщенного уравнения Эйлера для однородных функций. Хорних** (Lösung der verallgemeinerten Eulerschen Differentialgleichung für homogene Funktionen. Hornich H.), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 361—365 (нем.)

Решается задача Коши для обобщенного уравнения Эйлера

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \partial u/\partial x_i = f,\ u|_{x_n=\delta} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

$$\left(f(x_1, \ldots, x_n) = \sum f_{l_1,\ldots,l_n} x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n},\ \alpha_n \neq 0\right)$$

методом степенных рядов, регулярных по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и, кроме членов $x_n^{l_n}$, содержащих еще члены $x_n^{\lambda_n}$, где $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i l_i + \alpha_n \lambda_n = 0$; $l_1, \ldots, l_n$ — любые натуральные числа (λ_n, вообще говоря, нецелые).

М. И. Вишик

7348. **Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка с двумя неизвестными функциями двух независимых переменных. Гольдхаген** (Despre integrarea explicită a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul întîi cu două funcţii necunoscute de două variabile independente. Goldhagen E.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 3, 623—644 (рум.; рез. русс., франц.)

Найдены и проинтегрированы все уравнения первого порядка с двумя неизвестными функциями двух переменных

$$\Phi(x, y, z_1, z_2, \partial z_1/\partial x, \partial z_2/\partial x, \partial z_1/\partial y, \partial z_2/\partial y) = 0,$$

допускающие общее решение вида $z_1 = f_1(x, y, \varphi_{i,j})$, $z_2 = f_2(x, y, \varphi_{i,j})$, $i+j = 0, 1, \ldots, n$, где f_1 и f_2 — фиксированные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi(x, y)$ — произвольная функция, $\varphi_{i,j} = \partial^{i+j}\varphi / \partial x^i \partial y^j$. Доказывается, что все эти уравнения посредством преобразования вида $\bar{z}_1 = P_1(x, y, z_1, z_2)$, $\bar{z}_2 = P_2(x, y, z_1, z_2)$ можно представить в одной из таких форм:

$$\partial z_1/\partial x - \partial z_2/\partial y + C(x, y) z_2 + C_1(x, y) z_1 + C_2(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$z_2 + F(x, y, z_1, \partial z_2/\partial x, \partial z_1/\partial x, \partial z_1/\partial y) = 0. \quad (2)$$

Рассматриваются два случая уравнений (1): 1) $dC/dx + dC_1/\partial y = 0$ и 2) $\partial C/\partial x - \partial C_1/\partial y \neq 0$. Общий интеграл уравнений (1) в случае 1) содержит лишь произвольную функцию φ и ее производные первого порядка, а в случае 2) — функцию φ и ее производные до второго порядка включительно. Общий интеграл (2) имеет вид $z_1 = \varphi$, $z_2 = \bar{\Phi}(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y)$. Библ. 5 назв. Статья примыкает к работам С. В. Валландера (РЖМат, 1953, 269; 1955, 1771). Опечатка: на стр. 636, в 4 строке снизу формула должна иметь вид (1).

Д. Б. Тополянский

7349. **Интерпретация и функциональное расширение новых методов интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Фикера** (Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi d'integrazione delle equazioni differenziali lineari. Fichera Gaetano), Atti IV congr. Unione mat. ital. 1953, **1**, 45—67 (итал.)

Обзор некоторых методов (Рица, Треффца, Пиконе и др.) решения краевых задач. Метод Пиконе сводится к нахождению разложения искомого решения задачи в ряд по некоторой полной и ортонормированной системе функций в соответственно подобранном гильбертовом пространстве. Исходной при этом является формула Грина для заданного и сопряженного дифференциальных операторов, причем в граничные члены этой формулы должны входить выражения, значения которых задаются при постановке краевой задачи. Изложена абстрактная схема этого метода, данная автором. Приведены критерии полноты данной системы функций $\{v_i\}$ в соответствующем гильбертовом пространстве. Изложенное иллюстрируется рядом конкретных примеров.

М. И. Вишик

7350. **Распространение потенциального метода интегрирования на канонические инволюционные системы в точных дифференциалах. Аржаных И. С.**, Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 15. 87—91

Обобщая свои предыдущие работы (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 4, 144—151; РЖМат, 1954, 1650), автор развивает метод Гамильтона — Якоби («потенциальный метод») для нахождения полной системы интегралов канонической системы

$$dq_\nu - \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{\partial H_\sigma}{\partial p_\nu}\right) dt_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\rho=1}^{r} F_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial H_{\rho\sigma}}{\partial p_\nu}\right) dt_\sigma,$$

$$dp_\nu + \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\frac{dH_\sigma}{\partial q_\nu}\right) dt_\sigma = -\sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\rho=1}^{r} F_{\rho\sigma} \left(\frac{\partial H_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right) \partial t_\sigma,$$

где $\nu = 1, \ldots, n$; $s(r+1) < n$, функции H_σ, $H_{\rho\sigma}$ не зависят от $t_1, \ldots, t_s$ и находятся в инволюции. Область задания, степень гладкости и т. п. участвующих функций не уточняются.

А. Д. Мышкис

7351. **Об интеграле Дарбу уравнения с частными производными первого порядка, разрешенного относительно одной из производных, и об обобщении этого интеграла. Жерме** (Sur l'intégrale de Darboux d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre de forme résolue et sur sa généralisation. Germay R. H.), Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1953, **20**, № 6—7, 264—275 (франц.)

Продолжая свою предыдущую работу (C. r. Acad. sci., 1924, **178**, 2225), автор рассматривает решение уравнения

$$p_1 = f(x_1, \ldots, x_n, z, p_2, \ldots, p_n),$$

если при $x_1 = x_1^0$ заданы соотношения $x_2^0 = \lambda_2(x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_k^0 = \lambda_k(\ldots), z^0 = \lambda(\ldots)$, а $x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0, p_2^0, \ldots, p_k^0$ произвольны. Построение решения осуществляется в малом предположении голоморфности участвующих функций при помощи метода характеристик. Метод переносится на соотношения вида $G_1(x_2^0, \ldots, x_n^0, z^0) = 0, \ldots, G_k(\ldots) = 0$. В заключение рассматриваются условия вида

$$R_j(t_1, \ldots, t_{n-1}, x_2^0, \ldots, x_n^0, z^0, p_2^0, \ldots, p_n^0) = 0,$$

где $j = 1, \ldots, 2n-1$, в частности необходимые соотношения между функциями R_j. Все рассмотрения элементарны. Допущено много опечаток.

А. Д. Мышкис

7352. **Свойство самосопряженных систем дифференциальных уравнений. Николау** (O proprietate a sistemelor diferenţiale autoadjuncte. Nicolau Edmond). Bul. ştiint Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 4, 903—911 (рум.; рез. русс. франц.)

Опираясь на некоторые результаты Моисила (Moisil Gr. C., Bul. ştiinţ, Acad. R. P. R., Sec. mat. şi fiz., 1951, 3, № 2, 189), автор рассматривает линейную систему уравнений

$$\Sigma_j P_{ij}(\partial/\partial x)\,\varphi_i = f_i,\ ij = 1, \ldots, N,$$

где P_{ij} — полиномы с постоянными коэффициентами от $\partial/\partial x$; φ_i — неизвестные функции; f_i — заданные функции переменных $x^1,\ldots,x^n$. При помощи сопряженной системы автор получает формулу Грина и показывает ее аддитивность в случае самосопряженной системы. На примере показывается, что не всякая система с постоянными коэффициентами обладает таким свойством аддитивности

I. P. Elianu

7353. Классификация уравнений с частными производными. Биркгофф (Classification of partial differentialequations. Birkhoff Garrett), J. Soc. Industr. Appl. Math., 1954, 2, 57—67 (англ.)

Рассмотрим систему уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами

$$du/\partial t = P(\partial/\partial y_1,\ldots,\partial/\partial y_n)\,u, \qquad (1)$$

где элементы матрицы P представляют собой полиномы. Назовем полиномом устойчивости системы (1) выражение $\sigma(\lambda,q) = \det[\lambda E - P(q)]$, $q = (q_1,\ldots,q_n)$. Система (1) называется устойчивой, если для каждого вещественного значения q все корни $\lambda(q)$ полинома устойчивости имеют отрицательную вещественную часть, и регулярной, если эти вещественные части имеют конечную, не зависящую от q верхнюю границу. Автор утверждает, что для регулярной системы начальная задача является правильно поставленной в некотором банаховом пространстве, содержащем все тригонометрические полиномы. Если система устойчива, то задача со свободным членом разрешима, только если этот свободный член и решение тождественно равны нулю при $t<0$. Автор указывает, с другой стороны, что условия устойчивости и регулярности сводятся к установлению положительности всюду некоторой системы полиномов. Далее рассматриваются соотношения между регулярностью и гиперболичностью, для чего приводится несколько теорем Гординга (Gårding L., Acta math., 1951, 85, 1—62), относящихся к системе (1).

Статья имеет информационный характер: она не содержит ни уточнений, ни доказательств. H. G. Garnir

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 39

7354. Задача Коши для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных с функциональными аргументами. Гуль И. М., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 153—156

Рассматривается дифференциально-функциональное уравнение с частными производными

$$\Phi(x, u(\alpha^1(x)),\ldots,u(\alpha^k(x)),\ \mathrm{grad}\,u(x)) = 0$$
$$(x = (x_1,\ldots,x_n),\ \alpha^i = (\alpha_1^i,\ldots,\alpha_n^i))$$

при обычных предположениях гладкости, причем все функции $\alpha^i(x)$ определены и дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x^0. Предполагается, что отображения, осуществляемые функциями $\alpha = \alpha^i(x)$, для которых $\alpha^i(x^0) = x^0$, не растянутые. Тогда для построения вблизи точки $x = x^0$ решения начальной задачи применим обычный метод Коши, однако характеристики получаются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Автор кратко упоминает также о квазилинейных уравнениях 1-го порядка и об уравнении на плоскости $\partial^2 u/\partial x\partial y = \ldots$ с аналогичными функциональными членами.

А. Д. Мышкис

7355. Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных. Борок В. М., Докл. АН СССР, 1954, **47**, № 6, 949—952; Матем. сб., 1955, **36**, № 2, 281—298

Изучается задача Коши для системы линейных уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\ t\right)u(x,t), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x). \qquad (2)$$

Здесь $u(x,t)$ — искомая вектор-функция с n составляющими; x — точка с координатами $(x_1,\ldots,x_N)$; $P\left(\frac{1}{2\pi i}\times\right.$ $\left.\times\frac{\partial}{\partial x},\ t\right)$ — матрица, имеющая n строк и n столбцов, элементами которой являются полиномы от дифференциальных операторов по переменным $x_1,\ldots,x_N$ с коэффициентами, зависящими от t; $u_0(x)$ — заданная вектор-функция. Автор пользуется методом обобщенных функций, введенных И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (РЖМат, 1955, 3291). После преобразования Фурье (1) и (2) переходят в систему и условие

$$dv(s,t)/dt = P(s,t)\,v(s,t), \qquad (3)$$

$$v(s,0) = v_0(s). \qquad (4)$$

Здесь $v(s,t) = \widetilde{u(x,t)}$ — символ $\sim$ означает преобразование Фурье; s — точка с координатами $(s_1,\ldots,s_N)$ двойственного пространства. Пусть $Q(s,t,t_0)$ — матрица фундаментальной системы решений (3), $Q(s,t_0,t_0) = E$, E—единичная матрица; тогда $v(s,t) = Q(s,0,t)\,v_0(s)$ будет решением (3) — (4).

Пусть $\widetilde{Q(s,0,t)} = \widetilde{Q}(x,0,t)$; тогда решение задачи Коши для системы (1) запишется так:

$$u(x,t) = \widetilde{Q}(x,0,t) * u_0(x); \qquad (5)$$

здесь $*$ означает свертку. Автор определяет понятие свертки для обобщенных функций. Отмечается, что в некоторых случаях, например, в случае параболической в смысле И. Г. Петровского системы, формула (5) дает обычную функцию и решение имеет вид

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{Q}(x-\xi,0,t)\,u_0(\xi)\,d\xi.$$

Автор называет систему гиперболической, если элементы матрицы $Q(s,t_0,t)$ удовлетворяют условиям:

$$|Q_{ij}(s,t_0,t)| \leqslant c_1 e^{c|s|},\ |Q_{ij}(\sigma,t_0,t)| \leqslant c_2(1+|\sigma|^r),$$

где c, c_1, c_2, r — положительные постоянные; $\rho = \sigma + i\tau$; $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_N)$, $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_N)$. Устанавливается необходимое и достаточное условие гиперболичности. Это условие аналогично известному условию (А) — И. Г. Петровского (Бюлл. МГУ, 1938, т. 1, № 7). Автор не налагает ограничений на поведение начальных функций на бесконечности. В случае систем с постоянными коэффициентами также устанавливается необходимый и достаточный критерий гиперболичности, вполне аналогичный необходимому и достаточному критерию равномерной корректности постановки задачи Коши, установленному И. Г. Петровским для систем с постоянными коэффициентами (§ 5 упомянутый выше работы).

Система с постоянными коэффициентами называется нормальной гиперболической, если матрица $P(s,t) = P(s)$ простой структуры и если корни характеристического уравнения этой матрицы имеют вид $\lambda_k = ia_kR + \beta$, где a_k — действительные числа; β — любое комплексное число,

$R=\sqrt{\sum_{j=1}^{N} y_j^2-c^2}$; $y_j=2\pi s_j+i\alpha_j$, α_j и c — постоянные. Известно из теории матриц, что

$$Q(s,0,t)=e^{P(s)t}=q(\lambda)|_{\lambda=P(s)t},$$

$$q(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_{k-1})(\lambda-\lambda_{k+1})\dots(\lambda-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)}e^{\lambda_k},$$

Для нормальной гиперболической системы имеет место теорема: Коэффициенты в многочлене $q(\lambda)$ при λ^m являются линейными комбинациями выражений:

$$\int\dots\int R^{-1}\sin(a_kRt_1)\,dt_1\dots dt_p;\quad p\geqslant 1$$

и $$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}(R^{-1}\sin a_kRt),\quad \nu\geqslant 0;\quad k=1,\dots,n.$$

По формуле (3) $u(x,t)=\widetilde{Q(s,0,t)}*u_0(x)=q(\widetilde{P(s)t}*u_0(x)$. Так как элементами матрицы $[P(s)]$ являются полиномы относительно $(s_1,\dots,s_N)$, а такие полиномы при преобразовании Фурье переходят в операторы дифференцирования по соответствующим переменным, то для нахождения явного выражения для решения остается только вычислить свертку $R^{-1}\sin aRt*u_0(x)$, что и делается. Формулы, полученные для этой свертки, имеют различное аналитическое выражение при N четном и при N нечетном. В качестве примеров выписаны формулы, дающие явное решение задачи Коши для системы уравнений Максвелла и для системы Дирака. С. А. Гальперн

7356. О задаче Коши для линейной системы уравнений в частных производных с дифференциальными операторами Штурма — Лиувилля. Костюченко А. Г., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 1, 17—20

Рассматривается следующая смешанная задача для системы линейных уравнений с частными производными специального вида:

$$\partial u/\partial t=P(L,t)\,u;\qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_0(x)\ (\partial u/\partial x_i)|_{x_i=0}=0,\quad i=1,\dots,N.\qquad (2)$$

Здесь $u(x,t)$ — вектор-функция переменной t и вектора $x=(x_1,\dots,x_N)$, $P(L,t)$ — матрица, элементами которой являются полиномы от операторов Штурма — Лиувилля $L_i\equiv\partial^2/\partial x_i^2-q_i(x_i)$ с коэффициентами, зависящими только от переменной t.

Решение ищется, повидимому, при $x_i\geqslant 0$; $i=1,\dots,N$. Автор пользуется обобщенными функциями (РЖМат, 1955, 3291), определенными для специального класса Ф основных функций; $f(x_1,\dots,x_N)\in\Phi$, если она дважды непрерывно дифференцируема и к ней можно бесконечное число раз применять операторы L_i, причем все функции $L_i^n f$ убывают на бесконечности быстрей любой степени r^{-1}, $r=\sqrt{x_1^2+\dots+x_N^2}$. Оператор $L_iy=y''-q_i(x_i)\,y$, заданный на полуоси, определяет преобразования Фурье — Штурма — Лиувилля (Ф. Ш. Л.) по формулам:

$$\widetilde{f}_i(x)=\psi_i(\lambda_i)=\int_0^\infty f(x_i)\,\varphi_i(x_i,\lambda_i)\,dx_i,$$

$$\widetilde{\psi}_i(\lambda_i)=f_i(x_i)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_i(\lambda_i)\,\varphi_i(x_i,\lambda_i)\,d\sigma(\lambda_i),$$

где $\varphi_i(x_i,\lambda_i)$ — собственная функция оператора L_i с начальными условиями $\varphi_i(0,\lambda_i)=1$; $\varphi'_{x_i}(0,\lambda_i)=0$; $\sigma(\lambda_i)$ — спектральная функция.

Формула преобразования Ф. Ш. Л. для функции многих переменных имеет вид

$$\widetilde{f}(x_1,\dots,x_N)=\psi(\lambda_1,\dots,\lambda_N)=$$

$$=\int_0^\infty\varphi_N(x_N,\lambda_N)\,d\lambda_N\ \dots\ \int_0^\infty f(x_1,x_2,\dots,x_N)\,\varphi_1(x_1\lambda_1)\,dx_1;$$

тогда $\widetilde{P(L,t)\,f}=P(-s^2,t)\,\widetilde{f}$. Здесь, повидимому, автор через $-s^2$ обозначает $(-s_1^2,-s_2^2,\dots,-s_N^2)$, $-s_k^2=\lambda_k$. После преобразования Ф. Ш. Л. система (1) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dv/dt=P(-s^2,t)\,v.\qquad (3)$$

Пусть $Q(s,t)$ — фундаментальная матрица решений (3) такая, что $Q(s,t_0)=E$, где $s=(s_1,\dots,s_N)$, а E — единичная матрица. Обозначим через p наивысшую степень по переменным $(s_1,\dots,s_N)$ элементов матрицы $P(-s^2,t)$, а через p_0 наивысший порядок роста элементов матрицы $Q(s,t)$; всегда $p_0\leqslant p$. Число p_0 называется приведенным порядком системы; пусть $1/p_0'+1/p_0=1$

Теорема. Если начальная вектор-функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству $|u_0|<c_1e^{c|x|^{p_0'}-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, то решение задачи (1)—(2) существует в классе обобщенных вектор-функций $u(x,t)\in T\left(Z^{p_0'-\delta}_{p_0'-\delta}\right)$, $\delta>0$, и единственно в этом классе. Предполагается, что $|q_i(x_i)|<ce^{x_i^{p_0'-1-\varepsilon}}$; $\varepsilon>0$ (определение класса основных функций Z_r^r см. РЖМат, 1955, 3291).

Автор называет систему (1) параболической, если элементы матрицы $Q(s,t)$ принадлежат пространству Z_p^p. Приводится теорема: Если система (1) параболическая и начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству $|u_0(x)|<ce^{\varepsilon|x|^{p'}}$ при любом $\varepsilon>0$, то решение будет обычной функцией. С. А. Гальперн

7357. Интегральное преобразование Хольмгрена — Рисса. Этлингер (The Holmgren — Riesz integral transform. Ettlinger H. J.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 97—98 (англ.)

Изучаются свойства преобразования

$$F(2\alpha;f(t))=\frac{\nabla^{2n}(x)}{A(\alpha+n)}\int_{V(x)}f(t_1,t_2,t_3,t_4)\times$$

$$\times\left[(x_1-t_1)^2-\sum_{i=2}^{4}(x_i-t_i)^2\right]^{\alpha+n-2}dV,$$

где $\nabla^2(x)$ — даламбертиан, α — комплексное, причем $\mathrm{Re}(\alpha+n)>1$; $V(x)$ — внутренность характеристического конуса ($a\leqslant t_1\leqslant x_1$). Отмечена возможность приложения этого преобразования к решению задачи Коши.

М. И. Вишик

7358. О задаче Дирихле для уравнения эллиптического типа, вырождающегося на некотором множестве внутренних точек области. Ильин А. М., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 1, 9—12

Рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$L(u)\equiv a_{11}(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2a_{12}(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+a_{22}(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+$$

$$+b_1(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)\,u=h(x,y)\qquad (1)$$

в ограниченной области D плоскости (x,y). Предпола-

гается, что в $\bar{D}c \leqslant 0$, $a_{11}+a_{22}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \geqslant 0$ и все коэффициенты уравнения — достаточно гладкие функции.

Пусть множество точек M, где $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, состоит из конечного числа внутренних точек Q_i и конечного числа кривых l_i, имеющих ограниченную кривизну, и пусть точки границы Γ области D, не принадлежащие M, регулярны для уравнения Лапласа.

Основной результат работы: существует единственная дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в D уравнению (1), непрерывная в $D+\Gamma$ и принимающая на Γ заданные непрерывные значения, если кривые l_i не пересекаются между собой и границей Γ и ни в одной точке кривой l_i касательная не совпадает с характеристическим направлением уравнения (1).

Эта теорема остается справедливой, если кривые l_i пересекаются с Γ в конечном числе точек, причем каждой такой точки можно коснуться извне кругом так, что касательная в точке соприкосновения не совпадает с характеристическим направлением в этой точке. Теорема справедлива также, если кривые l_i имеют конечное число точек пересечения между собой или точек, касательная в которых имеет характеристическое направление («критические точки»), и в этих точках выполнено условие $|b(x, y)|^k \leqslant f(x, y)$, $k>0$ — некоторое число, а уравнение (1) в окрестности такой точки приведено к виду

$$\partial^2 u/\partial x^2 + f\partial^2 u/\partial y^2 + a\partial u/\partial x + b\partial u/\partial y + cu = h.$$

Последнее условие на «критические точки», которое существенно используется при доказательстве, по недосмотру опущено автором в формулировке теоремы. На стр. 10, 12 строке сверху, вместо $|u_\varepsilon(x, y)| \leqslant \max_{p\subset\Gamma}|\varphi(p)|$ нужно читать: $|u_\varepsilon(x, y)| \leqslant N$, где $N>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от ε.

О. А. Олейник

7359. Тензорное уравнение эллиптического типа. Даффф (A tensor equation of elliptic type. Duff G. F. D.), Canad. J. Math., 1953, № 4, 524 — 535 (англ.)

На замкнутом компактном ориентируемом n-мерном римановом многообразии F класса C^∞ рассматривается уравнение

$$\Delta\varphi + A\varphi = 0, \qquad (1)$$

где φ — внешняя дифференциальная форма степени p, Δ — инвариантно записанный оператор Лапласа, а A — тензорное поле ранга $2p$ класса C^1, симметричное по обеим группам p индексов и кососимметричное внутри каждой из этих групп; под $A\varphi$ понимается свертка A с кососимметричным тензором коэффициентов формы φ. На уравнение (1) переносятся методы, примененные автором ранее (РЖМат, 1953, 757) для уравнения Лапласа, однако для положительно определенного (в естественном смысле) тензора A ряд результатов упрощается; отметим в связи с этим, что для простейшего случая $p=0$ уравнение (1) переходит в $\Delta\varphi - A\varphi = 0$, где Δ — обычный оператор Лапласа.

После обсуждения возможности применения принципа максимума для φ^2 автор при помощи метода де Рама устанавливает, что на F пространство решений уравнения (1) конечномерно (если тензор A положительно определенный, то нульмерно), а соответствующее неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, если правая часть ортогональна этому пространству. Этот результат дает возможность построить тензор Грина оператора $\Delta + A$. При помощи тензора Грина строятся потенциалы двойного и простого слоя, которые дают возможность привести задачу Дирихле (на $n-1$-мерной границе B класса C^∞ подмногообразия $M\subset F$ заданы $t\varphi$ и $t*\varphi$, где t — оператор проектирования на B, а $*$ — оператор перехода к сопряженной форме; решение ищется в M) и Неймана (на B заданы $t*d\varphi$ и $t*d*\varphi$, где d — оператор дифференцирования) к системе интегральных уравнений. Анализ в случае положительно определенного тензора A этих уравнений показывает, что в этом случае обе задачи обязательно имеют, и притом единственное, решение. В общем случае уравнение (1) преобразуется к виду $\Delta\varphi + A_0\varphi = \widetilde{A}\varphi$, где тензор A_0 положительно определенный, а тензор $\widetilde{A}$ невырожденный; для разрешимости обеих краевых задач здесь необходимы и достаточны некоторые условия ортогональности. В заключение просто показано, что для существования в M фундаментального решения уравнения Лапласа необходима и достаточна однозначная разрешимость задачи Дирихле для этого уравнения.

А. Д. Мышкис

7360. Об областях разрешимости задачи Дирихле для самосопряженных уравнений эллиптического типа. Скоробогатько В. Я., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 1, 91—95

Приведены достаточные условия для того, чтобы заданное в области D эллиптическое уравнение

$$\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)+Cu=0$$

было уравнением Эйлера некоторого положительного квадратичного функционала. Так, например, достаточным условием для этого является следующее: $\pi^2 d^{-2} > \max_{x\in\bar{D}} NC(x)$, где d — диаметр области D, $N = \max_x(\max_\xi \xi' A^{-1}\xi), A=\|a_{ik}\|, \xi'=\|\xi_1, \ldots, \xi_n\|, \xi=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{Vmatrix}$.

М. И. Вишик

7361. Еще о задаче Дирихле в прямоугольной области. Бончини (Ancora sul problema di Dirichlet in domini rettangolari. Bononcini Vittorio E.), Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1953, **6**, (1951—52), 16—33 (итал.)

Автор продолжает свои уточнения (см. этот же журнал, 1951, 5, 154—164) теорем Чезари (Cesari, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1936, 60, 185—212), касающиеся регулярности решений задачи Дирихле для уравнения $\Delta u - \lambda u = f$ в прямоугольной области $A\subset R^n$. Он показывает, что при соответствующих предположениях о f и граничных условиях первые и вторые производные u удовлетворяют условию Липшица во всей области A (включая границу).

J. Deny

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 42.

7362. Функции Грина и асимптотическое распределение собственных значений и собственных функций. Плейель (Green's functions and asymptotic distribution of eigenvalues and eigenfunctions. Pleijel Åke), Proc. Sympos. Spectral Theory and Different. Probl. Stillwater, Oklahoma, 1955, 439—454 (англ.)

Изложение содержания доклада, посвященного в основном обзору работ Карлемана и автора. В § 1 на примере задачи

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad u|_s = 0, \quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2,$$

излагается метод Карлемана для получения асимптотики собственных функций и собственных значений. В § 2 излагаются различные методы оценки дополнительного члена функции Грина, играющие важную роль в методе Карлемана. Большое внимание уделено вариационному

методу оценок. В § 3 излагаются результаты автора по асимптотике собственных функций и собственных значений для пластинки, т. е. для уравнения, $\Delta^2 u - \lambda u = 0$ при соответствующих граничных условиях. В § 4 рассматривается кратко уравнение $\Delta u + \lambda k(x, y, z)\, u = 0$, где $k(x, y, z)$ меняет знак в области. В связи с этим ставится вопрос о неисследованной еще задаче

$$\Delta^2 u + \lambda \partial^2 u / \partial x \partial y = 0,\ u|_s = (\partial u / \partial n)|_s = 0.$$

В § 5 рассматривается следующая задача с параметром в граничном условии: Пусть V — двумерная область с границей S, содержащей отрезок I оси x. Пусть направление внутренней нормали на I совпадает с положительным направлением оси y. Пусть $\Delta u = 0$, $(x, y) \in V$, $\partial u / \partial y + \lambda y = 0$ на I, $u = 0$ на $S - I$. Можно показать, что собственные значения этой задачи $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ все положительны и собственные функции $\varphi_i(p)$ можно предполагать ортонормированными в том смысле, что $\int_I \varphi_i(s)\, \varphi_k(s)\, ds = \delta_{ik}$.

Изучение асимптотического поведения функции Грина этой задачи приводит к следующим асимптотическим формулам ($p \in I$, $k \to \infty$, $k_0 > 0$ фиксировано, I — длина интервала I):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(p)\, (\lambda_n + k_0)^{-1} (\lambda_n + k)^{-1} \sim (\pi k)^{-1} \ln k,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + k_0)^{-1} (\lambda_n + k)^{-1} \sim (\pi k)^{-1} I \ln k.$$

Из этих формул и тауберовой теоремы Харди — Литтлвуда — Карамата можно получить асимптотику собственных функций и собственных значений.

Б. М. Левитан

7363. О диффузии во внешнем поле и сопряженной проблеме источника. **К и л с о н** (On diffusion in an external field and the adjoint source problem. K e i l s o n J u l i a n), Quart. Appl. Math., 1955, **12**, № 4, 435—438 (англ.)

Диффузия распадающихся частиц со временем жизни во внешнем поле $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ описывается уравнением

$$\partial \rho / \partial t = D \triangle \rho - \rho / \tau - \nabla (\mathbf{F}(\mathbf{r})\, \rho), \qquad (1)$$

(см. РЖМат, 1955, 3782). При этом вероятность $\gamma(\mathbf{r}_0)$ того, что частица, находящаяся в точке $\mathbf{r}_0$, осядет на некоторой поглощающей поверхности S, прежде чем она распадется или достигнет другой заданной поглощающей поверхности S', легко может быть выражена через фундаментальное решение («решение для точечного источника») уравнения, отличающегося от (1) лишь отсутствием производной по времени. Проще, однако, определять $\gamma(\mathbf{r}_0)$ как решение однородного уравнения $D \triangle \gamma - \gamma/\tau + \mathbf{F}(\mathbf{r}) \nabla \gamma = 0$, сопряженного уравнению (1), с граничными условиями: $\gamma = 0$ на S' и $\gamma = 1$ на S. Указывается также, как изменяются граничные условия, если поверхности S' и S не являются чисто поглощающими, а могут частично и отражать частицы.

А. М. Яглом

7364. Несуммируемые обобщенные лапласианы. **Т ш и ц и н с к и й** (Non summable generalized laplacians. T r j i t z i n s k y W a l d e m a r J.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 179—180 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1954, 5101 К).

7365. Замечание к одному решению краевой задачи для бигармонического уравнения. **Б а б у ш к а** (Poznámka k jednomu řešení biharmonického problému. B a b u š k a I v o), Časop. pěstov. mat., 1954, **79**, № 1, 41—63 (чеш.)

Исследуется сходимость предложенного Г. А. Гринбергом приближенного метода (Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 5, 661—664; РЖМат, 1955, 3232) решения первой краевой задачи для бигармонического уравнения

$$\Delta\Delta g(x, y) = 0 \quad (x \in \Omega),\ g|_C = f_1(s),$$

$$(\partial g / \partial n)|_C = f_2(s)$$

в плоском случае. Устанавливается следующая формула разложения в ряд по голоморфным функциям $\psi_n(z)$:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(z),$$

$$\alpha_n = \operatorname{Im} \int_C \bar{F} \psi_n\, dt,\quad F = \partial g / \partial x + i \partial g / \partial y,$$

$$g = \operatorname{Re}(z\bar{\varphi}(z) + \chi(z)),$$

$\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — голоморфные функции, следовательно, g — решение бигармонического уравнения. Значения $F|_C$ выражаются через $f_1(s)$ и $f_2(s)$, а $\Delta g = 4 \operatorname{Re} \varphi'(z)$. Система функций $v_n = \operatorname{Re} \psi_n$ — полная, ортонормированная (по Ω); $\operatorname{Im} \psi_n(z_0) = 0$, $z_0 \in \Omega$.

М. И. Вишик

7366. Теорема единственности решения задачи обтекания клиновидного профиля околозвуковым потоком газа. **К р ю ч и н А. Ф.**, Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 5, 639—640

Приводится доказательство теоремы единственности решения краевой задачи, рассмотренной авторами (РЖМат, 1956, 1406), почти дословно повторяющее известное доказательство Ф. И. Франкля (Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, **9**, № 2, 121—143). Л. В. Овсянников

7367. Оценки типа Фридрихса—Леви для гиперболического уравнения с тремя характеристиками. **Т о м е** (Estimates of the Friedrichs—Lewy type for a hyperbolic equation with three characteristics. T h o m è e V i d a r), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 115—123 (англ.)

Пусть V — замкнутая область плоскости (x_1, x_2) с кусочно-гладкой границей S; $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ — три вещественных числа, a_{ik}, b_i, c $(i, k = 1, 2)$ — вещественные непрерывные функции в V; $D_i = \partial / \partial x_i$,

$$L \equiv \prod_{k=1}^{3} (D_2 - \alpha_k D_1) +$$

$$+ \sum_{i,\, k=1}^{2} a_{ik} D_i D_k + \sum_{i=1}^{2} b_i D_i + c$$

— изучаемый оператор. Пусть $\nu(\nu_1, \nu_2)$ — внешняя нормаль к S; S_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ — часть S, состоящая из точек, для которых из трех чисел $\lambda_k = \nu_2 - \alpha_k \nu_1$ $(k = 1, 2, 3)$ ровно i чисел отрицательны, а остальные неотрицательны. Предполагается, что $\inf |\lambda_k| > 0$ на $S_1 \cup S_2$ $(k = 1, 2, 3)$ и положительно расстояние между частями $S_1 \cup S_2$, для которых $\nu_1 > 0$ и $\nu_1 < 0$. Для задачи

$$Lu = \varphi,\ (\partial^k u / \partial \nu^k)|_{S_i} = \varphi_{ki},\ (k < i,\ i = 1, 2, 3)$$

доказывается единственность решения (теорема 1) и неравенства (теорема 2)

$$\int_V \left(\sum_{i,\, k=1}^{2} u_{ik}^2 + \sum_{i=1}^{2} u_i^2 + u^2 \right) dV \leqslant C \left\{ \int_V \varphi^2 dV + \right.$$

$$+ \int_{S_1} (u_{ss}^2 + u_s^2 + u^2)\, dS +$$

$$+ \int_{S_2} (u_{ss} + u_{s\nu}^2 + u_s^2 + u_\nu^2 + u^2)\, dS +$$

$$\left. + \int_{S_3} (u_{ss}^2 + u_{s\nu}^2 + u_{\nu\nu}^2 + u_s^2 + u_\nu^2 + u^2)\, dS \right\},$$

где C — постоянная, не зависящая от выбора u.

Х. Л. Смолицкий

7368. К методу разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач. Халилов З. И., Докл. АН АзССР, 1954, **10**, № 4 235—239 (рез. азерб.)

Рассматривается решение уравнения

$$\partial^2 U/\partial x^2 + C(t, x)\,\partial U/\partial t - \partial^2 U/\partial t^2 = 0,$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=\pi} = 0,$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x);\ (\partial U/\partial t)|_{t=0} = \psi(x) \quad \text{в} \qquad (1)$$

$$\bar{D} = \{0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

Решение ищется в виде $U(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \sin mx$. Доказывается, что если $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ непрерывны, $\varphi'(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям Дирихле, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = \psi(0) = \psi(\pi) = 0$ и $C(t, x)$, $\partial C/\partial t$, $\partial C/\partial x$, $\partial^2 C/\partial x \partial t$ непрерывны, то $U(t, x)$ непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет там условиям (1), существует последовательность функций U_N, $N = 1, 2, \ldots$, непрерывных вместе с производными $\partial U_N/\partial x$, $dU_N/\partial t$, $\partial^2 U_N/\partial x^2$, $\partial^2 U_N/dt^2$ сходящаяся равномерно к $U(t, x)$; $\partial U_N/\partial t$ сходится в среднем по x для любого $t \in [0, T]$, причем $\partial^2 U_N/\partial t^2 - \partial^2 U_N/\partial x^2 = C(t, x)\,\partial U_N/\partial t + \delta_N$, где $\int_0^\pi \delta_N^2\, dx \to 0$ при $N \to \infty$ для любого t. Такое решение $U(t, x)$ автор называет обобщенным (см., например, Фаедо (Faedo S.), Ann. Scuola normale super. Pisa, сер. III, 1947, **1**, № 1—4; Грин (Green J. W.), РЖМат, 1954, 4011). В. П. Ильин

7369. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. Кемпбелл, Робинсон (Mixed problems for hyperbolic partial differential equations. Campbell L. L., Robinson A.), Proc. London Math. Soc., 1955, **5**, № 18, 129—147 (англ.)

Пусть коэффициенты уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a_{kl}(x, y)\,\partial^k z/\partial x^{k-l} \partial y^l = a_0(x, y) \qquad (1)$$

таковы, что корни $\gamma_r(x, y)$, $r = 1, \ldots, n$, характеристического уравнения $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_{nk} \gamma^k = 0$ вещественны, различны (гиперболичность (1)) и ограничены. Семейства характеристик для (1) определяются уравнениями $dy/dx = \gamma_r(x, y)$. Пусть точка (x, y) $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$ такова, что каждая из n характеристик, проходящая через (x, y) в направлении убывания x, пересекает либо отрезок I $(0 \leqslant y \leqslant a)$ оси Oy, либо отрезок B $(0 \leqslant x \leqslant c)$ оси Ox. Совокупность R таких точек (x, y) названа областью определенности для $I + B$. Предполагается, что никакая характеристика на R не касается B и не встречает B более чем в одной точке. Пусть $\gamma_m(x, 0) > 0$ $(1 \leqslant m \leqslant k_0)$; $\gamma_m(x, 0) < 0$ $(k_0 + 1 \leqslant m \leqslant n)$, $(x \in B)$.

Доказывается, что в R, вообще говоря, существует решение (1), удовлетворяющее условиям

$$(\partial^l z/\partial x^l)_I = g_l(y),\ 0 \leqslant l \leqslant n-1;$$

$$\sum_{i=0}^{p_m} \sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij}^m(x)\,(\partial^i z/\partial x^{i-j} \partial y^j)_B = \varphi_m(x),$$

$$1 \leqslant m \leqslant k_0,$$

где $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{k_0}$, $p_j \leqslant n - j$, $g_l(y)$, $\alpha_{ij}^m(x)$, $\varphi_m(x)$ — заданные функции, непрерывно дифференцируемые соответственно $n - l$, $n - p_m$, $n - p_m$ раз; предполагается, что данные на I, B и уравнение (1) согласованы в начале координат.

Пусть теперь R есть замкнутая область полуплоскости (x, y), ограниченная выпуклым полигоном со сторонами $S_0, S_1, \ldots, S_p$, не касательными к характеристикам (S_0 — отрезок оси Oy); k_α — число характеристик, идущих из точек $\in S_\alpha$ в направлении возрастания x внутрь R. Доказывается, что в R, вообще говоря, определяется решение (1), если на S_0 заданы $\partial^l z/dx^l$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, и на S_α $(\alpha = 1, \ldots, p)$ заданы k_α линейных условий относительно z и ее производных до порядка $n-1$. Х. Л. Смолицкий

7370. Исследование решений уравнения плоских волн. Дюран (Recherche des solutions de l'équation des ondes planes. Durand Emile), Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys., 1953 (1954), **17**, 4 sér., 229—264 (франц.)

Изучается уравнение

$$v^{-2} \partial^2 \psi/\partial t^2 - \partial^2 \psi/\partial x^2 - k_0^2 \psi = f(x, vt). \qquad (1)$$

Устанавливаются тождества вида:

$$\chi\psi(x, vt) = \left[\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_0^2\right] \times$$

$$\times \left\{\frac{v}{2} \iint_S \psi(\xi, v\tau)\, I_0(k_0\gamma)\, d\xi d\tau\right\},$$

где $\gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - (x-\xi)^2}$, $I_0(k_0\gamma)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, а S — область, заключенная между некоторой замкнутой кривой C плоскости ξ, τ и характеристиками уравнения (1), исходящими из точки $P(x, t)$, причем χ равно $1, 1/2, 0$, соответственно тому, находится ли P внутри, на или вне кривой C.

Из таких тождеств получены формулы, выражающие значения любого решения уравнения (1) через значения решения и его конормальной производной на C. Рассматривается также задача Коши и смешанная задача, где применяется так называемый метод «образов». Подробно рассматриваются различные частные случаи, когда C состоит из прямолинейных кусков. В качестве приложения решается система уравнений Максвелла, когда данные зависят лишь от времени и одной пространственной переменной. Р. А. Александрян

7371. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов. Ладыженская О. А., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 3, 395—398

В цилиндрической области $Q = \Omega \times [0, T]$ для уравнения

$$L_1 u \equiv u_t' - Lu = f, \qquad (1)$$

где Lu — эллиптический оператор второго порядка, исследуется смешанная краевая задача: $u|_{t=0} = 0$, $u|_\Gamma = 0$. Для гладких функций $u(x, t) \in \Omega_{L_1}$, удовлетворяющих граничным и начальным условиям, выводится оценка

$$\|u\|_2 = \|u\|_Q + \sum (\|u_{x_i}\|_Q + \|u_{x_i x_k}\|_Q) \leqslant C \|L_1 u\|_Q^2. \qquad (2)$$

Замыкание оператора $L_1 u$, заданного на Ω_{L_1}, является оператором $\bar{L}_1$ с замкнутой областью изменения $R(\bar{L}_1)$. Далее доказывается, что $R(\bar{L}_1) = L_2(Q)$, и таким образом устанавливается, что при всякой функции $f \in L_2$ существует, и притом единственное, решение u смешанной задачи, с конечной нормой $\|u\|_2$. Аналогичным образом исследована смешанная краевая задача для гиперболического уравнения $L_2 u \equiv u_{tt} - Lu = f$.

Указано, что изложенный метод применим и к более общим уравнениям. М. И. Вишик

7372. Об одной краевой задаче для параболических систем дифференциальных уравнений с сильно эллиптической правой частью. Лянце В. Э., Матем. сб., 1954, 35, № 2, 357—368

В цилиндрической области $Q = D \times (0 < t < +\infty)$ рассматривается смешанная краевая задача при нулевых граничных условиях для системы уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u + f(x, t), \quad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

где L — сильно эллиптический оператор. Используя полуограниченность оператора L (при нулевых граничных условиях), при помощи теории полугрупп автор доказывает существование обобщенного решения смешанной краевой задачи, если $\varphi(x) \in L_2(D)$ и норма $f(x,t)$ в $L_2(D)$ непрерывна по t. М. И. Вишик

7373. Об одном свойстве решений дифференциального уравнения с частными производными параболического типа. Коубек Ладислав (Koubek Ladislav), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 1, 91—98 (рез. нем.)

Доказывается, что $n+1$ решений $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t)u, \quad b(x, t) \neq 0$$

с аналитическими коэффициентами, которые связаны соотношением $\sum_{k,l=1}^{n+1} a_{kl}u_k u_l = 0$, $a_{kl} = \text{const}$, линейно зависимы. Для доказательства $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ рассматриваются как однородные координаты точки n-мерного пространства и используются некоторые простые геометрические свойства гиперповерхностей и их касательных многообразий в этом пространстве. С. Д. Эйдельман

7374. К решению краевых задач параболического типа. Будак Б. М., Вестн. Моск. ун-та, 1955, № 8, 33—38

Область D евклидова n-мерного пространства представляется в виде метрического произведения областей D_1, D_2, D_3 размерности p, q, r; $p+q+r=n$, $D = D_1 \times D_2 \times D_3$, Σ_1, Σ_2, Σ_3 — границы областей, кусочно-гладкие поверхности. Граница области D $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$; $\Gamma_1 = \Sigma_1 \times D_2 \times D_3$, $\Gamma_2 = D_1 \times \Sigma_2 \times D_3$, $\Gamma_3 = D_1 \times D_2 \times \Sigma_3$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — криволинейные координаты в D_1, D_2, D_3. В D_k задан линейный дифференциальный оператор $L_k \equiv \partial/\partial t + f_k(t, x, \partial/\partial x)$, в D — оператор $L \equiv \partial/\partial t + f_1(t, x, \partial/\partial x) + f_2(t, y, \partial/\partial y) + f_3(t, z, \partial/\partial z)$.

Доказывается теорема: Функция $u = U_1(t, x)U_2(t, y) + U_3(t, z)$ определенная в D, является решением краевой задачи $L(u) = 0$ в D при $0 < t < +\infty$, $u = \Phi_1(x)\Phi_2(y) \times \Phi_3(z)$ в D при $t = 0$ $\Lambda_i(u) = 0$ на Γ_i. Последнее условие предполагается выполненным всюду, кроме, может быть, конечного числа кусочно-гладких поверхностей меньшей размерности, Λ_i — линейный дифференциальный оператор вида f_i; U_1 — решение краевой задачи $L_1(U_1) = 0$ в D_1, $U_1|_{t=0} = \Phi_1(x)$ $\Lambda_1(U_1) = 0$ на Σ_1 при $0 < t < \infty$, аналогично определены U_2, U_3.

Указывается приложение сформулированной теоремы к решению краевых задач для уравнения теплопроводности для прямоугольных и цилиндрических областей, построению функции источника. С. Д. Эйдельман

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

7375. О некоторых возможностях применения частотного метода к анализу линейных динамических систем с переменными параметрами. Карабанов В. А., Сб. статей Моск. высш. техн. уч-ща, 1955, 58, 37—51

Рассмотрены некоторые практические приемы использования частотного метода для анализа линейных динамических систем с переменными параметрами, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с переменными, зависящими от времени коэффициентами. Эти приемы основаны на использовании обобщения понятия передаточной функции, предложенного Заде (Zadeh L. A., Proc. I. R. E., 1950, 38, № 3, 291). Изложен приближенный графический способ построения переходных процессов с использованием типовых трапецоидальных характеристик для случая, когда известна обобщенная передаточная функция системы. Приведен пример определения обобщенной передаточной функции и пример построения переходного процесса. В приложении приводится доказательство положения, согласно которому в качестве обобщенной передаточной функции может быть принято любое частное решение некоторого дифференциального уравнения. Г. М. Уланов

7376. Частотный метод построения и исследования переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирования. Каган Б. М., Тр. 2-го Всес. совещания по теории автоматического регулирования. Т. 2, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1955, 62—81

Рассматриваются системы автоматического регулирования и следящие системы, описываемые уравнением

$$D(p)x = K(p)y + S(p)\varphi(t),$$
$$y = f(x)$$

где $p = d/dt$, D, K и S — полиномы с постоянными коэффициентами (степень K меньше степени D), $\varphi(t)$ — заданное внешнее воздействие, а $f(x)$ — кусочно-линейная функция, так что на отдельных этапах процесс описывается линейным уравнением. Решение уравнения строится припасовыванием. Для этого, при интегрировании линейных уравнений, описывающих процесс на каком-либо этапе, в качестве начальных условий принимаются значения x и соответствующих производных, которые получаются в конце предыдущего этапа. Особенность работы состоит в том, что процесс на каждом этапе рекомендуется вычислять частотным методом. В основе этих методов лежат операторные соотношения и поэтому отпадает необходимость учитывать скачки начальных значений при переходе от одного линейного уравнения к другому, вызванные тем, что при кусочно-линейной $f(x)$ производные от x разрывны. Выводятся соотношения, упрощающие учет начальных условий при построении частотным методом процесса на отдельных этапах. В качестве примера строится процесс в случае, когда $f(x)$ состоит из трех линейных звеньев — среднего наклонного и крайних горизонтальных. Особо рассмотрено построение процесса в релейных системах — в этом случае $f(x)$ состоит только на горизонтальных прямых и при достижении x определенного значения σ значение $f(x)$ меняется мгновенно, скачком. М. А. Айзерман

7377. Об особенностях исследования динамических свойств нелинейных систем, содержащих неустойчивое звено. Круг Е. К., Минина О. М., Автоматика и телемеханика, 1955, 16, № 6, 536—541

7378. Метод построения переходных процессов в нелинейных системах автоматического регулирова-

ния. Башкиров Д. А., Тр. 2-го Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. II, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1955, 82—95

Кратко описывается графический метод построения процессов в линейных системах регулирования, предложенный в кандидатской диссертации автора. Описывается прием, с помощью которого этот же метод может быть использован для построения процесса в системах, содержащих нелинейные элементы. М. А. Айзерман

7379. Геометризация динамики системы с подвижными связями. Клаузер (Geometrizzazione della dinamica dei sistemi a vincoli mobili. Clauser Emilio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **19**, № 1—2, 33—39 (итал.)

Рассматривается динамическая система с линейными относительно скоростей связями. Обычным способом (дифференцирование связей) находятся множители связей и их значения подставляются в уравнения Лагранжа первого рода. Результат записан в тензорных обозначениях, причем метрика пространства отнесения определяется квадратичной частью живой силы. Предлагается также рассматривать уравнения движения в пространстве аффинной связности. И. С. Аржаных

7380. Решение пространственной задачи теории упругости для клиновидного тела при заданных перемещениях на границе. Уфлянд Я. С., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 6, 1177—1179

В цилиндрических координатах решается задача о равновесии клиновидного тела с острым ребром вдоль оси z при заданных смещениях на боковых гранях. Компоненты вектора смещения берутся в форме Папковича — Нейбера (Нейберг Г., Концентрация напряжений, 1947), а гармонические функции определяются при помощи интегральных представлений, ядрами которых являются функции $\cos\sigma z$, $\mathrm{ch}\tau\theta$, $\mathrm{sh}\tau\theta$ и функции Макдональда $K_\tau(\sigma r)$. Определение вспомогательных функций автор осуществляет при помощи интегралов Конторовича — Лебедева (Конторович М. И., Лебедев Н. Н., Ж. эксперим. и теор. физики, 1938, 8, № 10—11, 1192; Лебедев Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1947, **11**, 251) с последующим использованием синус- и косинус-трансформаций. И. С. Аржаных

7381. Цилиндрический проводник произвольного сечения в плоском периодическом поле. Бюлер Г. А., Уч. зап. Томского ун-та, 1955, № 25, 122—134

Решается задача об электрическом (магнитном) поле, возбуждаемом при внесении в плоское периодическое магнитное (электрическое) поле цилиндрического проводника, образующая которого перпендикулярна вектору поля. Границами поперечного сечения проводника являются отрезки координатных линий ортогональной криволинейной системы координат. Задача решается в предположении малости линейных размеров поперечного сечения проводника по сравнению с длиной волны в окружающей проводник среде. Исходя из формулы Грина, автор для продольной компоненты поля строит интегральное уравнение типа Фредгольма (аналогичное уравнение получается для неоднородного проводника). Уравнение решается методом последовательных приближений; доказана его сходимость. В заключение рассмотрен круговой цилиндр в однородном поперечном поле. Найдены два приближения, указано на их совпадение с решением, полученным методом собственных функций. Примененный метод может быть использован для решения задачи, в которой границы поперечного сечения проводника имеют угловые точки. П. П. Бирюлин

7382. Радиальная деформация полой сферы, обладающей анизотропией и упругим последействием. Розовский М. И., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 5, 920—923

Поставленная в названии статьи задача сводится к решению в сферических координатах системы уравнений для напряжений σ_r, σ_θ, σ_φ и радиального перемещения u

$$\sigma_r = a_{11}\frac{\partial u}{\partial r} + 2a_{12}\frac{u}{r} - \int_0^t \left[\alpha_{11}(t,\tau)\frac{\partial u}{\partial r} + 2\alpha_{12}(t,\tau)\frac{u(\tau)}{r}\right]d\tau,$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = a_{12}\frac{\partial u}{\partial r} + (a_{22}+a_{23})\frac{u}{r} - \int_0^t \left[\alpha_{12}(t,\tau)\frac{\partial u}{\partial r} + [\alpha_{22}(t,\tau)+\alpha_{23}(t,\tau)]\frac{u(\tau)}{r}\right]d\tau,$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0.$$

Граничные условия: $\sigma_r = -p_k = \mathrm{const}$ при $r = r_k$ ($k = 1,2$). Постоянные a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23} (модули упругости) и функции α_{11}, α_{12}, α_{22}, α_{23} (коэффициенты релаксации) известны. Показано, каким образом определение перемещения u системы сводится к решению нескольких интегральных уравнений типа Вольтерра. М. Ш. Бирман

7383. Изучение распространения волн в обобщенной модели Роша. Симон (Etude de la propagation des ondes dans le modèle de Roche généralisé. Simon R.), Ann. astrophys., 1955, **18**, № 2, 92—99 (франц.; рез. англ.)

В неподвижной газообразной среде, обладающей сферической симметрией относительно центра O, расширяется сферическая оболочка с центром в той же точке O, двигаясь по произвольному закону. В газовой среде имеются центральные радиальные силы, направленные к O. Перед расширяющейся оболочкой возникает ударная волна, распространяющаяся в газовой среде.

Автор решает эту задачу в линейном приближении, линеаризуя как уравнения гидродинамики, так и условия Гюгонио. При этом для эйлерова радиуса $r(r_0, t)$ получается уравнение вида:

$$A\partial^2\Delta r/\partial t^2 - r_0^{-1}B\partial^2(r_0^2\Delta r)/\partial r_0^2 + r_0^{-1}C\Delta r = 0, \qquad (1)$$

где $\Delta r = r(r_0, t) - r_0$, r_0 — лагранжев радиус, A, B, C — константы.

Начальное и краевое условия: $r(r_0, t_0) = r_0$, $r(R_0, t) = R(t)$, где R_0 — лагранжева координата сферической оболочки.

Применяя преобразование Лапласа, автор сводит задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения. В случае пренебрежения притяжением частиц газовой среды по сравнению с притяжением материального центра, когда плотность $\rho_0(t_0)$ изменяется по закону $\rho_0(r_0) = Ar_0^{-\alpha}$, где A, α — положительные константы, дается явное решение. Н. Н. Яненко

7384 К. Лекции по колебаниям. Мандельштам Л. И. Изд-во АН СССР, М., 1955, 503 стр., 23 р.

Книга содержит лекции по теории колебаний, прочитанные Л. И. Мандельштамом в 1930—1932 гг. в Московском университете. Несмотря на свою давность, эти лекции безусловно сохранили значительный научный и педагогический интерес. Книга чрезвычайно обширна, по своему содержанию она включает, помимо общеизвестных сведений по теории колебаний, многочисленные примеры колебательных систем, встречающихся в самых разнообразных разделах физики. Благодаря большому количеству содержательных примеров, в книге со всей полнотой раскрыта физическая сущность процессов, протекающих в колебательных системах. Автор не ограничивается изложением только теории колебаний, а раскрывает взаимосвязь между

теорией колебаний и различными разделами современной физики и квантовой механики. В целом книга является чрезвычайно ценным пособием для физиков и механиков, работающих в области теории колебаний.

Книга разделена на две части: Колебания сосредоточенных систем — 32 лекции — и Колебания распределенных систем — 16 лекций. Первые две лекции носят вводный характер. Здесь рассматриваются общие закономерности теории колебаний, связь теории колебаний и волновой механики, взаимосвязь математики, физики и техники в теории колебаний, основные понятия теории колебаний: амплитуда, частота, циклическая частота, фаза, сложение синусоидальных колебаний, суперпозиция и т. д. 3-я и 4-я лекции посвящены вопросам аппроксимации функций тригонометрическими полиномами, рядом Фурье, вопросам биения, интерференции. В 5-й лекции рассматриваются почти периодические функции и задачи, приводящиеся к таким функциям — сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинакового и различного периодов, образование разностного тона и др. В 6-й и 7-й лекциях приведена теория колебаний маятника, рассмотрена роль маятника в истории физики. Приведены примеры механических колебательных систем и электрические аналогии для них. Лекции 8-я — 11-я посвящены изображению движения на фазовой плоскости, теореме вириала и ее применению к кинетической теории газов, вопросам вычисления средней энергии осциллятора, квантованию энергии осциллятора, понятию адиабатического инварианта. Здесь автор обращает особое внимание на взаимосвязь между теорией колебаний и теоретической физикой. В 12-й и 13-й лекциях рассматриваются колебательные системы с одной степенью свободы с учетом трения, затухающие и нарастающие колебания в линейных системах, маятник Фроуда. Особо отмечается невозможность незатухающих колебаний в линейной неконсервативной системе. Приводится нелинейная задача о системе с постоянным трением. В лекциях с 14-й по 17-ю рассмотрены линейные системы с одной степенью свободы, воздействие внешних периодических сил на линейную систему с одной степенью свободы, установившиеся колебания, резонанс, вопрос фазового соотношения. Подробно обсуждается резонанс в технике, в оптике, резонанс в незатухающем осцилляторе, неустановившийся режим, действие помех на линейную колебательную систему.

18-я и 19-я лекции посвящены рассмотрению маятника с горизонтально и вертикально колеблющейся точкой подвеса, теории линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и вопросам параметрического резонанса и частотной модуляции. В 20-й и 21-й лекциях рассмотрен интеграл Фурье и его приложение к колебаниям резонатора.

В лекциях с 22-й по 28-ю рассмотрены вопросы о связях в механике: голономные, неголономные и полуголономные связи, относительность рода связи. Математическая теория линейных систем с двумя степенями свободы, консервативных и неконсервативных. Нормальные колебания, связь между парциальными и нормальными частотами, разделение систем на парциальные системы и их взаимодействие. Слабая и сильная связанность парциальных систем и вопросы перекачки энергии. Вынужденные колебания в системе с двумя степенями свободы, вопросы резонанса и успокоения.

Лекции 29-я — 32-я посвящены рассмотрению систем со многими степенями свободы, теории кристаллических решеток и задаче об электрических фильтрах.

В первых четырех лекциях второй части, посвященной колебаниям распределенных систем, рассматриваются общие вопросы колебаний распределенных систем, выводится уравнение колебаний стержня из теории континуума, выводится волновое уравнение из уравнений гидродинамики. Рассматриваются двухпроводные линии в правильной постановке на основе теории Максвелла. Ставится математическая задача о колебаниях распределенной системы. Приводится постановка краевой задачи.

Лекции 5-я — 10-я посвящены задаче Штурма — Лиувилля. Рассмотрены основные свойства собственных чисел и собственных функций, разложения по собственным функциям, положительность собственных значений, экстремальное свойство основного собственного значения, свойства ортогональности собственных функций и их физический смысл, числа узлов собственных функций и т. д.

В последних шести лекциях рассмотрена роль интегральных уравнений для физики; функция Грина и ее свойства, вопросы предельного перехода от задачи о колебаниях дискретной цепочки к интегральному уравнению колебаний стержня, эквивалентность интегрального уравнения и дифференциальной схемы задачи Штурма — Лиувилля и т. д. Метод интегральных уравнений применен для решения ряда задач и анализа колебательного процесса в распределенных системах.

Ю. А. Митропольский

7385 К. Метод цепных дробей в применении к исследованию колебаний механических систем. Т. I. Простые и нелинейные системы. Терских В. П., Л., Судпромгиз, 1955, 376 стр., с черт. 20 р. 60 к.

Излагается метод исследования свободных и вынужденных колебаний в цепных системах — колебательных системах, у которых взаимодействие между внешними и основными внутренними силами происходит только в направлении перемещения соответствующих элементов системы и которым свойственны в основном только или продольные, или крутильные колебания. Изложенный метод позволяет определить частоты и формы свободных колебаний, амплитуды и фазы вынужденных колебаний, влияние параметров системы на частоты и амплитуды колебания, позволяет рассматривать как линейные, так и нелинейные системы. Метод является обобщением и доведением до логического конца ряда различных методов, применявшихся к исследованию цепных систем и в том числе одного из наиболее совершенных — метода Толле. Из анализа этих методов вытекает возможность математического изображения всех динамических свойств любой цепной системы в виде той или иной комбинации цепных дробей, составленных из параметров системы. Поэтому и метод назван методом цепных дробей.

Предлагаемый метод позволяет исследовать самые разнообразные задачи теории колебаний, как например, крутильные колебания в валопроводах силовых установок, продольные колебания пружин, стержней, газов и жидкостей в трубопроводах, колебания подвижного состава железных дорог, ряд задач в области электрических колебаний и т. д. Книга, безусловно, является ценной и представляет большой интерес для научных и инженерно-технических работников, работающих в области теории, а также практического расчета колебательных систем.

Книга состоит из двух частей: часть первая — Простые линейные системы — и часть вторая — Простые нелинейные системы. В части первой во введении приведена классификация колебательных систем, обзор основных работ в области исследования колебаний цепных систем, поставлены основные задачи исследования цепных систем. В гл. I рассматриваются свободные колебания систем без трения. Здесь рассмотрены вопросы стойкости и податливости системы, вычисляются корни уравнения свободных колебаний, определяется форма

свободных колебаний, узловые точки и максимумы формы свободных колебаний, определяется влияние параметров системы на значение ее стойкости и податливости. Гл. II посвящена вынужденным колебаниям систем без трения. Основное внимание в ней обращается на воздействие на систему возбудителей на определение формы вынужденных и резонансных колебаний, а также на влияние параметров системы на развитие вынужденных колебаний. В главе III рассмотрены линейные системы с трением. Анализируются особенности в свойствах вынужденных колебаний, если трение только на массах или только в соединении. В гл. IV рассмотрены системы с редукцией как без трения, так и с трением.

Гл. I второй части посвящена исследованию свободных колебаний нелинейных систем без трения. Рассмотрены нелинейные системы с нелинейной характеристикой в виде ломаной линии, системы с одной нелинейной массой, системы с одним и более нелинейными соединениями. В гл. II рассмотрены вынужденные колебания нелинейных систем без трения. Гл. III и IV посвящены нелинейным колебательным системам с большим и малым трением. Рассматриваются случаи различного числа нелинейности и различные виды трения. Вычисляются амплитуды вынужденных и околорезонансных колебаний, а также резонансные колебания. В гл. V рассмотрены системы с несимметричными элементами — несимметричная характеристика нелинейности в виде ломаной линии, несимметричная характеристика силы упругости в соединении с ограничителем и др.

Гл. VI посвящена особым случаям нелинейных колебаний. Здесь рассмотрено влияние постоянных сил, влияние возбудителя, состоящего из двух гармоник с различными частотами. Нелинейные колебания при действии внешних сил различных частот при наличии упругого соединения с предварительным натягом.

В гл. VII приводится оценка погрешности приближенного решения. Даны основные формулы для оценки погрешности и для ряда случаев приводится сопоставление точного результата с приближенным решением.

Ю. А. Митропольский.

См. также: 7298, 7626, 7664 — 7671

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7386. О границах применимости теорем Ф. Нетера. Гохберг И. Ц., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1955, **17**, 35—44

Выявляются некоторые классы операторов, для которых справедливы известные теоремы Ф. Нетера, устанавливающие применимость теорем Фредгольма. В пространстве H_μ функций, заданных на замкнутом гладком плоском контуре Γ и удовлетворяющих на нем условию Гельдера с показателем μ, $0<\mu<1$, рассматривается сингулярный интегральный оператор

$$A = a(t)\varphi(t) + b(t)/\pi i \int_\Gamma \varphi(\tau)(\tau - t)^{-1} d\tau + \\ + \int_\Gamma K(t, \tau)\varphi(\tau)\, d\tau,$$

где $a(t)$, $b(t) \in H_\nu$, $0<\nu<1$; $K(t, \tau)(t-\tau)^\lambda \in H_\nu$, $\lambda \geqslant 0$, $\nu \geqslant \mu + 1$. Доказывается, что для этого оператора теоремы Нетера верны только тогда, когда $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$. Обратное предложение было известно ранее.

Оператор A порождается в пространстве l_2 матрицей $\|a_{k-l}\|$, $k, l = 1, 2, \ldots$. Этот оператор изучен И. М. Рапопортом (Доповіді АН УРСР, 1948, 3) в предположении, что функция $a(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_k t^k$ не обращается в нуль на единичной окружности и удовлетворяет на ней условию Гельдера. Автор ограничивается требованием непрерывности функции $a(t)$ на единичной окружности и устанавливает, что при этом теоремы Нетера одновременно верны для оператора A и для некоторого сингулярного интегрального оператора, для последнего же эти теоремы верны тогда и только тогда, когда на единичной окружности $a(t)$ не обращается в нуль.

Путем сведения к сингулярному интегральному уравнению изучается в пространстве $L_2(0, \infty)$ уравнение

$$\int_0^\infty k(x-s)\varphi(s)\, ds - \lambda\varphi(x) = f(x). \qquad (1)$$

Предполагается, что ядро $K(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, его преобразование Фурье $k(x)$ непрерывно и $K(x) \to 0$, $x \to \infty$. Доказывается, что теоремы Нетера для уравнения (1) верны тогда и только тогда, когда $\sqrt{2\pi}K(x) - \lambda \neq 0$ при λ вещественном. При более сильных ограничениях уравнение (1) было изучено В. А. Фоком и И. М. Рапопортом.

С. Г. Михлин

7387. Дифференциальные уравнения нецелого порядка. Барретт (Differential equations of non-integer order. Barrett J. H.), Canad J. Math., 1954, **6**, № 4, 529—541 (англ.)

Сначала рассматриваются свойства интегро-дифференциального оператора $I(\alpha;\ a,\ b \mid f)$ (Гольмгрен — Рисса), где $a<b$ — два действительных числа, $f = f(x)$ — произвольная функция класса $L(a, b)$, образуемого всевозможными комплексными функциями действительного переменного x, суммируемыми в промежутке (a, b). Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, то, по определению

$$I(\alpha;\ a,\ b \mid f) = \int_a^b f(t)\frac{(b-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt; \qquad (1)$$

если же $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 0$ и если n — наименьшее положительное целое число, превосходящее $-\operatorname{Re}\alpha$, то

$$I(\alpha;\ a,\ b \mid f) = [D_x^n I(n+\alpha;\ a,\ b \mid f)]_{x=b}, \qquad (2)$$

причем предполагается, что функция $I(n+\alpha;\ a,\ x \mid f)$ в некотором промежутке $|b-x|<h$ непрерывна вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно, а n-я производная существует при $x = b$. Любому комплексному числу $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ сопоставляется положительное действительное число $\|\alpha\| = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)$.

Теория интегро-дифференциального оператора применяется к отысканию решения $y(x)$ интегро-дифференциального уравнения

$$I(-\alpha;\ a,\ x \mid y) + \lambda y = h(x)\ (n-1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$I(i-\alpha;\ a,\ a^+ \mid y) = K_i\ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3)$$

Это уравнение при условиях (3) приводится к интегральному уравнению

$$y(x) + \lambda I(\alpha; a, x \mid y) = I(\alpha;\ a,\ x \mid h) + \sum_{p=1}^{n} \frac{K_p (x-a)^{\alpha-p}}{\Gamma(\alpha-p+1)},$$

которое решается методом последовательных приближений.

Пусть α — действительное число, заключенное между нулем и единицей, $\lambda = 1$, $a = 0$, $h(x) \equiv 0$.

При $K_1 = 1$ получаем из уравнения $I(-\alpha; 0, x \mid y) + y = 0$ решение

$$Y(x) = U_1(x; 1) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^{q-1} x^{q\alpha-1}}{\Gamma(q\alpha)}.$$

Это решение имеет следующие свойства:

1) при $x > 0$ $Y(x) > 0$;

2) $\lim_{x\to\infty} Y(x) = 0$;

3) $\int_{x_0}^{\infty} Y(t)\,dt = I(1-\alpha;\ 0, x_0 \mid Y)$;

4) $\int_0^{\infty} Y\,dt = 1$;

5) Если $0 < \beta < 1$, то $\lim_{x\to\infty} I(\beta; 0, x \mid Y) = 0$

При $\alpha = 1$ $Y(x) = e^{-x}$.

Если $1 < \alpha < 2$, то $\lim_{x\to\infty} Y(x) = 0$ и $Y(x) < 0$ при достаточно большом x.

При любом $\alpha < 2$ функция $Y(x)$ имеет при $x \geqslant 0$ конечное число $N(\alpha)$ нулей, причем $\lim_{\alpha\to 2} N(\alpha) = \infty$. Если $\alpha > 2$, то $Y(x)$ имеет бесконечное число положительных нулей. Ю. Л. Рабинович

7388. Применение операционного исчисления к решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений. Юсупов К. Ю., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1955, **30**, 99—113

Для некоторых частных случаев функции $K(v)$ методом операционного исчисления решается уравнение

$$L(u) = \int_0^t K(t-\tau)\,M(u)\,d\tau + P(x)$$

с начальными и граничными условиями: $u(x, 0) = f(x)$; $\partial u(x, 0)/\partial t = g(x)$; $u(a, t) = \alpha(t)$; $u(b, t) = \beta(t)$, где:

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_0 \frac{\partial u}{\partial x} + q_1 \frac{\partial u}{\partial t} + q_2 u;$$

$$M(u) = p_0 \partial^2 u/\partial t^2 + p_1 \partial u/\partial t + p_2 u.$$

Я. В. Быков

7389. К решению уравнения $\sum_1^m H_i(x)\,\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s)(x-a)^{-p}\varphi^{(n)}(s)\,ds$. **Василаке** (Asupra rezolvării ecuației $\sum_1^m H_i(x)\,\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s)(x-a)^{-p}\varphi^{(n)}(s)\,ds$. Vasilache Sergiu), Bull. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat şi fiz., 1955, 7, № 1, 87—95 (рум.; рез. франц., русс.)

Пользуясь формулой Лагранжа

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \varphi^{(r)}(a)\,\frac{(x-a)^r}{r!} + \int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi^{(n)}(s)\,ds$$

при $m < n$ решение уравнения

$$\sum_0^m {}_i H_i(x)\,\varphi^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \frac{K(x, s)}{(x-a)^p}\,\varphi^{(n)}(s)\,ds. \quad (1)$$

приводится к решению интегрального уравнения типа Вольтерра. При $m < n-1$; $p > 1$; $K(x, x) \neq 0$ $x \in [a; b]$ решение уравнения (1) приводится к решению интегрального уравнения 2-го рода, которое решается методом последовательных приближений.

Далее изучается случай $m = n-1$.

Множество значений λ, удовлетворяющих равенству $\lambda K(x, x) - (x-a)^p H_{n-1}(x) = 0$ хотя бы при одном значении x из $[a; b]$, автор называет лакунарным интервалом.

Показано, что: 1) если λ не принадлежит к лакунарному интервалу, то соответствующее интегральное уравнение (25) статьи типа Вольтерра можно решать методом последовательных приближений; 2) если λ принадлежит к лакунарному интервалу, то (25) имеет вид уравнения, уже рассмотренного автором (РЖМат, 1956, 2275). Я. В. Быков

7390. Об изгибе круглой пластинки, частично опертой и частично свободной по контуру. Шерман Д. И., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 6, 1180—1183

Круглая пластинка S изгибается равномерной нормальной нагрузкой q; верхняя полуокружность γ_1 края пластинки оперта, а нижняя полуокружность γ_2 свободна. Задача сводится к отысканию двух голоморфных в круге S функций, удовлетворяющих некоторым смешанным краевым условиям. Автор сводит эту задачу к сингулярному интегральному уравнению для некоторой вспомогательной функции, голоморфной в том же круге; сингулярное уравнение позволяет получить бесконечную систему для коэффициентов Тейлора вспомогательной функции. Как утверждает автор, система эта вполне регулярная.

Автор отмечает, что значительно более общую задачу решил А. И. Каландия. (Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, № 5, 513—533) методом сингулярных интегральных уравнений. С. Г. Михлин

7391. Математическое изучение уравнения Больцмана. Марке (Etude mathématique de l'équation de Boltzmann. Marquet Simone), C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 5, 615—617 (франц.)

Утверждается (без доказательств), что 1) результаты предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 3247) справедливы при слегка видоизмененных предположениях; 2) при некоторых дополнительных предположениях о начальной функции $F(r, +0) = f(r)$ решение $F(r, t)$, $0 \leqslant r, t \leqslant +\infty$ уравнения Больцмана стремится при $t \to +\infty$ к функции $l^{-\alpha r^2}$ всюду, где $f(r)$ конечна, притом равномерно на каждой компактной части. М. К. Фаге

См. также: 7368, 7449

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

7392. Чезаровское суммирование рядов Фурье. Канно (Cesàro summability of Fourier series. Kanno Kôsi), Tôhoku Math. J., 1955, **7**, № 1—2, 110—118 (англ.)

Пусть $\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$. Положим

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \varphi(u)\,(t-u)^{\alpha-1}\,du \quad (\alpha > 0)$$

Доказывается теорема: Если $\varphi_\beta = 0$ (t^γ), $\gamma > \beta > 0$ и $\int_0^t |d(u^\Delta \varphi(u))| = O(t)$ $(0 < t < \eta)$, где $\alpha = [\Delta\beta - \gamma]/[\Delta + \gamma - \beta + 1]$ и $\Delta \geqslant \gamma/\beta$, тогда ряд Фурье функции $\varphi(t)$ (C, α)-суммируем к нулю в точке $t = 0$.

Эта теорема является обобщением теорем Суноути (РЖМат, 1955, 4962) и Кинукава (РЖМат, 1956, 2106). И. А. Киприянов

7393. Об одном приложении определения интеграла (Римана) для доказательства возможности одного пе-

рехода к пределу под его знаком. Байада, Винти (Un'applicazione della definizione di integrale per stabilire un passaggio al limite sotto il segno. Baiada E., Vinti C.), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 460—464 (итал.)

Доказывается с помощью определения интеграла (R) как предела его интегральной суммы, что выражения

$$\text{A) } \ldots \qquad \int_a^b dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \,[M(t) \geqslant 0],$$

$$\text{B) } \int_a^b K(y)\,dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \;[K(y) \geqslant 0,\ M(t) \geqslant 0] \in L_2$$

оказываются бесконечно малыми при $d \to 0$ того же порядка, что и d. Данные утверждения следуют из следующих соотношений:

$$\text{для A) } \lim_{d \to \infty} \int_a^b dy\, \frac{1}{d} \left\{ \int_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \right\} = 2 \int_a^b M(t)\,dt,$$

$$\text{для B) } \int_a^b K(y)\,dy \int_{y-d}^{y+d} M(t)\,dt \leqslant 2d \times$$

$$\times \sqrt{\int_a^b K^2(y)\,dy \cdot \int_{b-2d}^{b+2d} M^2(t)\,dt}.$$

Как утверждают авторы, данный результат был использован ими ранее при доказательстве существования решения одного уравнения в частных производных.

А. С. Кованько

7394. Ряды Лапласа и множества нулевой логарифмической емкости. Рудин (Laplace series and sets of logarithmic capacity zero. Rudin Walter), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 6, 915—918 (англ.)

Пусть S — единичная сфера трехмерного пространства, $E \subset S$ — замкнутое множество, $Y_n(P)$ — сферические функции точки $P \in S$. Определение логарифмической емкости $E \subset S$ дано автором ранее (Trans. Amer. Math. Soc., 1950,68, 287—303). В настоящей статье устанавливается:

1. Если емкость E положительна, то существует ряд $\Sigma_0^\infty Y_n(P)$, не равный нулю тождественно и суммируемый (C, 1) и по Риману к нулю для всякой $P \in S - E$; ряд $\Sigma_1^\infty Y_n(P)/n(n+1)$ есть ряд Лапласа функции, непрерывной на S; если к тому же E симметрично относительно центра сферы, то $\Sigma_0^\infty Y_n(P)$ суммируем (C, k) для любого $k > 1/2$ к нулю в каждой $P \in S - E$.

2. Следующие три утверждения равносильны: а) емкость E положительна, б) существует мера $\lambda \not\equiv 0$, сконцентрированная на E, для которой ряд Лапласа — Стилтьеса $\Sigma_0^\infty Y_n(P)$ таков, что $-\Sigma_1^\infty Y_n(P)/n(n+1)$ является рядом Лапласа функции, непрерывной на S, в) то же, что и в б), с заменой «непрерывной» на «ограниченной».

Х. Л. Смолицкий

7395. Замечания о преобразованиях Тейлора и Лорана. Тегем (Remarques sur les transformations de Taylor et de Laurent. Teghem J.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 7, 719—722 (франц.)

Для заданного ряда $\Sigma_{n=0}^\infty u_n$ трансформация Тейлора $P(\alpha)$ и трансформация Лорана $\Pi(\alpha)$ определяются соответственно равенствами

$$P(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty (1-\alpha)^n \sum_{\nu=n}^\infty \binom{\nu}{n} \alpha^{\nu-n} u_\nu.$$

$$\Pi(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty (1-\alpha)^n \sum_{\nu=0}^\infty \binom{\nu+n}{\nu} \alpha^{\nu+1}\ u_\nu.$$

Доказывается, что к областям суммируемости $P(\alpha)$ и $\Pi(\alpha)$ ($|\alpha| \leqslant 1$) ряда $\Sigma_{n=0}^\infty a_n z^n$ (Teghem J., Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1951, **37**, 21—33) следует присоединить точки z, расположенные на окружности с центром в нулевой точке и радиуса $r/|\alpha|$, где r — радиус сходимости ряда $\Sigma_{n=0}^\infty a_n z^n$. Кроме того, показано, что для $0 < \alpha < 1$ сумма Лорана ряда $\Sigma_{n=0}^\infty a_n z^n$ во всех точках области суммируемости $\Pi(\alpha)$ совпадает со значением, доставляемым аналитическим продолжением.

М. Д. Калашников

7396. Задача деления для распределений. Эренпрейс (The division problem for distributions Ehrenpreis Leon), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 10, 756—758 (англ.)

Дается полное решение следующей задачи, которая была частично решена автором ранее (РЖМат, 1955, 5805): пусть T — произвольное распределение Шварца (=функционал в пространстве D_F бесконечнодифференцируемых финитных функций), D — произвольный линейный дифференциальный (или дифференциально-разностный) оператор в частных производных с постоянными коэффициентами. Тогда существует распределение Шварца S такое, что $DS = T$. Автор указывает, что метод доказательства тот же, что и в цитированной работе, и опирается на знание некоторой полной системы окрестностей нуля (которая сейчас и строится) в пространстве $\widetilde{D}_F$, состоящем из преобразований Фурье функций пространства D_F.

М. К. Фаге

7397. Комбинаторное доказательство одного неравенства Хуа. Сюй (A combinatorial proof of an inequality due to Hua. Hsu L. C.), Math. Student 1955, **23**, №3, 97—100 (англ.)

Речь идет о неравенстве

$$\min(\rho(\alpha_i, \alpha_j) > 0,\ \rho(\beta_i, \beta_j) > 0) \leqslant 3T/2k\ (k-1),$$

где $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) > 0$, если $x \neq y$, и

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \rho(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant T,$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \rho(\beta_i, \beta_j) \leqslant T,$$

$$\rho(\alpha_i, \alpha_j) + \rho(\beta_i, \beta_j) > 0.$$

В. И. Левин

7398. Доказательство одного предложения Якоби. Манд (Démonstration d'une proposition de Jacobi. Mendes Marcel). Bull. Astron., 1955, **18**, № 4, 325—330 (франц.)

Пуанкаре, изучая задачу трех тел, рассматривает разложение в ряд Фурье главной части возмущающей функции по эксцентрическим аномалиям:

$$\frac{1}{\Delta} = \sum B_{mm'} e^{i(mu+m'u')},$$

где Δ есть расстояние между двумя планетами с эксцентрическими аномалиями u и u'; m, m' — целые числа, изменяющиеся от $-\infty$ до $+\infty$, и доказывает, что все коэффициенты B зависят линейно самое большее от шестнадцати из них. При этом он добавляет, что у Якоби имеется указание, что число линейно независимых коэффициентов B равно пятнадцати.

В настоящей работе доказывается предложение Якоби и рассматриваются некоторые частные случаи.

П. И. Кузнецов

7399. Определение рекуррентного соотношения коэффициентов одного ряда. Реболью (Determinación de la escala de recurrencia de una serie. Rebol-

lo J. M.), Rev. Real. acad. cient. exact., fis. y natur. Madrid, 1954, 48, № 4, 203—215 (исп.)

Пусть дана рациональная функция

$$\frac{[a_0+a_1x+\ldots+a_px^p]}{[b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m]},\ b_0\neq 0, \qquad (1)$$

и $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ — ее разложение в степенной ряд. Коэффициенты c_n будут удовлетворять (при $n>N$) соотношению

$$c_nb_0+c_{n-1}b_1+\ldots+c_{n-m}b_m=0 \qquad (2)$$

Автор в частном случае решает обратную задачу. Именно, по данному степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ найти числа b_ν, $0\leqslant\nu\leqslant m$, которые удовлетворяют условию (2). Если умножить ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ на полином $b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$, получим числитель функции (1).

Подробно рассмотрен случай, когда числа $c_n=g(n)$ удовлетворяют условию

$c_{n+h}=g(n+h)=a_{1h}f_1(n)+a_{2h}f_2(n)+\ldots+a_{rh}f_r(n)$, где n и h — целые неотрицательные числа, $a_{1h}, a_{2h}, \ldots, a_{rh}$ — константы, зависящие только от h, а $f_m(n)$ $(m=1,\ldots,r)$ — линейно независимая система функций от n.

Н. Обрешков

7400. О бесконечно малых величинах. Я н Х а й - я н ь (關於無窮小的概念. 楊海燕), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1955, № 55, 1—3 (кит.)

7401. Обобщение теоремы Икэхара. Д е л а н ж (Généralisation du théoréme de Ikehara. D e l a n g e H u b e r t), Ann. scient. École norm. supér., 1954, 71, № 3, 213—242 (франц.)

Пусть $\alpha(t)$ — действительная функция, определенная для $t\geqslant 0$, неубывающая и неотрицательная. Кроме того,

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}\alpha(t)\,dt=f(s) \text{ для } \mathrm{Re}\,s>a>0.$$

Доказываются следующие теоремы.

1. Если $\beta(t)$ — действительная функция, определенная при $t\geqslant 0$, измеримая и ограниченная в каждом конечном интервале, и предположим, что интеграл $\int_0^{+\infty}e^{-st}\beta(t)\,dt$ сходится при $\mathrm{Re}\,s>0$ и равен $G(s)$. Предположим далее, что существует целое положительное или равное нулю число p и действительная функция $\gamma(u)$, непрерывная и не убывающая в интервале $[0, l]$ и положительная для $0<u\leqslant l$, такая, что а) интеграл $\int_0^l\log[1/\gamma(u)]\,du$ сходится, б) произведение $t^{p+1}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ стремится к 1, когда $t\to+\infty$. Предположим теперь, что существует положительное число A, такое, что функция $F(s)=f(s)-AG(s-a)$ имеет следующие свойства: а) для каждого действительного $y\neq 0$ $F^{(p)}(s)$ стремится к конечному пределу, когда s стремится к $a+iy$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>a$; б) когда s стремится к нулю в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>0$ имеем $F^{(p)}(a+s)=O[\psi(r)/\gamma(r)]$, с $r=|s|$, где $\psi(t)$ — действительная функция, определенная для достаточно малых значений t, положительная и невозрастающая, для которой сходятся интегралы $\int_0\psi(t)dt$ и $\int_0\varphi(t)\log[1/\gamma(t)]\,dt$. Тогда при $t\to+\infty$, $\alpha(t)\sim Ae^{at}\beta(t)$. Теорема Икэхара получается из этого результата, если принять

$$\beta(t)=1,\ p=0 \text{ и } \gamma(u)=1$$

2. Пусть $\beta(t)$ — действительная функция, определенная при $t\geqslant 0$, измеримая и ограниченная в каждом конечном интервале, и предположим, что интеграл $\int_0^{+\infty}e^{-st}\beta(t)\,dt$ сходится при $\mathrm{Re}\,s>0$ и равен $G(s)$. Предположим далее, что существует целое положительное или равное нулю число p и действительная функция $\gamma(u)$, непрерывная и не убывающая на интервале $[0, l]$, положительная для $0<u\leqslant l$ и такая, что а) интеграл $\int_0^l\log[1/\gamma(u)]\,du$ сходится, б) произведение $t^{p+1}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ стремится к 1, когда $t\to+\infty$. Предположим еще, что существует такое положительное число A, что функция $F(s)=f(s)-AG(s-a)$ для каждого действительного y обладает одним из следующих свойств: или $F^{(p)}(s)$ остается ограниченной, когда s стремится к $a+iy$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>a$; или существует действительная функция $\Psi_y(t)$, определенная для достаточно малых значений t, положительная и невозрастающая, для которой сходятся интегралы $\int_0\Psi_y(t)\,dt$ и $\int_0\Psi_y(t)\log[1/\gamma(t)]\,dt$ и при этом $F^{(p)}(a+iy+s)=O[\Psi_y(r)/\gamma(r)]$, с $r=|s|$, когда s стремится к нулю в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>0$. Тогда при $t\to+\infty$ $\alpha(t)\sim Ae^{at}\beta(t)$.

Доказанные теоремы используются для получения асимптотических формул. Л. Я. Цлаф

7402. Тауберовы теоремы и арифметические приложения. Д е л а н ж (Théorèmes taubériens et applications arithmétiques. D e l a n g e H u b e r t), Mém. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 16, № 1, 87 p. (франц.)

Обзор исследований по тауберовым теоремам, начиная с первого результата Таубера (1897 г.) и кончая работами автора. При изложении тауберовых теорем в действительной области автор в основном следует идеям Караматы (Karamata, Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité, Paris, 1937), несколько обобщая его теоремы (Delange H., Ann. scient. Ecole norm. supér., 1950, 67, 99—160; 199—242). Эти обобщения оказываются полезными в приложениях к теории чисел и позволяют несколько упростить известное доказательство Винера асимптотического закона простых чисел (Wiener N., Ann. Math., 1932, 33, 1—100). Кроме того, ряд других известных арифметических результатов получается здесь как простое следствие тауберовых теорем для методов суммирования Ламберта и Абеля — Пуассона.

Далее в работе формулируются тауберовы теоремы для комплексной области, относящиеся к интегралу Лапласа. Заметим, что теорема II на стр. 52 весьма близка к одной теореме Авакумовича (Avakumović V. G., Math. Z., 1940, 46, 650—664), на которую автор не ссылается.

С точки зрения приложений к теории чисел представляют интерес следующие результаты автора, которые можно рассматривать как обобщение известной теоремы Икэхара:

Пусть $\alpha(t)$ не убывает при $t\geqslant 0$, $\alpha(0)\geqslant 0$, интеграл $f(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\alpha(t)\,dt$ сходится при $\mathrm{Re}\,s>a$ $(a>0)$. Тогда 1) из $f(s)=(s-a)^{-\rho}g(s)+h(s)$ ($g(s)$ и $h(s)$ голоморфны при $\mathrm{Re}\,s\geqslant a$, $g(a)\neq 0$, ρ — действительное число, не равное $0, -1, -2, \ldots$) следует $\alpha(t)\sim[1/\Gamma(\rho)]e^{at}t^{\rho-1}$ $(t\to\infty)$; 2) из $f(s)=\sum_{j=0}^{q}g_j(s)\times\left(\log\frac{1}{s-a}\right)^j$ ($q\geqslant 1$, $q_j(s)$ голоморфны при $\mathrm{Re}\,s\geqslant a$, $g_q(a)\neq 0$) следует $\alpha(t)\sim qg_q(a)e^{at}(\log t)^{q-1}/t (t\to\infty)$.

Применяя эти результаты к различным рядам Дирихле, автор весьма просто получает многочисленные арифметические следствия (большей частью известные), в том числе асимптотический закон простых чисел и его обобщения. Г. И. Коренблюм

7403. Об оценке интегралов вида $f(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau n)=\frac{1}{2\pi i}\int f(s)e^{W(s,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau n)}\,ds$ **и о механизме образования случайных явлений. 2а. Элементарное введение в теорию интегрирования методом перевала. Серрильо** (On the evaluation of integrals of the type $f(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)=\frac{1}{2\pi i}\int f(s)e^{W(s,\tau_1,\tau_2\ldots,\ \tau_n)}\,ds$ and the mechanism of formation of transient phenomena. 2a. Elementary introduction to the theory of the saddlepoint method of integration. Cerrillo M.), Res. Lab. Electronics, Massachusetts Inst. Technology, Cambridge, Mass., Techn. Rept., 1950 (1954), № 55: 2a. IV, 74 pp. (англ.)

Подробное и элементарное изложение метода наискорейшего спуска и аналогичных методов для аппроксимации оценки интегралов вида

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_s}F(s)e^{W(s,t)}ds,$$

где $W(s,t)=st-\Phi(s)$, а $F(s)$ не зависит от членов экспоненциального типа. Особое внимание уделяется методу приближений в форме, используемой в теории цепей. Доказательство и анализ ошибок не приводятся и будут даны в дальнейших докладах этой серии.

A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 454.

7404. Метод интегрирования произведений степеней синуса и косинуса. Лян Цзин-цзюй (求正餘弦乘幕的積分方法. 梁宗鉅), 數學通訊, Шусюэ тунсюнь, 1955, № 47, 1—9 (кит.)

7405. Геометрическая интерпретация второй производной. Эрхарт (Interprétation géométrique de la dérivée seconde. Ehrhart M. E.), Rev. math. spéc., 1955, **65**, № 12, 581—582 (франц.)

Даются две интерпретации второй производной функции $y=f(x)$.

7406 К. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению. Т. 3 Интегральное исчисление в области многих переменных. Островский (Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 3 Bd. Integralrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen. Ostrowski A. Verlag Birkhäuser, Basel- Stuttgart, 1954, 475 pp., 78.00 SFr) (нем.)

Третий и последний том завершает курс дифференциального и интегрального исчисления автора и является одним из исчерпывающих по этой теме. Точка зрения автора обсуждалась при реферировании предыдущих томов. (Ostrowski A., Vorlesungen über Differential—und Integralrechnung. Bd. I, II. Basel 1945, 1951) В настоящем томе излагается главным образом интегральное исчисление и анализ Фурье. Тщательное изложение теории кратных интегралов занимает около 180 стр. В книге приведено большое количество задач. Содержание: Гл. 1. Дополнительный материал по неопределенным интегралам. Гл. 2. Понятие кратного интеграла. Гл. 3. Вычисление кратных интегралов. Эта глава включает линейные интегралы, полные дифференциалы, замену переменной в двойных интегралах. Гл. 4. Приложения кратных интегралов, площадь поверхности, теорема Остроградского, теорема Стокса. Гл. 5. Несобственные простые интегралы. Гл. 6. Несобственные простые интегралы и гамма-функция. Гл. 7. Ряды и интеграл Фурье.

M. Heins

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 342

7407 К. Курс математического анализа Т. II. Второе, исправленное издание. Харадзе, Челидзе, Хведелидзе, Карцивадзе (მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. II. მეორე შესწორებული გამოცემა. ხარაძე ა., ჭელიძე ვ., ხვედელიძე ბ., ქარცივაძე ი.), Тбилиси, Изд-во Тбилисск. гос. ун-та, 1954, 614 стр., 14 руб. 30 коп. (груз.)

Учебник математического анализа для университетов. В I—II—III гл. дается общая теория числовых и функциональных рядов, причем подробно рассматриваются степенные ряды. В IV гл. даются элементы теории аппроксимации и интерполяции функций. В V гл. рассматриваются несобственные однократные интегралы Римана, а в VI гл.— интегралы, зависящие от параметров. В VII гл. вводится понятие квадрируемого множества, на основании чего в VIII—IX—X гл. излагается общая теория кратных интегралов Римана. В XI гл. рассматриваются кратные несобственные интегралы, а в XII—XIII гл.— криволинейные и поверхностные интегралы. В XIV гл. даются элементы теории функций с ограниченным изменением, а в XV гл.— теорий интегралов Римана-Стилтьеса. В XVI — XVII гл. рассматриваются ряды Фурье и интегралы Фурье. Наконец в XVIII—XIX гл. рассматриваются двойные ряды (числовые, степенные и тригонометрические). М. Б. Гагуа

7408 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Т. 4, ч. 1/2. Задачи с решениями к т. 1. Изд. 9-е. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieur. T.4, H. 1/2. Übungsaufgaben mit Lösungen zu T. 1. 9. Aufl. Rothe R., Leipzig, Teubner, 1955, 109 S., ill., 3.—DM.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 10, 522 (нем.)

7409 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Т. 5. Сборник формул. Роте (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. T. 5. Formelsammlung. 6. Aufl. Rothe R. Leipzig, Teubner, 1955, 124 S., ill., 3.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **A**, № 44, 2476 (нем.)

7410 К. Лекции по математическому анализу. Т. II. Пиньедоли (Lezioni di analisi matematica. Vol. II. Pignedoli Antonio. Padova, Ed. Casa ed. dott. A. Milani, 1955, xii, 535 p., 4500 L.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 651—652, 356 (итал.)

7411 К. Курс высшей математики. Т. 2. Минков (Курс по висша математика. 2. перераб. изд. Т. 2. Минков Н., София, Земиздат, 1955, 340 стр., 12.85 лв.), Българ. книгопис, 1955, 59, № 11,8 (болг.)

7412 К. Элементы высшей математики. Пенчальский (Elementy matematyki wyzszej. Sem. 6 i 7. Pęczalski Marian. Warszawa, Panstw. Wydawn. Szkoln. Zawod., 1955, 83,1 nlb. s. il., 3.20 zł.) Przew. bibliogr., 1955, **11**, № 46, 694 (польск.)

7413 К. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. Быт я (Curs de calcul diferenţial şi calcul integral. Vol. 1. Bîţealoan, Timişoara, Ed. Inst. politehn., 1955, 391 p.— Litogr.), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 14, 6 (рум.)

7414 К. Курс высшей математики. 3. Ч. 1. Смирнов (Curs de matematici superioare. 3. Part. 1. Smirnov V. I. Trad. din limba rusă. Bucureşti, Ed. tehn. 1955, 373 p., 11 lei), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 14, 8 (рум.)

7415 К. Новая математика. 2-й курс лекций по анализу. Хирано (新制數學. 解析 II の講義. 平野次郎. 大修館書店, 749 円, 570 圓, Тайсюкан Сетэн, 1954, 749, стр., 570 иен) (япон.)

7416 К. Анализ. I. Иноуэ (精粹. 解析. I. 井上義夫・向上社, 28年10月, 219 頁, 130 圓, Кодзёся, 1953. 219 стр., 130 иен) (япон.)

7417 К. Основы анализа. Том 2. Фудзимори (解析の基礎・續編・藤森良夫. 考へ方研究社・ 546 頁 —812 頁, 200. 圓, Кангаэката-кенкюся, 1954, стр. 546—812, 200 иен) (япон).

7418 К. Математический анализ по новой системе. I. Сборник задач. Ивакири (新制數學解析. I. 問題選集・岩切晴二, 培風館, 134 頁, 80 圓, Байфукан, 1954, 134 стр., 80 иен) (япон.)

7419 К. Математический анализ. Пейович (Математичка анализа. 2 изд. Пејовић Т. Београд,

«Грађевинска књига»,1955, 284 стр.), Bibliogr. jugosl., 1955, 6, № 23, 827 (серб.)

7420 К. Практический курс математического анализа. II. Сборник задач (實力養成: 解析 I. 問題集・屢邑義熟高等學校. 數學部會編. 森北出版, 161 頁, 90 圓, Морикита сюппан, 1954, 161 стр. 90 иен) (япон.)

7421 К. Учебник дифференциального исчисления. Мура (高等微分學演習. 村勢一郎. 有精堂. 356 頁, 480 圓. Юсэйдо, 1954, 396 стр., 480 иен) (япон.)

7422 К. Лекции по математическому анализу. Том последний. Сасабе (解析詳解講義・下卷・笹部貞市郎. 聖文堂, 523 頁, 280 圓. Сэйбундо, 1954, 523 стр., 280 иен) (япон.)

7423 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Томи (微積分の研究. 五味淵正詞. 山海堂. 326 頁, 200 圓 Санкайдо, 1954, 326 стр., 200 иен) (япон.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

7424. О суммировании конечных рядов. Уилон (Note on the summation of finite series. Wheelon Albert D.), J. Math. and Phys., 1955, **34**, № 3, 182—186 (англ.)

Указывается способ суммирования конечных рядов, общий член которых характеризуется биномиальными коэффициентами и факториальными множителями. Пользуясь формулой $n!=\int_0^\infty e^{-u}u^n du$, вводя в случае необходимости вспомогательные переменные и производя по ним преобразование Лапласа, суммирование таких рядов можно свести к вычислению одной из двух следующих элементарных сумм: $\Sigma_{n=0}^N x^n$ и $\Sigma_{n=0}^N x^n/n!$

Приводятся примеры суммирования предлагаемым способом некоторых рядов, встречающихся в теоретико-вероятностных вычислениях. Я. И. Житомирский

7425. О римановом суммировании. Канно (On the Riemann summability. Kanno Kôsi), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 2, 3, 155—161 (англ.)

Ряд $\Sigma_{\nu=1}^\infty a_\nu$ называется $(R,\ p)$-суммируемым к s, если ряд

$$\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu\left(\frac{\sin \nu t}{\nu t}\right)^p$$

сходится в некотором интервале $0<t<t_0$ и если

$$\lim_{t\to 0}\sum a_\nu\left(\frac{\sin \nu t}{\nu t}\right)^p = s,$$

где p — целое положительное число.

Доказывается теорема: Пусть s_n^β — $(C,\ \beta)$-средние ряда $\Sigma_{n=1}^\infty a_n$. Если $s_n^\beta = o(n^\gamma)$ $(n\to\infty)$, $\beta>\gamma>0$, $\gamma+1>p$ и $\Sigma_{\nu=n}^\infty \frac{|a_\nu|}{\nu} = O(n^{-(1-\delta)})$ $(n\to\infty)$, $\delta=p(\beta-\gamma)/(\beta+1-p)$, $0<\delta<1$, тогда ряд $\Sigma_{n=1}^\infty a_n$ $(R,\ p)$-суммируем к нулю.

Указанная теорема является обобщением теорем Суноути (РЖМат, 1954, 5640) и Хирокава и Суноути (Hirokawa H., Sunouchi G., Tôhoku Math. J., 1953, 5, 2). В работе имеются опечатки. И. А. Киприянов

7426. Совместность методов суммирования Нёрлунда и Хаусдорфа (решение задачи Ульриха). Юркат, Пейеримхофф (The consistency of Nörlund and Hausdorff methods (solution of a problem of E. Ullrich). Jurkat W., Peyerimhoff A.), Ann. Math., 1955, **62**, № 3, 498—503 (англ.)

Рассматриваются регулярные методы суммирования Нёрлунда (N_p), Хаусдорфа (H_χ) и обобщенный Абеля (A^*). Доказывается основная теорема 1: Если последовательность $\{s_n\}$ (комплексных чисел) N_p-суммируема к s' и H_χ-суммируема к s'', тогда $\{s_n\}$ также A^*-суммируема к значению $s=s'=s''$. Результат переносится на соответствующие функциональные методы суммирования (теорема 3). Из теоремы 1 следует, что методы N_p и H_χ совместны, т. е. они не могут суммировать одну и ту же последовательность к различным значениям. Этим дается положительное решение задачи Ульриха.

Примечание референта. На стр. 498, формулы (2), вместо $O(P_n)$ должно стоять $O(|P_n|)$ (так как $P_n\neq 0$).

Метод суммирования, называемый авторами именем Нёрлунда, впервые ввел в рассмотрение Г. Ф. Вороной (Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд. ин. лит., 1951, 120). М. П. Щеглов

7427. О значении некоторых конечных сумм. Байшанский, Боянич (О вредности неких коначних сума. Бајшански Б., Бојанић Р.), Билтен друмт. матем. и физ. Нар. Реп. Македонија, 1954, **5**, 34—36 (серб., рез. англ.)

Приводится вычисление двух конечных сумм

$$a_n=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,\frac{(2n+2k+1)!!}{(2n+2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!},$$

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}k^2\,\frac{(2n+2k-1)!!}{(2n+2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!},$$

величины которых $a_n=n(2n+1)/4$; $b_n=n(2n+1)/8$ без соответствующего доказательства были указаны в работе референта (РЖМех, 1956, 802). Э. Л. Блох

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

7428. Об асимптотическом представлении функций Бесселя порядка, равного аргументу. Гаттески (Sulla rappresentazione asintotica delle funzioni di Bessel di uguale ordine ed argomento. Gatteschi Luigi), Ann. mat. pura ed appl., 1955, **38**, 267—280 (итал.)

Выводятся асимптотические формулы

$$J_\nu(\nu)\approx\frac{1}{3\pi}\sum_{p=0}^{r-1}D_p\left(\frac{6}{\nu}\right)^{(2p+1)/3}\sin\frac{2p+1}{3}\pi, \qquad (1)$$

$$Y_\nu(\nu)\approx-\frac{1}{3\pi}\sum_{p=0}^{r-1}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{(2p+1)/3}\left(B_p+D_p\cos\frac{2p+1}{3}\pi\right),$$

где

$$D_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{(-6)^m}{m!}A_{p-m}^{(m)}\,\Gamma\left(\frac{2p+1}{3}+m,\left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right]^3\frac{\nu}{6}\right), \qquad (2)$$

$$B_p=\sum_{m=0}^{p}\frac{(-6)^m}{m!}A_{p-m}^{(m)}\,\Gamma\left(\frac{2p+1}{3}+m\right)$$

и коэффициенты $A_k^{(m)}$ определяются соотношением

$$\left(\frac{1}{5!}+\frac{\xi}{7!}+\frac{\xi^2}{9!}+\dots\right)^m=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(m)}\xi^k,$$

а $\Gamma(\alpha,\ x)=\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$. Для формул (1), (2) даются оценки остаточных членов. В. И. Левин

7429. Заметка о базисном множестве однородных гармонических полиномов. Майлс, Вильямс (A note on basic sets of homogeneous harmonic polynomials. Miles E. P., Williams E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 5, 769—770 (англ.)

Устанавливаются дифференциальные рекуррентные формулы для однородных гармонических полиномов $H^n_{b_1\ldots b_k}(x_1, \ldots, x_k)$ степени n от k переменных (b_i — целые числа $\geqslant 0$, $b_1 \leqslant 1$, $b_1 + \ldots + b_k = n$), рассмотренных в предыдущей работе авторов (РЖМат, 1956, 4537). Для случая $k = 3$ см. Protter M. H., Trans. Math. Soc., 1948, **63**, 314—341. М. Н. Олевский

7430. Интегралы, связанные с гипергеометрическими функциями от трех переменных. Саран (Integrals associated with hypergeometric functions of three variables. Saran S.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1955, **21**, № 2, 83—90 (англ.)

Пользуясь выражениями гипергеометрических функций

$$F_E,\ F_F,\ F_G,\ F_K,\ F_M,\ F_N,\ F_P,\ F_R,\ F_S,\ F_T$$

от трех переменных (рассматривавшихся автором в его предыдущих работах, см. Ganita, 1954,5; РЖМат, 1955, 854; 1956, 5952); через гипергеометрические функции Аппеля F_i ($i = 1,2,3,4$) от двух переменных и представлениями последних в виде интегралов типа Похгаммера (Erdélyi A., Higher transcendental functions, 1953, **1**, 231—232), автор получает для функций $F_E, \ldots, F_T$ соответствующие интегральные представления (по двойному контуру) через функции ${}_2F_1$ и F_i. Используя же в упомянутых выше соотношениях (вида, например.

$$F_E(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; x, y, z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta_2, n)}{(1, n)(\gamma_2, n)} F_2(\alpha_1 + n; \beta_1, \beta_2 + n; \gamma_1, \gamma_3; x, z)\, y^n)$$

для функций Аппеля интегральные представления Меллина — Барнса, автор получает соответствующие представления функции F_E в виде простых, двойных, и тройных интегралов типа Меллина — Барнса. Отмечается, что аналогичные представления возможны и для функций $F_F, \ldots, F_T$. М. Н. Олевский

7431. Некоторые формулы для произведения двух функций Уиттекера. Рагаб (Some formulae for the product of two Whittaker functions. Ragab F. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 4, 430—434; Indagationes math., 1955, **17**, № 4, 430—434 (англ.)

Устанавливаются (при некоторых ограничениях на параметры) выражения через E-функции для следующих интегралов:

$$\int_0^\infty e^{-t}\, t^{k-1}\, E(\alpha, \beta :: t)\, E(1-\alpha, 1-\beta :: t)\, E(p : \alpha_r : q; \rho_s : z/t^2)\, dt,$$

$$\int_0^\infty e^{-b/t}\, K_\lambda(t)\, K_\mu(t)\, E(\alpha, \beta :: b/t)\, E(1-\alpha, 1-\beta :: b/t)\, dt.$$

Надлежащей спецификацией параметров получаются выражения для интегралов, содержащих произведения функций Уиттекера, поскольку при $2\alpha = 1 - 2k + 2m$, $2\beta = 1 - 2k - 2m$ $E(\alpha, \beta :: z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\, z^{-k} e^{z/2} W_{k,m}(z)$. Установлена также следующая формула:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\zeta t} W_{k+\zeta, m}(z)\, W_{-k-\zeta, m}(z)\, d\zeta =$$

$$= \begin{cases} e^{-ikt} z K_{2m}(z \sec(t/2)) \sec(t/2), & |t| < \pi, \\ 0, & |t| > \pi, \end{cases}$$

$|\operatorname{amp} z| < \pi/2$, $z \neq 0$. М. Н. Олевский

7432. Произведение двух E-функций, выраженное в виде суммы двух E-функций. Рагаб (A product of two E-functions expressed as a sum of two E-functions. Ragab F. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, **2**. № 3, 124—126 (англ.)

Приводится доказательство следующей формулы:

$$E(\alpha, 1-\alpha :: z) \quad E(\beta, 1-\beta :: z) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} e^z}{2i \sin \alpha\pi \sin \beta\pi} \left[E\left(\gamma, 1-\gamma, \delta, 1-\delta : \frac{1}{2} : e^{i\pi} \frac{z^2}{4}\right) - \right.$$

$$\left. - E\left(\gamma, 1-\gamma, \delta, 1-\delta : \frac{1}{2} : e^{-i\pi} \frac{z^2}{4}\right) \right],$$

где $2\gamma = \alpha + \beta$, $2\delta = 1 + \alpha - \beta$. М. Н. Олевский

7433. Интегралы, содержащие E-функции и присоединенные функции Лежандра. Макроберт (Integrals involving E-functions and associated Legendre functions. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, **2**, № 3, 127—128 (англ.)

Даются (при некоторых ограничениях на параметры) выражения в E-функциях для следующих трех интегралов

$$\int_1^\infty E(p; \alpha_r : q; \rho_s : z/(\lambda - 1))\, (\lambda - 1)^e\, (\lambda^2 - 1)^{m/2}\, f_i(\lambda)\, d\lambda,$$

($i = 1, 2, 3$), где $f_1(\lambda) = (\lambda^2 - 1)^{-m} P_n^{-m}(\lambda)$, $f_2(\lambda) = P_n^{-m}(\lambda)$ и $f_3(\lambda) = Q_n^{-m}(\lambda)$. М. Н. Олевский

7434. Интегралы, содержащие произведения модифицированных бесселевых функций второго рода. Макроберт (Integrals involving products of modified Bessel functions of the second kind. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, **2**, № 3, 129—131 (англ.)

Для интеграла $\int_0^\infty e^{-\zeta\lambda} \lambda^{k-1} K_m(\lambda) K_n(z/\lambda)\, d\lambda$, сходящегося при $R(z) > 0$, $R(\zeta) > -1$, дается выражение в виде суммы трех (довольно громоздких) рядов по степеням z с коэффициентами, содержащими гипергеометрические функции от аргумента $1 - \zeta^2$ (ряды эти сходятся при $|-\zeta^2| < 1$). Случаи $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ были рассмотрены ранее (РЖМат, 1955, 5901; Ragab F. M., Proc. Glasgow Math. Assoc., 1954, **2**, 85—88). М. Н. Олевский

7435. Теоремы сложения для общих функций Лежандра и Гегенбауэра. Хенрици (Addition theorems for general Legendre and Gegenbauer functions. Henrici Peter), J. Rational Mech. and Analysis, 1955, **4**, № 6, 983—1018 (англ.)

Регулярные вблизи $x = c$, $y = 0$ ($c \neq 0$, комплексное) решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\mu + 1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\nu + 1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$(\nu \neq -{}^3/_2, -{}^5/_2, \ldots)$$

переводятся при помощи подстановки

$$x = c\,[(1 - ww^*)/(1 - w)(1 - w^*)],$$

$$y = -ic\,[(w - w^*)/(1 - w)(1 - w^*)]$$

в регулярные вблизи $w = w^* = 0$ функции $G(w, w^*)$.

Исследуется разложение любой симметрической функции $G(w, w^*)$ в ряд по функциям

$$G_n(w, w^*) = \alpha_n (\xi - \gamma_1)^{\mu+\nu+1} (\xi')^{-\mu} Q^\mu_{\nu+n}(\xi)\, C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\eta),$$

где $Q^\mu_{\nu+n}(\xi)$ — функции Лежандра 2-го рода, $C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\eta)$ — многочлены Гегенбауэра, α_n — заданные постоянные, а ξ, η, ξ' связаны с w и w^* соотношениями

$$ww^* = (\xi - \xi')^2 = (\xi + \xi')^{-2},\ w/w^* = (\eta - \eta')^2 = (\eta + \eta')^{-2}.$$

Автор устанавливает, что из разложения

$$G(w, 0) = (1-w)^{1+\mu+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n (|w| < r)$$

следует

$$G(w, w^*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n G_n(w, w^*)$$

причем ряд сходится в области $|w| < r$, $|w^*| < r$, за исключением точек, для которых либо $ww^* \geqslant 1$, либо $w \geqslant 1$ или $w^* \geqslant 1$. В случае надобности G понимается в смысле аналитического продолжения.

На основе этой теоремы автор получает разложение по $G_n(w, w^*)$ для функции $(\xi_1 - \eta_1)^{\mu+\nu+1}(\xi_1')^{-\mu} L^{\mu}_{\nu+\alpha}(\xi_1)$ $C_{\alpha}^{\nu+\frac{1}{2}}(\eta_1)$, где $L^{\mu}_{\nu+\alpha}$ — линейная комбинация функций Лежандра 1-го и 2-го рода, а ξ_1, η_1, ξ_1' определенным образом связаны с w и w^*. Далее рассматриваются 3 частные случая общего разложения при $\alpha = 0$, $-(\mu+\nu+1)$ и их некоторые видоизменения. Рассматриваются и более частные случаи (частично известные) при конкретных ν, μ, η. Кроме того, даются разложения по функциям $G_n(w, w^*)$ для двух других решений уравнения (1): произведения двух цилиндрических функций и произведения двух гипергеометрических функций.

В конце работы даются некоторые интегралы, которые получены из предыдущих разложений на основе ортогональности полиномов Гегенбауэра.

Э. Я. Риекстыньш

7436. **Теория сферических и эллипсоидальных гармоник. Хобсон** (The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Hobson E. W., Chelsea Publishing Company, New York, 1955, xi + 500 pp.), Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 356 (англ.)

7437 К. **Шаровые функции. 2-е издание. Лензе** (Kugelfunktionen, 2te Aufl. Lense Josef. Leipzig, Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.— G., 1954. XIII, 294 S., 26.00 DM) (нем.)

Перепечатка с первого издания (1950 г.) с исправлением обнаруженных ошибок.

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 470

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7438. **Об интегральных представлениях обобщенной k-функции Бейтмана и ее связи с функциями Лежандра и функциями параболического цилиндра. Саркар** (On integral representations of the generalised k-function of Bateman and its connection with Legendre and parabolic cylinder functions. Sarkar G. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, **46**, № 4, 239—244 (англ.)

В работе получен ряд представлений для обобщенной k-функции Бейтмана

$$k_{2n}^{2l}(x) = \frac{(2x)^l}{\Gamma(l+n+1)} W_{n, l+1/2}(2x)$$

в виде определенных интегралов, содержащих гипергеометрические функции. Выведены некоторые соотношения, связывающие рассматриваемую функцию с функциями Лежандра и функциями параболического цилиндра.

Н. Н. Лебедев

7439 К. **Функции Бесселя и их применение в физике.** 2-е изд. **Гуде** (Les fonctions de Bessel et leurs applications en physique. 2ème éd. Goudet Georges. Paris, Masson et Cie, 1954, 90 p., 600 fr.) (франц.)

Дается краткое представление о функциях Бесселя и о возможности их применения в физике и технике. Изложение элементарное, некоторые результаты доказываются, другие только описываются. Содержание: Гл. 1. Введение бесселевых функций с помощью проблемы колебания круглой мембраны. Гл. 2. Степенные ряды бесселевых функций 1-го, 2-го и 3-го родов. Графики. Круглая мембрана. Гл. 3. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования, простые интегралы, асимптотические представления, видоизмененные функции Бесселя. Гл. 4. Приложения к электромагнитным волнам в цилиндрическом волноводе, скин-эффект, теплопроводность в цилиндре, диффракция. Числовые таблицы.

A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 470

7440. **Обращение и инварианты обобщенного преобразования Ганкеля. Станкович, Сад** (Inversion et invariants de la transformation généralisée de Hankel. Stanković Bogoljub, Sad Novi), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 25, 1905—1907 (франц.)

Утверждается справедливость трех теорем относительно обобщенного преобразования Ганкеля:

$$\int_0^{\infty} \Phi(\mu+1, \nu; -x^{\nu} y)\, y^{\mu} g(y)\, dy = G(x) \quad (\mu > -1, \nu > 0) \quad (1)$$

где

$$\Phi(\mu, \nu; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\mu+\nu k)},$$

1. $x^{(\mu+1)(\nu-1)/\nu} g(x) = \int_0^{\infty} \Phi((\mu+1)/\nu, \ 1/\nu; \ x^{-1/\nu} y) \times$ $\times y^{\mu} G(y)\, dy$, если последний интеграл сходится и $x^{\mu} g(x)$ есть функция класса L.

2. Если $x^{\mu} f(x)$ есть функция класса L, то общее решение однородного уравнения

$$f(x) = \int_0^{\infty} \Phi(\mu+1, \nu; -x^{\nu} y)\, y^{\mu} f(y)\, dy \quad (\mu > -1, \nu > 0) \quad (2)$$

удовлетворяет соотношению

$$\varphi(s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\mu} f(t)\, dt = s^{[\mu+1]/[\nu+1]}\, \omega^{(\ln \ln s / \ln(-\nu))}, \quad (3)$$

где $\omega(x)$ есть периодическая функция периода 1, тогда как второй член (3) есть функция l.

3. Если $w(x)$ есть некоторая периодическая функция периода 1 такая, что $xw\,[\ln x / \ln(-\nu)]$ принадлежит l, тогда функция $g(x)$, определенная соотношением

$$\int_0^x y^{\mu} g(y)\, dy = x^b \int_0^{\infty} tw\left(\frac{\ln t}{\ln(-\nu)}\right) \frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{x^t}{\Gamma(1+b+t)}\right\} dt,$$

где $b = (\mu+1)/(\nu+1)$, есть решение уравнения (2).

Определение классов L и l см. Dëč (Doetsch G.), Handbuch der Laplace Transformation, I, 1950.

Л. Я. Цлаф

7441. **Некоторые новые формулы для преобразования Лапласа. Риекстыньш Э. Я.**, Прикл. матем. и механика, 1955, № 6, 761—768

Автор выводит ряд формул для обратного преобразования Лапласа:

$$L^{-1}\{f(p)\} = F(t).$$

Рассмотрены случаи

$$f(p) = \frac{1}{(\alpha + \sqrt{p})^n}; \quad f(p) = \frac{\sqrt{p}}{(\alpha + \sqrt{p})^n};$$

$$f(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{\alpha - \sqrt{p}}{\alpha + \sqrt{p}}\right)^n$$

и аналогичные им.

Автор вводит функцию

$$\Phi_n(\alpha, t) = \frac{(-1)^n}{2t\,(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc}(\alpha\sqrt{t}),$$

посредством которой выражает $L^{-1}\{f(p)\}$ для перечисленных случаев. Устанавливает связь между функцией $\Phi_n(\alpha, t)$ и функцией параболического цилиндра с целым отрицательным индексом $D_{-n}(\alpha\sqrt{2t})$. П. И. Кузнецов.

7442. Функции, двойственные себе, и новое преобразование. Бхатнагар (On self-reciprocal functions and a new transform. Bhatnagar K. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, 46, № 3, 179—199 (англ.)

Рассматривается обобщенная трансформация

$$g(x)=\int_0^\infty f(y)\,\widetilde{\omega}_{\mu\nu}(xy)\,dy,\quad f(x)=\int_0^\infty g(y)\,\widetilde{\omega}_{\mu\nu}(xy)\,dy$$

с ядром $\widetilde{\omega}_{\mu\nu}(xy)=(xy)^{1/2}\int_0^\infty J_\nu(T)J_\mu(xy/T)\,dT/T$ и изучаются условия, при которых функция $f(x)$ будет двойственной себе. Решения уравнения $f(x)=\int_0^\infty f(y)\,\widetilde{\omega}_{\mu,\nu}(xy)\,dy$ автор обозначает $R_{\mu,\nu}$.

Доказываются теоремы:

а) Пусть $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на $(0,\infty)$, пусть

$$\varphi_1(p)=(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty (px)^s K_m(px)\,x^{n+1/2}f(x)\,dx,$$

$n+s\pm m>-1/2$. Равенство $\varphi_1(p)=p^{-2n-2}\varphi_1(1/p)$ необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x)$ была $R_{n+s-m,\,n+s+m}$.

б) Пусть $f(x)$ и $f(1/x)$ непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(0,\infty)$, пусть

$$\varphi(p)=(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty (px)^s K_m(px)\,x^n f(x)\,dx,$$

$n+s\pm m>-1/2$. Равенство $f(x)=f(1/x)$ необходимо и достаточно для того, чтобы $p^{n+1/2}\varphi(p)$ была $R_{n+s-m,\,n+s+m}$.

в) Пусть $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на $(0,\infty)$. Равенство

$$\int_0^\infty (xy)^{1/2}J_\nu(xy)f(y)\,dy=x^{-3/2}\int_0^\infty y^{1/2}J_\mu(y/x)f(y)\,dy$$

($\mu,\nu>-1/2$) необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x)$ была $R_{\mu,\nu}$.

г) Пусть $0<\alpha\leqslant\pi$, $a<1/2$ и $f(x)$ — аналитическая функция от $x=re^{i\theta}$, регулярная в угле $r>0$, $|\theta|<\alpha$, причем $f(x)=O(|x|^{-a-\varepsilon})$ для малых x и $f(x)=O(|x|^{a-1-\varepsilon})$ для больших x (для каждого положительного ε и равномерно в каждом угле $|\theta|\leqslant\alpha-\eta<\alpha$). Для того чтобы $f(x)$ была $R_{\mu,\nu}$, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$f(x)=(1/2\pi i)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}2^s\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}\right)\times$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}\right)\psi(s)\,x^{-s}\,ds,$$

где $\psi(s)$ регулярна и удовлетворяет условию $\psi(s)=\psi(1-s)$ в полосе $a<\sigma<1-a$, причем $\psi(s)=O[\exp((\pi/2)-\alpha+\eta)|t|]$ для каждого положительного η и равномерно в каждой полосе, внутренней к $a<\sigma<1-a$. Здесь $s=\sigma+it$, а c — любое значение σ из интервала $a<\sigma<1-a$.

Помимо отмеченных в работе доказано еще несколько теорем, устанавливающих связь между функциями $R_{\mu,\nu}$ и функциями, двойственными себе при преобразовании Ганкеля. Доказательство большинства теорем основано на применении теоремы Ганкеля, а также на применении ряда найденных автором лемм, аналогичных теореме Лерха. М. И. Клиот-Дашинский

7443. Некоторые результаты, содержащие гипергеометрические и E-функции. Ратхи (Some results involving hypergeometric and E-functions. Rathie C. B.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1955, 2, № 3, 132—138 (англ.)

Автор рассматривает преобразование

$$\varphi(p)=p\int_0^\infty e^{-1/2px}(px)^{m-1/2}W_{k,m}(px)\,h(x)\,dx\ldots \quad (1)$$

($W_{k,m}(x)$ — функция Уиттекера), кратко обозначая его так: $\varphi(p)\underset{\vee}{=}h(x)$; при $k=-m+1/2$ оно обращается в преобразование Лапласа (обозначаемое знаком $\underset{\vee}{=}$). Доказываются следующие две теоремы: 1) Пусть $\varphi(p)\underset{\vee}{=}h(x)$ и $f(p)\underset{\vee}{=}x^l h(x)$; тогда

$$\varphi(p)=\frac{p^\alpha}{\Gamma(1+l-\alpha)}\int_0^\infty x^{l-\alpha}(x+p)^{-1}f(x+p^{1/2})\times$$
$$\times F_1(1-\alpha,\alpha-2k;\,1+l-\alpha;\,-x/p)\,dx, \quad (2)$$

$\alpha=m+k+1/2$ в предположении, что $R(p)>0$, $R(1+l-\alpha)>0$ и интеграл в правой части (2) существует. 2) Пусть $\varphi(p)\underset{\wedge}{=}h(x)$, $p^{2-\lambda}h(p)\underset{\wedge}{=}g(x)$ и $p^{2-\mu}g(p)\underset{\wedge}{=}f(x)$; тогда

$$\Phi(p)=p^{1-\lambda}$$
$$\int_0^\infty x^{-\mu}E(\lambda,\,\lambda+2m,\,\mu:\lambda+m-k+1/2:px)\,f(x)\,dx\ldots \quad (3)$$

в предположении, что $R(\lambda)>0$, $R(\lambda+2m)>0$, $R(\mu)>0$ и интеграл в правой части (3) существует.

Эти теоремы используются автором для получения ряда несобственных интегралов, содержащих произведения некоторых гипергеометрических и E-функций. Преобразование (1) рассматривалось Мейером; им была дана соответствующая формула обращения (Meijer C. S., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1941, 44, 727—737). М. Н. Олевский

7444. Применения теории распределений к некоторым проблемам математической физики. Мера Дирака и исчисление переходных явлений. 2-я часть. Сингулярные интегралы. Коломбо (Applications de la théorie des distributions à quelques problèmes de physique mathématique. La mesure de Dirac et le calcul des phénomènes transitoires. 2-ème partie. Intégrales singulières. Colombo Serge), Cahiers phys., 1955, № 61, 25—34 (франц.)

Рассматриваются так называемые сингулярные интегралы вида $\int_a^b f(x)\,\varphi(x-\xi,\,n)\,dx$, где $\varphi(t,\,n)$ выбирается так, чтобы интеграл стремился к $[f(\xi+0)+f(\xi-0)]/2$ при стремлении n к некоторому пределу. В частных случаях функция $\varphi(t,\,n)$ аппроксимирует импульсную δ-функцию (Ван дер Поль Б. и Бреммер Х., Операционное исчисление, М., Изд-во ин. лит., 1952, гл. V). Указываются применения сингулярных интегралов к суммированию расходящихся интегралов и к теории преобразования Лапласа. Н. А. Бразма

7445. Об операционном исчислении. Ямадзаки (Operater Calculus について・山崎和夫), 素粒子論研究, Сорюсирон кэнкю, 1955, 7, спец. вып., янв., 5—17 (япон.)

7446 К. Символическое исчисление двух переменных и его приложение. Поли, Дельрю (Le calcul symbolique à deux variables et ses applications.

Poli L., Delerue P., Paris, Gauthier-Villars, 1954, 80 p., 1000 fr.), Bibliogr. France, 1955, 144, № 2, 32 (франц.)

7447 К. Введение в теорию преобразований Лапласа и ее применение в технике. Джейгер (An introduction to the Laplace transformation, with engineering applications. Jaeger Joan Conrad. London, Methuen; New York, Wiley, 1955, VIII, 132 pp., ill., 7 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 306, 8 (англ.)

См. также: 7323, 7357, 7388, 7707, 7708, 7697

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

7448. Некоторые топологические свойства выпуклых множеств. Кли (Some topological properties of convex sets. Klee V. L., Jr.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, 30—45 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1953, 1251). Теорема Келлера (Keller O.-H., Math. Ann., 1931, 105, 748—758) о том, что любой бесконечномерный выпуклый компакт в гильбертовом пространстве гомеоморфен «гильбертову кирпичу», обобщается на случай пространства Банаха. Доказываются теоремы:

1. Каждое бесконечномерное сепарабельное пространство Банаха гомеоморфно подмножеству любого другого такого же пространства, т. е. все эти пространства имеют одинаковый тип размерности в смысле Фреше.

2. Нормальное пространство, содержащее замкнутое в нем подмножество, гомеоморфное полупрямой, в частности любое выпуклое некомпактное подмножество локально выпуклого метризуемого топологического линейного пространства, не обладает свойством неподвижной точки (это утверждение является обратным по отношению к теореме Тихонова).

3. Гомеоморфизм любых двух компактных подмножеств гильбертова пространства может быть продолжен до непрерывного отображения всего пространства на себя, причем существует изотопия, переводящая тождественное отображение пространства на себя в построенное отображение.

Обобщается утверждение, полученное ранее Келлером (см. указанную выше работу) для $n = 1$ и «гильбертова кирпича»: если K — бесконечномерное компактное выпуклое подмножество пространства Банаха, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ — различные между собой точки из K, то существует непрерывное отображение K на K, переводящее все x_k в y_k. Можно построить отображение S «периода 2» (т. е. такое, что $Sx \neq x$, $S^2x = x$), обладающее указанным свойством.

Доказывается, что любое локально компактное (без этого условия вопрос остается открытым) выпуклое замкнутое подмножество пространства Банаха гомеоморфно топологическому произведению конечного или счетного множества сегментов на конечное множество интервалов или на полуинтервал, причем все перечисленные «типы» топологически различны между собой.

М. Л. Бродский

7449. Вполне непрерывные операторы вольтерровского типа. Рингроз (Compact linear operators of Volterra type. Ringrose J. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 1, 44—55 (англ.)

Рассматривается класс обобщенных вольтерровских операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, определенный следующим образом. Пусть $\mathfrak{B}^*$ есть пространство, сопряженное к $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{N}^* \subset \mathfrak{B}^*$ обладает тем свойством, что если $f(x) = 0$ ($x \in \mathfrak{B}$) для всех $f \in \mathfrak{N}^*$, то $x = 0$. Возьмем семейство проекционных операторов $\{E_\lambda\}$ в $\mathfrak{B}$ ($0 \leqslant \lambda \leqslant 1$) такое, что сопряженные операторы обладают свойствами: 1) $E_0^* = 0$, $E_1^* = I^*$ (единичный оператор в $\mathfrak{B}^*$); 2) $E_\lambda^* E_\mu^* = E_\mu^* E_\lambda^* = E_\mu^*$ ($\lambda \geqslant \mu$); 3) для всякого $f \in \mathfrak{N}^*$ $\| (E_\lambda^* - E_\mu^*) f \| \to 0$ при $\lambda \to \mu$; 4) $\| E_\lambda^* \| < \text{const}$.

Тогда оператор A в пространстве $\mathfrak{B}$ называется обобщенным вольтерровским, если: 1) A вполне непрерывен; 2) $AE_\lambda = E_\lambda AE_\lambda$; 3) $A^*(\mathfrak{N}^*) \subseteq \mathfrak{N}^*$.

Доказывается, что обобщенный вольтерровский оператор является квазинильпотентным, т. е. $\| A^n \|^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что оператор $I - \mu A$ при любом комплексном μ обладает ограниченным обратным оператором, представимым в виде ряда

$$(I - \mu A)^{-1} = I + \mu A + \mu^2 A^2 + \ldots \qquad (1)$$

Если $\mathfrak{B} = L_p$, то имеет место

Теорема. Пусть ядро $k(x, t)$, соответствующее оператору A, удовлетворяет условию

$$\int_a^b dx \left(\int_a^x | k(x, t) |^q \, dt \right)^{p/q} < \infty,$$

где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$, тогда для $g(x) \in L^p(a, b)$ интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^x k(x, t) f(t) \, dt$$

имеет в $L^p(a, b)$ единственное решение вида (1). Это же решение можно представить и в виде

$$f(x) = g(x) + \mu \int_a^x k_\mu(x, t) g(t) \, dt.$$

Для конечного (a, b) имеет место аналогичная теорема при $k(x, t) = k(x - t)$, где $k(x) \in L(a, b)$.

Показывается, что для бесконечного интервала это утверждение может быть неверным. Именно, если $k(x)$ и $g(x) \in L(0, \infty)$ и не эквивалентны нулю, то существует такое значение λ, при котором интегральное уравнение

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x - t) f(t) \, dt$$

не имеет абсолютно интегрируемого решения.

Ю. А. Шрейдер

7450. Эндоморфизмы полуупорядоченных векторных пространств. Бонсалл (Endomorphisms of partially ordered vector spaces. Bonsall F. F.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 2, 133—144 (англ.)

Рассматривается вещественное линейное пространство V с полугруппой V^+: если $x, y \in V^+$ и $\lambda, \mu \geqslant 0$, то $\lambda x + \mu y \in V^+$; если $x \in V^+$ и $-x \in V^+$, то $x = 0$.

Приводятся некоторые дополнения к результатам М. Г. Крейна и референта о спектральных свойствах линейных операторов, действующих в V и оставляющих инвариантной V^+: $AV^+ \subset V^+$ (Рутман М. А., Докл. АН СССР, 1938, 18, № 9, 625—628; Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1939, 23, № 8, 749—752; Крейн М. Г., Рутман М. А., Успехи матем. наук, 1948, 3, № 1, 3—95).

1. Пусть существует элемент $e \in V^+$ («архимедова единица») такой, что для каждого $x \in V$ найдется скаляр $\lambda = \lambda(x)$, при котором $\lambda e \geqslant x$. Положим $p_e(x) = \inf\{\lambda, \lambda e \geqslant x\}$. Доказывается, что у сопряженного оператора A^* существует собственный положительный функционал $\varphi: A^*\varphi = \rho\varphi$ ($\varphi \in V^{*+}$, $\varphi \neq \theta$), причем $\rho = \lim_{n\to\infty}\{p_e(A^n e)\}^{1/n}$.

В качестве применения приводится следующая теорема: Пусть $K(s, t)$ $(0 \leqslant s, t \leqslant 1)$ непрерывна по s при всяком t и не убывает по t при всяком s. Пусть далее:

$$K^{(1)} = K,\ K^{(n)}(s, t) = \int_0^1 K(u, t)\, d_u K^{(n-1)}(s, u),$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\{\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}[K^{(n)}(s, 1) - K^{(n)}(s, 0)]\}^{1/n}.$$

Если $\rho > 0$, то существует неубывающая, отличная от постоянной, функция f такая, что

$$\int_0^1 K(s, t)\, df(s) = \rho f(t).$$

Если $\rho = 0$, то существует такого же вида функция g, для которой $\int_0^1 K(s, t)\, dg(s) = \text{const}$ всюду, кроме не более чем счетного множества значений t.

2. Для семейства $\mathfrak{A}$ попарно перестановочных линейных операторов, оставляющих инвариантной V^+, существует $\varphi \in V^{*+}$, $\varphi \neq \theta$, являющийся общим собственным функционалом всех сопряженных операторов: $A^*\varphi = \rho_A\varphi$ $(A \in \mathfrak{A})$.

3. Если V — рефлективное пространство Банаха, V^+ замкнута, V^+ и V^{*+} имеют внутренние точки и ρ — спектральный радиус A, то существуют $u \in V^+$, $u \neq \theta$; $\varphi \in V^{*+}$, $\varphi \neq \theta$ такие, что $Au = \rho u$, $A^*\varphi = \rho\varphi$.

Доказательства основываются на элементарных положениях теории нормированных колец; метод неподвижной точки не используется.

В указанных выше работах М. Г. Крейна и референта V предполагалось линейным нормированным; связь между собственным значением ρ и спектральным радиусом A не приводилась. М. А. Рутман

7451. Эндоморфизмы полуупорядоченного векторного пространства без архимедовой единицы. Бонсалл (Endomorphisms of a partially ordered vector space without order unit Bonsall F. F.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 144—153 (англ.)

Продолжение предыдущей работы (реф. 7450). Предполагается, что V — линейное нормированное пространство, а полугруппа V^+ является нормальным конусом (Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1940. 28, № 4, 13—17); условие существования «архимедовой единицы» заменяется более слабым: каждому $x \in V$ соответствует конечная система неотрицательных чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такая, что $\sum_0^n \lambda_k A^k e \geqslant x$. При этих предположениях доказывается предложение, аналогичное предложению 1 предыдущего реферата.

В частном случае, когда V — пространство вещественных функций $\{f(t)\}$, заданных и непрерывных на локально компактном хаусдорфовом пространстве S и равных нулю вне компактного подмножества $S_f \subset S$, второе условие может быть заменено еще более слабым: существует $e = e(t) \in V^+$ такая, что каждому $t \in S$ соответствует натуральное $k = k(t)$, при котором $(A^k e)(t) > 0$.

Далее доказывается, что если V^+ — нормальный конус, воспроизводящий V ($V = \{x - y\}$; $x, y \in V^+$), то линейный оператор, оставляющий V^+ инвариантным, имеет в V собственное инвариантное подпространство. М. А. Рутман

7452. Индефинитно изометрические линейные операторы в рефлективном банаховом пространстве. Бонсалл (Indefinitely isometric linear operators in a reflexive Banach space. Bonsall F. F.), Quart. J. Math., 1955, 6, № 23, 179—187 (англ.)

В вещественном рефлективном банаховом пространстве V, помимо обычной нормы $\|x\|$ $(x \in V)$, задается «индефинитная норма» $q(x) = \|Qx\|^\nu - |\varphi(x)|^\nu$, где $\varphi(x)$ — некоторый линейный (непрерывный) функционал в V, Q — проекционный оператор, определенный равенством $Q = I - P$, в котором I — тождественный оператор, $Px = \varphi(x)\, e$ $(x \in V)$, а e — вектор из V, для которого $\varphi(e) = 1$; ν — некоторое положительное число. Рассматриваются линейные операторы T в V, «изометрические» по отношению к «норме» $q(x)$, т. е. $q(Tx) = q(x)$ $(x \in V)$, и более общий класс операторов, «индефинитно ограниченных» по «норме» $q(x)$: $q(Tx) \leqslant Mq(x)$ $(x \in V)$, $M > 0$.

Совокупность V^+ всех $x \in V$, для которых $\varphi(x) \geqslant \|Qx\|$, оказывается замкнутым телесным конусом, а e — его внутренней точкой. Пространство V обычным образом частично упорядочивается с помощью конуса V^+. Если T — индефинитно ограниченный оператор в V, то либо T, либо $-T$ является эндоморфизмом (реф. 7450) полуупорядоченного пространства V. Соответственно этим двум возможностям оператор T называется оператором первого или второго рода. Спектральным радиусом оператора T называется $\max|\lambda|$, где комплексное число λ пробегает весь спектр T.

Теорема 1. Если T — индефинитно ограниченный линейный оператор первого рода, то он является ограниченным и в обычном смысле. Его спектральный радиус ρ, который отличен от нуля, является собственным значением операторов T и T^*.

Если единичная сфера пространства V строго выпукла, а $\|Q\| = 1$, то имеет место

Теорема 2. Пусть T — индефинитно изометрический оператор первого рода в V. Тогда T и T^{-1} являются ограниченными линейными операторами со спектральными радиусами ρ, σ, где $\sigma^{-1} \leqslant 1 \leqslant \rho$, причем возможны два случая: 1) $\sigma^{-1} = \rho = 1$, и тогда весь спектр T лежит на единичной окружности, а 1 является собственным числом T и T^*; 2) $\sigma^{-1} < \rho$, и тогда ρ и σ^{-1} суть собственные числа T и T^*, а весь остальной спектр лежит на единичной окружности.

Указывается на связь этих результатов с исследованиями М. Г. Крейна, Л. С. Понтрягина и референта по операторам в пространствах с индефинитной метрикой. И. С. Иохвидов

7453. Линейные функции в действительном счетномерном пространстве. Хенсток (Linear functions with domain a real countably infinite dimensional space. Henstock R.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 18, 238—256 (англ.)

Рассматриваются линейные функции, определенные в пространстве Q_ω всех действительных последовательностей $\{x_n\}$ таких, что $|x_n| \leqslant 1/2$ для всех n. В этом пространстве, которое является декартовым произведением счетного числа отрезков $[-1/2, 1/2]$, вводится мера, индуцированная лебеговыми мерами на этих отрезках.

Ставятся следующие проблемы:

(А). Найти общий вид линейной измеримой конечной почти всюду функции, определенной в Q_ω (Под линейной функцией понимается аддитивная и однородная, но не обязательно непрерывная функция).

(В). Каковы необходимые и достаточные условия, при которых для линейной относительно ξ функции $J(t, \xi)$ $(\xi \in Q_\omega$, t — действительное неотрицательное число) существует конечный или почти всюду конеч-

ный предел $\lim_{t\to\infty} J(t,\ \xi)$, причем при предельном переходе на луче $0\leqslant t<\infty$ опускается множество меры нуль, зависящее от ξ.

(C). Та же проблема, что и (B), но с заменой предела при $t\to\infty$ аппроксимативным пределом при $t\to T$ слева.

Проблема (A) решается следующей теоремой: Если линейная измеримая функция $J(\xi)$ определена на множестве положительной меры, то она существует почти всюду на Q_ω и удовлетворяет условиям: $\sum_1^\infty J^2(\varphi^n)<\infty$ (φ^n — последовательность $\{x_i\}$ с $x_i=0$ для $i\neq n$, $x_n=1/2$); $\lim_{n\to\infty} J(\xi_n^*)=0$ для почти всех $\xi\in Q_\omega$ (ξ_n^* получается из ξ заменой первых n членов нулями). Эта функция для почти всех $\xi\in Q_\omega$ определяется равенством $J(\xi)=\sum_1^\infty 2J(\varphi^n)\,x_n$, где $\xi=\{x_n\}$.

Приводится следствие из этой теоремы: Линейная функция $J(\xi)$ тогда и только тогда ограничена в гильбертовом пространстве l_2, когда она может быть продолжена на множество положительной меры в Q_ω. Проблемы (B) и (C) не получают полного решения. Даются только необходимые условия для существования $\lim J(t,\ \xi)$ (причем показывается их недостаточность). В частности, для проблемы (B) эти условия таковы:

1) Пусть $J(t,\ \xi)$ линейна относительно ξ и измерима в $I\times Q_\omega$, где $I=E_1(t\geqslant 0)$. Если для почти всех $\xi\in Q_\omega$ существует множество $E_4(\xi)\subset I$ меры нуль такое, что $\lim_{t\to\infty} J(t,\ \xi)=0$, когда t пробегает множество $I-E_4(\xi)$, то $\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^\infty J^2(t,\varphi^n)=0$ (этот последний предел также берется по множеству $I-E_5$, где E_5 — множество меры нуль).

2) Если $\lim_{t\to\infty} J(t,\ \xi)$ существует, когда t пробегает $I-E_4(\xi)$, то существуют конечные пределы $\lim_{t\to\infty} J(t,\ \varphi^n)$ для всех $n=1,\ 2,\ \ldots,$ и $\overline{\lim}_{t\to\infty}\sum_1^\infty J^2(t,\ \varphi^n)$, причем предельные переходы совершаются по множеству $I-E_5$, где E_5 — некоторое множество меры нуль. Ю. С. Очан

7454. О конечных системах линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных. Рогозинский (On finite systems of linear equations with an infinity of unknowns. Rogosinski W. W.), Math. Z., 1955, 63, № 1, 97—108 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — линейное нормированное комплексное пространство; $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\in\mathfrak{A}$ линейно независимы и $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ — комплексные числа. Изучается линейный непрерывный (л. н.) функционал $B^*(a)$ ($a\in\mathfrak{A}$), определенный во всем $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий условиям

$$B^*(a_i)=C_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

и имеющий минимальную норму («минимальное решение» (1)). Если $\mathfrak{P}_n$ — линейная оболочка, натянутая на $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, то B^* можно рассматривать как расширение с сохранением нормы л. н. функционала $\widetilde{B}$, построенного в $\mathfrak{P}_n$ и удовлетворяющего (1). В $\mathfrak{P}_n$ существует максимальный элемент, т. е. элемент $P\in\mathfrak{P}_n$ с нормой $\|P\|=1$, для которого $B^*(P)=\|B^*\|$, причем это равенство верно для любой пары минимального B^* и максимального P.

В общем случае, когда B^* является расширением с сохранением нормы л. н. функционала $\widetilde{B}$, определенного в подпространстве $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{A}$ (не обязательно конечномерном), то по сравнению с любым другим расширением B, расширение B^* является минимальным в том смысле, что $\|B^*\|\leqslant\|B\|$ (B^* — «минимальное представление» $\widetilde{B}$).

В случае $\mathfrak{A}=l^p$, $p>1$ имеет место

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — замкнутое подпространство l_p, $p>1$. Если $\widetilde{b}$ — л. н. функционал, определенный в $\mathfrak{g}$, то существует единственный элемент $\Gamma=\{\Gamma_k\}\in\mathfrak{g}$ такой, что

$$\widetilde{b}(g)=\sum_{k=0}^\infty g_k\operatorname{sgn}\overline{\Gamma}_k\,|\,\Gamma_k\,|^{p-1};$$
$$\|\widetilde{b}\|=(\|\Gamma\|_l{}^p)^{p-1}$$

($\operatorname{sgn}0=0$, $\operatorname{sgn}z=e^{i\arg z}$). Если $\|\widetilde{b}\|=0$, то $\Gamma=0$; в противном случае $\Gamma=\|\widetilde{b}\|^{1/(p-1)}G$, где $G=\{G_k\}$ — максимальный элемент л. н. функционала $\widetilde{b}$.

Эта теорема обобщает одну теорему Ф. Рисса (Riesz F., Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913). В случае $\mathfrak{A}=l$ (т. е. $p=1$) имеет место

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — подпространство l и пусть л. н. функционал $\widetilde{b}$, определенный в $\mathfrak{g}$, имеет максимальный элемент $G=\{G_k\}$. Тогда существуют непустое множество K индексов и единственная последовательность $\{\eta_k\}$ ($k\in K$), где $|\,\eta_k\,|=\|\widetilde{b}\|$, такие, что каждое минимальное представление $\widetilde{b}$ во всем l имеет вид

$$\widetilde{b}(g)=\sum\nolimits_{k\in K} g_k\eta_k+\sum\nolimits_{k\notin K} g_k x_k^*,$$

причем $|\,x_k^*\,|\leqslant\|\widetilde{b}\|$.

Теорема 3. Для того чтобы л. н. функционал $b(g)=\sum_{k=0}^\infty g_k x_k$ ($g\in l$) имел в l максимальный элемент G, необходимо и достаточно, чтобы $\sup_k|\,x_k\,|=\|b\|$ достигался при некотором k.

В случае пространства c имеет место

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — подпространство c и пусть л. н. функционал $\widetilde{b}$ имеет в $\mathfrak{g}$ максимальный элемент G. Тогда все минимальные представления $\widetilde{b}(g)=\sum_{k=0}^\infty g_k x_k^*$ во всем c имеют одинаково направленные ядра $\{x_k^*\}$ (ядра $\{x_k^*\}$ и $\{\xi_k^*\}$ называются одинаково направленными, если $\arg x_k^*=\arg\xi_k^*$ при $x_k^*\neq 0$ и $\xi_k^*\neq 0$, и затем либо $x_k^*=\xi_k^*=0$, начиная с некоторого k, либо когда $x_k^*\neq 0$ и $\xi_k^*\neq 0$ для бесчисленного множества k, то $\lim\arg x_k^*=\lim\arg\xi_k\pmod{2\pi}$ при $k\to\infty$).

Теорема 5. Для того чтобы л. н. функционал $b(g)=\sum_{k=0}^\infty g_k x_k$ имел в c максимальный элемент $G=\{G_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $\{x_k\}$ было направлено (т. е. либо $x_k=0$, начиная с некоторого k, либо существует $\lim_{k\to\infty}\arg x_k=\varphi\pmod{2\pi}$).

Эти теоремы применяются к задаче отыскания минимального (по норме) решения конечной системы линейных уравнений $\sum_{k=0}^\infty a_{ik}x_k=C_i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$) с бесконечным числом неизвестных, где $\{a_{ik}\}$ является элементом одного из пространств l^p ($p\geqslant 1$) или c, а решение $\{x_k\}$ — элементом соответствующего сопряженного пространства.

Оказывается, если $p=1$, то существует индекс K такой, что у всех минимальных решений член x_K одинаковый, причем $|x_K|=\max_k|x_k|$. В пространстве c каждое минимальное решение направлено и все минимальные решения одинаково направлены.

В случае действительного пространства c существует индекс K такой, что начиная с $k>K$ у всех минимальных решений все x_k неотрицательны или все неположительны.

Примечание референта. Как доказано в работе референта (Матем сб. Киевск. ун-та, 1948, № 2), в последнем случае среди минимальных решений существует хотя бы одно такое, у которого не больше чем n членов x_k (где n — число уравнений) отлично от нуля. С. И. Зуховицкий

7455. Мажоранты в пространствах интегрируемых функций. Лоренц (Majorants in spaces of integrable functions. Lorentz G. G.), Amer. J. Math., 1955, 77, № 3, 484—492 (англ.)

Пусть $f(x)$ — интегрируемая на (0, 1) функция. Функция

$$\theta(x; f)=\sup_y\int_x^y f(t)\,(y-x)^{-1}\,dt$$

называется мажорантой Харди — Литлвуда. Множество X интегрируемых функций обладает свойством Харди — Литлвуда ($X\in HLP$), если из $f\in X$ следует $\theta(x; f)\in X$. В качестве множеств X рассматриваются пространства Кёте — Тёплица $X(C)$ (РЖМат, 1954, 4486). Предполагается, что множество C, определяющее пространство $X(C)$, равноизмеримо-инвариантно: вместе с каждой функцией $c(x)$ оно содержит все равноизмеримые (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, 207) с ней функции.

Пусть $\tilde{c}(x)=\int_x^1 c(t)\,t^{-1}dt$, а $X'(C)$ — дуальное к $X(C)$ пространство. Доказывается

Теорема 1. Если C равноизмеримо-инвариантно, то $X(C)\in HLP$ тогда и только тогда, когда для всех $c\in C$ будет $\|\tilde{c}\|_{X'}\leqslant A$, где A — некоторая постоянная.

Теорема 1 используется для установления необходимых и достаточных признаков того, что пространство Орлича L_Φ (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, 99), пространства $\Lambda(\varphi)$ и $M(\varphi)$ обладают свойством Харди—Литлвуда. Последние пространства определяются так: Пусть $\varphi(x)$ — убывающая положительная интегрируемая на (0, 1) функция, $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\,dt$ и пусть $\{\varphi_r(x)\}$ — множество равноизмеримых с $\varphi(x)$ функций. Пространство $\Lambda(\varphi)$ состоит из функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_\Lambda=\int_0^1\varphi(x)\,f^*(x)\,dx=\sup_r\int_0^1\varphi_r(x)\,|f(x)|\,dx<\infty,$$

где $f^*(x)$ — невозрастающая функция, равноизмеримая с $f(x)$. Пространство $M(\varphi)$ состоит из функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_M=\sup_a(1/\Phi(a))\int_0^a f^*(t)\,dt<\infty.$$

Пространство $M(\varphi)$ будет дуальным к пространству $\Lambda(\varphi)$. Доказываются теоремы:

Теорема 2. $\Lambda(\varphi)\in HLP$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}_{a\to 0}\Phi(2a)/\Phi(a)<2$.

Теорема 3. $M(\varphi)\in HLP$ тогда и только тогда, когда для некоторой постоянной A $\int_0^a\Phi(x)\,x^{-1}\,dx\leqslant A\Phi(a)$ $(0\leqslant a\leqslant 1)$.

Теорема 4. Пространство Орлича $L_\Phi\in HLP$ тогда и только тогда, когда дополнительная функция Ψ удовлетворяет условию $\Psi(2b)\leqslant M\Psi(b)$ $(b\geqslant b_0)$ при некоторых M и $b_0>0$.

Опечатки: в формуле (3) под знаком интеграла вместо функции $v(t)/t$ должно быть $c(t)/t$; в формуле (7) вместо $\|f\|$ должно быть $\|\bar{f}\|$. Я. Б. Рутицкий

7456. О дифференцировании нормы линейного оператора. Стейн, Пек (The differentiability of the norm of a linear operator. Stein P., Peck J. E. L.), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 4, 496—501 (англ.)

Вначале излагаются общие результаты для производной нормы в линейных пространствах. Доказывается, что если A — дифференцируемая по действительному аргументу t функция, то $|A|$ имеет левую и правую производные для любого t. Кроме того,

$$\overline{\lim}_{t\to t_0}\big||A|-|A_0|\big|/|t-t_0|\leqslant|A_0'|.$$

Если A — дифференцируемая несингулярная функция в нормированном кольце с единицей, то также

$$\overline{\lim}_{t\to t_0}\big||A^{-1}|^{-1}-|A_0^{-1}|^{-1}\big|/|t-t_0|\leqslant|A_0'|.$$

Отсюда выводится неравенство Островского для производной от нормы Фробениуса матрицы: $|d(\|A^{-1}\|^{-1})/dt|\leqslant\|dA/dt\|$.

Далее исследуется производная нормы линейного оператора в гильбертовом пространстве. Авторы доказывают существование левой и правой производных от $|A|^2$ и вычисляют их фактически. Дается приложение полученных результатов к вопросу дифференцирования матрицы. Э. С. Цитланадзе

7457. Об объеме гладких выпуклых тел в гильбертовом пространстве. Лорх (On the volume of smooth convex bodies in Hilbert space. Lorch E. R.), Math. Z., 1955, 61, № 4, 391—407 (англ.)

Обобщение предшествующих исследований автора (см., напр., РЖМат, 1955, 5298). Выпуклым телом в гильбертовом пространстве H автор называет совокупность $\mathfrak{K}$ элементов x, удовлетворяющих неравенству $\varphi(x)\leqslant 1$, где действительный функционал $\varphi(x)$ непрерывен, $\geqslant 0$, $\varphi(tx)=t\varphi(x)$ при $t\geqslant 0$. Вводится функционал $G(x)=[\varphi(x)]^r/r$ ($r>1$ фиксировано) и при любых y, $z\in$ H о функции $\psi(\alpha,\beta)=G(x+\alpha y+\beta z)$ действительных переменных α, β предполагается, что она дважды непрерывно дифференцируема; ее производные ψ_α, ψ_β, $\psi_{\alpha\alpha}$, $\psi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\beta\beta}$ при $\alpha=\beta=0$ обозначаются $G_y(x),\ldots,G_{zz}(x)$ (это построение и его использование для введения понятия кривизны поверхности $\varphi(x)=1$, мерой которой в точке $x\neq 0$ по направлению $y\neq 0$ служит $G_{yy}(x)$, см. в РЖМат, 1953, 807). Далее предполагается, что $0<G_{yy}(x)\leqslant M\|x\|^{r-2}\|y\|^2$, где $M>0$ не зависит от x, y. Тогда $G_{yz}(x)$ есть билинейный функционал от y, z и определяет x-семейство ограниченных самосопряженных операторов $\mathfrak{G}(x)$ с билинейной формой $(\mathfrak{G}(x)\,y,z)=G_{yz}(x)$, непрерывное относительно x по норме операторов $\|\mathfrak{G}(x)\|$ со свойствами: $\mathfrak{G}(tx)=t^{r-2}\mathfrak{G}(x)$ при $t>0$, $\|\mathfrak{G}(x)\|\leqslant K\|x\|^{r-2}$ (K — постоянная) и

$$\lim_{t\to 0}(t^{-1})[\mathfrak{G}(x+tz)-\mathfrak{G}(x)]\,y,z)=(r-2)\,(\mathfrak{G}(x)\,y,z).\quad(1)$$

При этом связь исходного функционала $G(x)$ с операторами $\mathfrak{G}(x)$ дается формулой

$$G(x)=(\mathfrak{G}(x)\,x,x)/r\,(r-1).\quad(2)$$

Обратно, семейство операторов $\mathfrak{G}(x)$ со всеми перечисленными свойствами определяет по формуле (2) не-

который функционал $G(x)$, для которого $G_{yz}(x) = (\mathfrak{S}(x)\,y, z)$. Ввиду этого построение объема выпуклого тела проводится в терминах семейства операторов $\mathfrak{S}(x)$ (и при этом для $r=2$), к указанным свойствам которого добавляются еще следующие: $(\mathfrak{S}(x)\,y, y) \geqslant L\|y\|^2$, где $L>0$ не зависит от x, y; $\mathfrak{S}(x) - I$ вполне непрерывны, со сходящимися рядами абсолютных величин собственных значений $\alpha_x^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$, причем сумма ряда непрерывна по x; наконец, если обозначить $x^* = \mathfrak{S}(x)\,x$ и ввести x^*-семейство операторов $\mathfrak{X}(x^*) = [\mathfrak{S}(x)]^{-1}$, то предполагается, что оно удовлетворяет условию (1) (где $r=2$), и доказывается, что оно тогда удовлетворяет всем остальным условиям, характеризующим семейство $\mathfrak{S}(x)$. Затем вводится тело $\mathfrak{R}^* = \{(\mathfrak{X}(x^*)\,x^*, x^*) \leqslant 1\}$, называемое сопряженным к телу $\mathfrak{R}$, и его-то объем (называемый объемом порядка $r=2$) и будет определяться по формуле

$$V_2(\mathfrak{R}^*) = \left[\int_\Omega \left\{\prod_{i=1}^{\infty}(1+\alpha_x^{(i)})\right\} d\Omega\right]^{1/2},$$

где Ω — единичная сфера в $\mathbf{H}$, а интеграл $\int_\Omega f(x)\,d\Omega$ понимается как функционал $l(f)$ в векторном полуупорядоченном пространстве $\mathbf{B}$ функций $f(x)$, заданных на Ω, причем $\mathbf{B}$ замкнуто относительно вращения сферы Ω, а функционал l нормирован, монотонен и полунепрерывен снизу относительно частичного порядка $\mathbf{B}$, а также инвариантен относительно вращений Ω.

Автор не приводит сколько-нибудь общих условий существования такого интеграла и ограничивается тривиальным примером эллипсоида $\mathfrak{R} = \{\Sigma_1^\infty x_n^2 / a_n^2 \leqslant 1\}$ в пространстве $\mathbf{H} = l^{(2)}$, когда $\mathfrak{R}^* = \{\Sigma_1^\infty a_n^2 x_n^2 \leqslant 1\}$, $\mathbf{B}$ состоит из одних констант $f(x) = C$, функционал l есть $l(f) = f$ и, следовательно, искомый объем порядка $r=2$ равен $V_2(\mathfrak{R}^*) = \Pi_1^\infty a_n^{-1}$. М. К. Фаге

7458. Векторнозначная мера и ограниченная вариация в пространстве Гильберта. Эдуардс (Vector-valued measure and bounded variation in Hilbert space. Edwards D. A.), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 90—96 (англ.)

Под векторнозначной мерой понимается определенная на кольце ограниченных борелевских множеств счетноаддитивная функция $Z(E)$ со значениями в вещественном пространстве Гильберта X. Если функция $z(t)$, определенная на числовой прямой со значениями в X, удовлетворяет условиям: 1) $z(0) = 0$, 2) $z(b) - z(a) = Z(E)$, где $E = (a, b]$, то α) для любого $y \in X$ функция $(z(t), y)$ имеет ограниченную вариацию на любом конечном интервале; β) $z(t)$ непрерывна справа в сильном смысле. Из работ И. М. Гельфанда следует, что и наоборот, если задана функция $z(t)$, удовлетворяющая условиям α) и β), то ей соответствует единственная удовлетворяющая условию 2) мера Z. Крамер показал, что если задана функция $z(t)$, удовлетворяющая условию β) и условию α') функция $\rho(t, s) = (z(t), z(s))$ имеет ограниченную вариацию в смысле Витали на любом ограниченном прямоугольнике, то ей также соответствует единственная удовлетворяющая условию 2) мера Z.

Автор показывает, что из условия α') следует условие α) и строит пример функции $z(t)$, определенной на $[0, 1]$, сильно непрерывной и удовлетворяющей условию α) на $[0, 1]$), но не удовлетворяющей условию α'). В. Г. Винокуров

7459. Потоки и неперестановочные проекционные операторы в гильбертовом пространстве. Браунелл (Flows and noncommuting projections on Hilbert space. Brownell F. H.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 1, 1—16 (англ.)

Рассматривается гильбертово пространство X, спектральная мера $E(A)$ ($\{A\}$ — класс борелевских множеств на R_1), семейство операторов $U_t = \int_{R_1} e^{it\lambda} dE(\lambda)$ ($u_t = U_t u_0$, где $u_0 \in X$, есть сильный предел лебеговских сумм) и проекционный оператор P в X. Исследуется поведение $\|Pu_t\|$ при $t \to \pm\infty$ (u_0 фиксировано) в случае, когда P и $E(A)$ не перестановочны.

Основной результат: Если функцию множества $(PE(A_1)\,u_0,\ E(A_2)\,u_0)$ распространить на класс J конечных соединений интервалов в R_2 и полученная функция множества γ счетноаддитивна и ограничена на J, то следующие три свойства вытекают одно из другого: a) $\lim_{T\to+\infty} T^{-1}\mu([0, T] \cap \{t;\ |\|Pu_t\|^2 - C| \geqslant \rho\}) = 0$ при любом $\rho > 0$ (μ — мера Лебега); b) аналогично a) с заменой $[0, T]$ на $[-T, 0]$; c) $\widetilde{\gamma}(\{s\}) = \gamma(D_s) = 0$ при $s \neq 0$ и $\widetilde{\gamma}(\{0\}) = \gamma(D_0) = C$, где $D_s = \{(x, y) \in R_2;\ x - y = s\}$ и $\widetilde{\gamma}(A) = \gamma(U_{s\in A} D_s)$. Рассматриваются примеры, когда γ не удовлетворяет приведенному условию. Д. А. Васильков

7460. О геометрии операторов проектирования в некоторых операторных алгебрах. Дай (On the geometry of projections in certain operator algebras. Dye H. A.), Ann. Math., 1955, **61**, № 1, 73—89 (англ.)

Изучается связь между алгебраическими $*$-изоморфизмами двух слабо замкнутых колец M, N операторов в гильбертовых пространствах и сохраняющими ортогональность соответствиями между множествами M_p, N_p всех операторов проектирования в M, N.

Основной результат: Пусть M_n, $n \geqslant 3$ — кольцо матриц n-го порядка над M, а θ — сохраняющее ортогональность взаимнооднозначное отображение $(M_n)_P$ на N_P. Тогда существует отображение φ кольца M_n на кольцо N, обладающее свойствами: 1) $\varphi = \theta$ на $(M_n)_P$; 2) φ есть прямая сумма $*$-изоморфизма и $*$-антиизоморфизма.

Применение этого результата к факторам приводит к следующей теореме: Пусть M, N — факторы не типа I_{2n}, M_U, N_U — группы всех унитарных операторов в M и N соответственно, φ — групповой изоморфизм M_U на N_U. Тогда существует линейный (или сопряженно линейный) $*$-изоморфизм Ψ кольца M на кольцо N такой, что $\varphi(U) = \lambda(U)\,\Psi(U)$ для всех $U \in M_U$, где U — (возможно разрывный) характер группы M_U.

Замеченные опечатки: 1) стр. 79, строка 5 сверху, напечатано $W^2 = -1$, следует читать $w^2 = -1$; 2) стр. 79, строка 6 сверху, напечатано $r^2 - v^2 = 1$, следует читать $r^2 - v^2 = -1$. М. А. Наймарк

7461. Автоморфизмы конечных факторов. Сингер (Automorphisms of finite factors. Singer I. M.), Amer. J. Math., 1955, **77**, № 1, 117—133 (англ.)

Рассматриваются факторы, которые строятся по недискретному сепарабельному пространству X с мерой μ и счетной группе $\mathfrak{G}$ сохраняющих меру преобразований в X. При этом предполагается, что: a) $\mu(X) = 1$; б) если E — измеримое подмножество в X и $\mu(E) \neq 0, g \neq e$, то существует измеримое множество $F \subset E$ такое, что $\mu(F) \neq 0$ и $\mu(F \Delta Fg) \neq 0$ (Δ означает симметричную разность множеств); в) $\mathfrak{G}$ эргодична на X, т. е, если для измеримого $E \subset X$ $\mu(E \Delta Eg) = 0$ для всех $g \in \mathfrak{G}$, то $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$.

Пусть $\mathfrak{H} = L_2(X \times \mathfrak{G})$, где мера в $X \times \mathfrak{G}$ есть произведение меры μ и меры Хара на $\mathfrak{G}$, и пусть B — совокупность всех функций $\xi(g, x) \in L_2(X \times \mathfrak{G})$, отличных от нуля лишь для конечного числа элементов $g \in \mathfrak{G}$ и являющихся существенно ограниченными μ-измеримыми функциями от x при каждом из этих $g \in \mathfrak{G}$. Тогда произведение $\eta\xi$, где $\eta \in \mathfrak{H}$, $\xi \in B$, определяется как свертка

$\eta\xi(g,x)=\Sigma_{h\in\mathfrak{G}}\eta(h,x)\xi(gh^{-1},xh^{-1})$. Аналогично определяется $\xi\eta$. Если при этом $\|\eta\xi\|\leqslant K\|\xi\|$ для всех $\xi\in B$, то операция умножения на η продолжается до ограниченного линейного оператора L_η в $\mathfrak{H}$, причем $L_{\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2}=\alpha_1L_{\eta_1}+\alpha_2L_{\eta_2}$, $L_{\eta_1\eta_2}=L_{\eta_1}L_{\eta_2}$, $(L_\eta)^*=L_{\eta^*}$, где $\eta^*(g,x)=\overline{\eta(g^{-1},xg^{-1})}$, и совокупность L всех таких L_η есть фактор конечного класса в $\mathfrak{H}$. Аналогично строится фактор R, состоящий из всех ограниченных операторов R_η, определенных условием $R_\eta\xi=\xi\eta$ для всех $\xi\in B$. Таким образом, факторы L, R являются совокупностями ограниченных операторов левого и правого умножений в H-системе $\mathfrak{H}=L_2(X\times\mathfrak{G})$ с частично определенным в ней произведением $\xi\eta$. В этой H-системе есть максимальное коммутативное подкольцо $\mathfrak{A}=\{\xi\in\mathfrak{H};\ \xi(g,x)=0$ при $g\neq e\}$. Изучается группа $\mathfrak{S}$ всех тех автоморфизмов H-системы $\mathfrak{H}$, которые отображают $\mathfrak{A}$ в себя. Каждый автоморфизм $S\in\mathfrak{S}$, рассматриваемый только на $\mathfrak{A}$, порождает некоторое сохраняющее меру отображение S' пространства X. Изучаются образ $\mathfrak{S}'$ группы $\mathfrak{S}$ при гомоморфизме $S\to S'$ и ядро $\mathfrak{R}$ этого гомоморфизма. При этом используется представление ограниченных операторов T в $\mathfrak{H}$ в виде матрицы $T=\|T_{gh}\|$, $g,h\in\mathfrak{G}$, ограниченных операторов в $L^2(X)$.

Основные результаты:

1. $S\in\mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $S_{gh}=0$, если $g\neq h$, и S_{gg} — оператор умножения на существенно ограниченную измеримую функцию $s_g(x)$, удовлетворяющую условиям: а) $|s_g(x)|=1$, б) $s_{hg}(x)=s_h(xg^{-1})s_g(x)$ почти всюду.

2. $\mathfrak{S}$ есть полупрямое произведение $\mathfrak{R}$ и подгруппы $\mathfrak{S}_1$ всех $S_1\in\mathfrak{S}$, переводящих функции $u_g=u_g(h,x)=0$ при $h\neq g$ и 1 при $h=g$ в $\tau_g(h,x)$, являющиеся при любом $g\in\mathfrak{G}$ характеристическими функциями множества.

3. Если $\mathfrak{I}$ — совокупность всех внутренних автоморфизмов в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{I}\cap\mathfrak{R}$ есть совокупность всех $S\in\mathfrak{R}$, для которых $S_g(x)=a(x)a(xg^{-1})$ при некоторой измеримой $a(x)$, удовлетворяющей условию $|a(x)|=1$.

4. Если X — бикомпактная сепарабельная абелева группа, μ — мера Хара на X, $\mathfrak{G}$ — группа всех правых сдвигов $x\to xx_0^{-1}$, $x_0\in X$, а χ_0 — элемент бесконечного порядка группы характеров X^* группы X, то χ_0 порождает внешний автоморфизм H-системы $\mathfrak{H}$. Если, в частности, X связна, то $\mathfrak{H}/\mathfrak{I}$ содержит подгруппу, изоморфную группе X^*. Для случая, когда X есть группа вращений окружности, дается построение некоторого конкретного класса внешних автоморфизмов $\mathfrak{H}$.

5. Если $\mathfrak{G}_1$ — нормальный делитель группы $\mathfrak{G}$ такой, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ не абелева, а $\mathfrak{G}_1$ эргодичен на X, то при $\mathfrak{H}_1=[\eta\in\mathfrak{H};\ \eta(g,x)=0$ при $g\notin\mathfrak{G}_1]$ совокупность всех элементов $\eta\in\mathfrak{H}$, оставляемых на месте группой $\mathfrak{R}_1=[S\in\mathfrak{R},\ S\eta=\eta$ для всех $\eta\in\mathfrak{H}_1]$, шире чем $\mathfrak{H}_1$.

Если, в частности, $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ совпадает со своим коммутатором, то $\mathfrak{R}_1$ состоит только из единичного элемента.

В заключение даются условия, при которых сохраняющее меру отображение S' есть образ при гомоморфизме $S\to S'$ некоторого автоморфизма $S\in\mathfrak{S}_1$, а также указывается на различные возможные обобщения полученных результатов. М. А. Наймарк

7462. Изоморфизмы факторов бесконечного типа. Кейдисон (Isomorphisms of factors of infinite type. Kadison R. V.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 3, 322—327 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — фактор типа II_∞ с функцией размерности D и коммутантом $\mathfrak{M}'$ типа II_1. Пусть E — фиксированный конечный отличный от нуля проекционный оператор в $\mathfrak{M}$. Тогда отображение, переводящее каждый $*$-автоморфизм φ фактора $\mathfrak{M}$ в $D[\varphi(E)]/D(E)$, является гомоморфным отображением группы $*$-автоморфизмов фактора $\mathfrak{M}$ на основную группу $\mathfrak{M}$ (группу значений размерности). Ядро $\mathfrak{U}$ этого гомоморфизма состоит из $*$-автоморфизмов φ, которые осуществляются при помощи унитарных преобразований соответствующего гильбертова пространства. Существуют факторы типа II_∞ с коммутантом типа II_1, допускающие автоморфизмы, не индуцированные унитарными преобразованиями гильбертова пространства. Рассматриваются также вопросы, связанные с $*$-изоморфизмом между двумя факторами типа II_∞, имеющими коммутанты типа II_1. Устанавливаются условия, при которых такие изоморфизмы осуществляются при помощи унитарных отображений соответствующих гильбертовых пространств. Н. Я. Виленкин

7463. Замечание к теореме Вулфсона. Хейдер (A note on a theorem of K. G. Wolfson. Heider L. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 305—308 (англ.)

Устанавливается следующее необходимое и достаточное условие того, что алгебра $C(X)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на компакте X изоморфна (с сохранением нормы и перехода к комплексному сопряжению) алгебре всех функций на (абстрактном) множестве $\overline{X_0}$: компакт X содержит плотное множество X_0 изолированных точек и каждое подмножество $X_1\subset X_0$ содержится в открыто-замкнутом подмножестве $X_2\subset X$, не содержащем остальных точек X_0. Эквивалентное условие формулируется в терминах минимальных проекций (идемпотентов). Г. Е. Шилов

7464. Дифференцирования в коммутативных нормированных алгебрах. Сингер, Уэрмер (Derivations on commutative normed algebras. Singer I. M., Wermer J.), Math. Ann., 1955, 129, № 3, 260—264 (англ.)

Дифференцированием в алгебре $\mathfrak{A}$ называется линейное преобразование, удовлетворяющее условию $D(ab)=D(a)b+aD(b)$. Ограниченное дифференцирование в коммутативной банаховой алгебре отображает ее в радикал; в частности, в полупростой коммутативной банаховой алгебре нет ненулевого ограниченного дифференцирования. Условие ограниченности, возможно, излишне.

Следствия: 1. Если коммутатор $ab-ba$ ограниченных линейных операторов a, b в банаховом пространстве аппроксимируем по норме полиномами от a и 1, то он имеет нулевой спектр (обобщение теоремы Виландта).

2. Алгебра C^∞ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке не нормируема (теорема Шилова).

3. Если коммутатор $AB-BA$ ограниченных линейных операторов A, B в гильбертовом пространстве перестановочен с ними, то он имеет нулевой спектр (теорема Патнама).

Рассматриваются также дифференцирования D на $\mathfrak{A}$, для которых $D(x)$ принадлежит алгебре $\mathfrak{A}'\supset\mathfrak{A}$. Д. А. Райков

7465. Периодические отображения в банаховых алгебрах. Юд (Periodic mappings on Banach algebras. Yood Bertram), Amer. J. Math., 1955, 77, № 1, 17—28 (англ.)

Рассматриваются автоморфизмы и антиавтоморфизмы T полного нормированного вещественного кольца B (вещественной банаховой алгебры, в терминологии автора) конечного периода n, так что n — наименьшее натуральное число, для которого $Tn=1$; частным случаем таких отображений является инволюция, которая есть антиавтоморфизм периода 2.

Для изучения автоморфизмов T используется введенное Рикартом (Rickart C. E., Ann. Math., 1950, 51, 615—628) понятие отделяющего идеала двух норм (отделяющим идеалом S двух норм $|x|$ и $|x|_1$ называется совокупность всех элементов $s \in B$, для которых существует $\{x_n \in B\}$ такая, что $\|s - x_n\| \to 0$ и $\|x_n\|_1 \to 0$; эта совокупность есть двусторонний идеал в B, замкнутый по отношению каждой из норм $\|x\|$, $\|x\|_1$.

Доказывается, что если S_1 — отделяющий идеал отделяющего идеала S по отношению к одним и тем же нормам $\|x\|$ и $\|x\|_1$, то: а) $x_1 x_2 \in S_1$ при $x_1, x_2 \in S$; б) S_1 — двусторонний идеал в B; в) S_1 не содержится ни в каком собственном регулярном (одностороннем или двусторонием) идеале в S; г) либо обе нормы $\|x\|$, $\|x\|_1$ эквивалентны, либо S есть радикальная алгебра в смысле Брауна и Мак-Койя; д) если обе эти нормы эквивалентны, то S — нулевая алгебра (т. е. $x_1 x_2 = 0$ при $x_1, x_2 \in S$). Эта теорема применяется далее к исходной норме $\|x\|$ и норме $\|x\|_1 = \|Tx\|$, причем важную роль играют множества $H_1 = \{x \in B; Tx = x\}$, $K_1 = \{x \in B; x + Tx + \cdots + T^{n-1}x = 0\}$ и аналогичные множества H_p, K_p для T^p вместо T.

Основные результаты:

1. Если $S \subset H_1$, то H_1 замкнуто и S есть нулевая алгебра.

2. Если H_1 замкнуто и T непрерывно на K_1, то $S \subset H_1$.

Пусть B — полупростая алгебра. Тогда имеют место утверждения 3—6:

3. Если период T равен 2^m и $S \subset K_1$, то T непрерывно.

4. Если непрерывен всякий автоморфизм и антиавтоморфизм периода 2 на всякой замкнутой подалгебре B_1, для которой существует непрерывный оператор проектирования B на B_1, то непрерывен также всякий автоморфизм и антиавтоморфизм T алгебры B периода 2^m, $m = 1, 2, \ldots$ Если, кроме того, всякий автоморфизм на B фиксированного нечетного периода k непрерывен, то на B непрерывен также всякий автоморфизм и антиавтоморфизм периода $2^m k$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

5. Если для отображения T периода 3 выполняется условие $S \subset K_1$, то T непрерывно.

6. Пусть для отображения T периода 2 из $x_k \to x$, $x_k \in H_1$ и $\rho(x_k) \to 0$ (где $\rho(x)$ — спектральный радиус элемента x, т. е. $\sup |\alpha|$, где α пробегает спектр элемента x) следует $x = 0$. Тогда всякий автоморфизм или антиавтоморфизм U в B такой, что $U^{2^n} = T$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), непрерывен. М. А. Наймарк

7466. Теория аналитических функций в банаховых алгебрах. Блум (A theory of analytic functions in Banach algebras. Blum E. K.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 2, 343—370 (англ.)

Пусть B — коммутативная нормированная алгебра с единицей, G — множество ее регулярных элементов (имеющих обратные) и S — множество ее сингулярных элементов (не имеющих обратных). Рассматриваются аналитические функции в смысле Лорха (Lorch E. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 414—425). Именно, функция $f(z)$ с областью определения и областью значений в алгебре B называется дифференцируемой в точке $z_0 \in B$, если существует элемент $f'(z_0) \in B$ такой, что при любом $\varepsilon > 0$ и $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| < \varepsilon |z - z_0|.$$

Функция $f(z)$ называется аналитической в области $E \subset B$, если она дифференцируема в каждой точке $z_0 \in E$.

Для аналитических функций справедлив следующий аналог теоремы Коши: Если (спрямляемый) замкнутый контур $K \subset E$ можно в пределах области E непрерывно стянуть в точку, то $\int_K f(z)\, dz = 0$ (Лорх это доказал для случая выпуклой области E). Формула Коши устанавливается в следующих предположениях: выбираются шар $V(z_0, \rho)$ (т. е. шар радиуса ρ с центром в z_0), целиком лежащий в области E, и регулярный элемент g_0, $|g_0| < \rho/2$; тогда для всех $z \in V(z_0, |g_0^{-1}|^{-1}/4)$ имеет место равенство

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_K (x - z)^{-1} f(x)\, dx, \qquad (1)$$

где K означает замкнутый контур $x = z_0 + g_0 e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Формула Коши (1), как обычно, приводит к разложению функции $f(z)$ в степенной ряд $\Sigma_0^\infty a_n (z - z_0)^n$, $a_n \in B$. Область его сходимости — наибольший шар с центром в точке z_0, содержащийся в области аналитичности функции $f(z)$.

Рядом Лорана называется ряд вида $\Sigma_{-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$, где $b_n \in B$, $z - z_0 \in G$. Этот ряд может сходиться в различных областях. Следующая теорема является основной: Пусть $g_0 \in G$, $F = \{z_0 + \lambda g_0\}$, $0 \leqslant r_1 < |\lambda| < r_2$, и $U = \bigcup_{r_1 < |\lambda| < r_2} V(z_0 + \lambda g_0, \mu_\lambda |g_0^{-1}|^{-1})$, где $\mu_\lambda = \min(r_2 - |\lambda|, |\lambda| - r_1)$; пусть далее функция $f(z)$ аналитична в области E, $F \subset E \subset U$; тогда для каждого $z \in U$ можно указать пару кривых $K_j(z) = \{x = z_0 + \rho_j e^{i\theta} g_0\}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $r_1 < \rho_j < r_2$, $j = 1, 2$, так, что функция

$$\varphi(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{K_2(z)} (x - z)^{-1} f(x)\, dx - (2\pi i)^{-1} \int_{K_1(z)} (x - z)^{-1} f(x)\, dx$$

однозначная аналитическая функция от z, имеющая сходящийся в U ряд Лорана $\Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ с $a_n = (2\pi i)^{-1} \int_K (x - z_0)^{-n-1} f(x)\, dx$, где $K = \{x = z_0 + re^{i\theta} g_0\}$, $r_1 < r < r_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; в области E $\varphi(z) = f(z)$. Изолированные особые точки классифицируются, как обычно, по виду главной части ряда Лорана. Классическая теорема о поведении функции в окрестности полюса сохраняется; теорема о поведении функции в окрестности существенно особой точки не сохраняется: в частности, приводится пример, когда $f(z) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ при $z \to 0$ имеет предельные значения только специального вида (из фиксированного максимального идеала).

Изучаются корни полинома $p(z) = \Sigma_0^n a_k z^k$ с коэффициентами из алгебры B и особенности рациональной функции $1/p(z)$. В частности, для многочлена $p(z)$, у которого оба множества $\{p(z) \in G\}$ и $\{p(z) \in S\}$ не пусты, устанавливается, что все особенности $1/p(z)$ суть полюсы, причем порядка не выше степени полинома $p(z)$, если алгебра B без радикала. Г. Е. Шилов

7467. О функциональных множителях. Эдуардс (On factor functions. Edwards R. E.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 3, 367—378 (англ.)

Проблема множителей ставится в следующем общем виде. Пусть G — локально компактная коммутативная группа, E и F — линейные топологические пространства функций, мер или распределений на G, для которых определено преобразование Фурье $f \to \hat{f}$. Функция φ, заданная на двойственной группе $\hat{G}$, называется множителем класса (E, F), если для любой $f \in E$ существует такая $g = u(f) \in F$, что $\varphi \cdot \hat{f} = \hat{g}$. Отыскание множителей сводится к нахождению тех линейных непрерывных отображений u пространства E в F, которые переста-

новочны с переносами по независимому переменному. Множество всех таких отображений обозначается $L_t(E, F)$ (под переносом t_a $(a \in G)$ понимается операция, определяемая соотношением $t_a f(x) = f(x+a)$). Доказываются четыре теоремы об общем представлении отображений класса $L_t(E, F)$ при различных конкретных заданиях пространств E и F. Приведем первую из них: При $1 \leqslant p \leqslant \infty$ общий вид отображений u класса $L_t(L^1, L^p)$ дается формулой $u(f) = u*\ f = \int_G (t_{-x} f) d\mu(x)$, где при $p = 1$ μ — ограниченная мера Радона на G, а при $p > 1$ $\mu \in L^p$. Б. З. Вулих

7468. О группах ортонормальных функций. I, II. Файн (On groups of orthonormal functions (I), (II). Fine N. J.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 1, 51—59, 61—65 (англ.)

Пусть Ω — абстрактное пространство с мерой m, определенной на σ-кольце J, и $F = \{f_\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ — семейство комплексных функций на Ω таких, что $\int_\Omega f_\alpha \bar{f}_\beta dm = \delta_{\alpha\beta}$, $f_\alpha \bar{f}_\beta \in F$. Тогда существуют единственная абелева группа H со второй аксиомой счетности и отображение T в H, определенное почти всюду на Ω, такие, что 1) внешняя ν-мера $Z = T(\Omega)$ равна 1 и Z всюду плотно в H (ν—мера Хара, $\nu(H) = 1$); 2) для каждого ν-измеримого множества $M \subset H$ $T^{-1}(M) \in J$ и $m(T^{-1}(M)) = \nu(M)$; 3) функции $f_\alpha T^{-1}$ однозначны на Z и могут быть распространены до характеров H. Отображение T является отображением на всю группу H тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{\omega_n\} \in \Omega$ такой, что $f_\alpha(\omega_n) \to \nu_\alpha$, существует $\omega \in \Omega$ такое, что $f_\alpha(\omega) = \nu_\alpha$. T взаимно однозначно с точностью до множества меры нуль тогда и только тогда, когда для почти всех $\omega \in \Omega$ из $f_\alpha(\omega') = f_\alpha(\omega)$, $\alpha \geqslant 0$ следует $\omega' = \omega$. При тех же условиях функции $f_1, \ldots, f_n$ статистически независимы, если они не удовлетворяют никаким соотношениям вида $f_1^{m_1} f_2^{m_2} \ldots f_n^{m_n} = 1$, за исключением соотношений, следующих из соотношений вида $f_k^{n_k} = 1$. Для любого множества функций $f_1, \ldots, f_n$ существуют статистически независимые функции $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}$ такие, что почти всюду $f_\alpha = \prod_j^{c_\alpha} f_j$ матрица $\| c_{\alpha_j} \|$ имеет целые элементы и определитель $| \| c_{\alpha_j} \| |$ равен 1. Если G — счетная абелева группа, то на отрезке $[0,1]$ существует ортонормированная совокупность функций F, образующая по умножению группу, изоморфную G. Если G бесконечна, то F полна в $L^2(0,1)$. Последние результаты принадлежат Хару и были с помощью теории характеров доказаны Фрейденталем (Freudenthal H., Compositio math., 1938, 5, 354—357), что автору, очевидно, не известно.

Н. Я. Виленкин

7469. Неявные функции и решения уравнений на группах. Бартл (Implicit functions and solutions of equations in groups. Bartle Robert G.), Math. Z., 1955, 62, № 4, 335—346 (англ.)

Пусть $\mathfrak{X}$ — топологическая группа, в которой групповая операция записана в аддитивной форме, хотя она не предполагается абелевой. Топология в $\mathfrak{X}$ задается при помощи инвариантной справа метрической функции d:

$$d(x_1, x_2) = d(x_1 + x_3, x_2 + x_3),\ x_i \in \mathfrak{X}.$$

$\mathfrak{X}$ предполагается полной в этой метрике. Для таких групп используется обычная терминология линейных метрических пространств. Открытый шар $S(x_0, r) = \{x \in \mathfrak{X} : \| x - x_0 \| < r\}$, где $\| x \| = d(x, 0)$. Непрерывная функция f, заданная на $\mathfrak{X}_0 \subseteq \mathfrak{X}$, со значениями в $\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y}$ — группа того же вида, что и $\mathfrak{X}$, называется гладкой в точке x_0, если существуют положительные числа α и β такие, что если $0 < \| f(x) - f(x_0) \| < \beta$, то существует по меньшей мере одна точка $x \in \mathfrak{X}_0$ с $\| x - x_0 \| \leqslant \alpha \| y - y_0 \|$. Понятие производной от f вводится обычным образом и используется запись $f'(x_0)(u) = f'(x_0 | u)$; $x, u \in \mathfrak{X}$. Функция $f \in C'(\mathfrak{X}_0)$, если $\mathfrak{X}_0$ открыто в $\mathfrak{X}$, причем f имеет производную в каждой точке $x \in \mathfrak{X}_0$, удовлетворяющую условию: каждым $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ и $\varepsilon > 0$ соответствует число $\pi = \pi(x_0, \varepsilon)$ такое, что если $x_1, x_2 \in S(x_0, \pi)$, то

$$\| f'(x_1 | u) - f'(x_0 | u) \| < \varepsilon \| u \|,\ u \in \mathfrak{X},$$

$$\| f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0 | x_1 - x_2) \| < \varepsilon \| x_1 - x_2 \|.$$

Если $f \in C'(\mathfrak{X}_0)$ и в любой точке $x_0 \in \mathfrak{X}_0$ $f'(x_0)$ является гладкой, то $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$. Пусть $\mathfrak{Z}$ — группа с инвариантной справа метрикой (возможно, неполная) и $\mathfrak{Z}_0$ открыто в $\mathfrak{Z}$. Пусть $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Z}$ — прямое произведение с очевидной алгебраической операцией и с нормой $\| [x, z] \| = \min(\| x \|, \| z \|)$. Рассматривается функция F из $\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Z}_0$ в $\mathfrak{Y}$, для которой имеет смысл $F'(x_0, z_0)$. По определению, частная производная от F по x в точке (x_0, z_0) есть гомоморфизм из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$ и определяется равенством $F'_x(x_0, z_0 | u) \equiv F'(x_0, z_0 | u, 0)$.

Основными предложениями являются следующие теоремы:

Теорема 2.7. Пусть $F \in C'(\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{Z}_0)$ со значениями $\mathfrak{Y}$, $F(x_0, z_0) = 0$ и $F'_x(x_0, z_0)$ является гладкой. Тогда существуют постоянные p_1 и p_2 такие, что если $z \in S(z_0, p_2)$, то существует по меньшей мере одно решение уравнения $F(x, z) = 0$, принадлежащее $S(x_0, p_1)$. Далее, если F'_x — изоморфизм, то имеется однозначная непрерывная функция f, определенная в некоторой окрестности z_0, со значениями, принадлежащими некоторой окрестности $x_0 = f(z_0)$, такая, что для всех z окрестности z_0 будет $F(f(z), z) = 0$.

Теорема 3.1. Пусть $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{X}_0)$, где $\mathfrak{X}_0$ открыто в $\mathfrak{X}$, и $y_0 = f(x)$ имеет k различных решений $x_1, \ldots, x_k$ в $\mathfrak{X}_0$. Тогда существуют положительные числа α и p_0 такие, что шары $S(x_i, 2\alpha p_0)$, $i = 1, \ldots, k$, не пересекаются и что, если $\| y - y_0 \| < p \leqslant p_0$, то уравнение $y = f(x)$ имеет по меньшей мере одно решение в каждом шаре $S(x_i, 2\alpha p)$. Даны достаточные условия того, что если уравнение $y_0 = f(x)$ имеет k решений и если y_1 близко к y_0, то и уравнение $y_1 = f(x)$ имеет точно k решений, или, если первое имеет континуум решений, то и второе имеет континуум решений. Указаны достаточные условия того, что f^{-1} есть k-значная функция, каждая ветвь которой непрерывна. Изучена связь между гладкостью функции и открытостью отображения, даваемого ею. Библ. 17 назв. М. М. Вайнберг

7470. Несколько задач теории почти периодических функций. Хелгасон (Some problems in the theory of almost periodic functions. Helgason Sigurdur), Math. scand., 1955, 3, № 1, 49—67 (англ.)

Решаются некоторые задачи в теории почти периодических (п. п.) функций, определенных в абелевой топологической группе G.

Дается краткий очерк основных определений и свойств п. п. комплекснозначных функций $x(t)$, где $t \in G$. Групповая операция над t определяется в мультипликативных обозначениях. Множество функций $x(t)$ образует пространство Банаха A с нормой $\| x \| = \sup_{t \in G} | x(t) |$ и соответствующую алгебру, если за операцию умножения принять свертывание.

Основные теоремы строятся с точки зрения теории идеалов. Почти периодичность $x(t)$ определяется (как обычно, на группе) по Бохнеру, т. е. множество (смещений) $H\{x(ht)\}$ $(h \in G)$ компактно. Рассматривается класс п. п. функций специального вида $\chi(t)$, называемых характерами группы G. Они удовлетворяют следующим условиям: $\chi(e) = 1$ (e — единичный элемент в G), $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$, $|\chi(t)| = 1$. В A рассматривается линейный функционал $\mathfrak{M}_t\{x(t)\}$, называемый средним значением.

Операция умножения (свертывания) дается формулой

$$x*y(t) = \mathfrak{M}_s\{x(ts^{-1})\overline{y(s)}\}.$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in A$ найдется $y \in A$ такое, что $\|(x*y) - x\| < \varepsilon$. Вводятся коэффициенты Фурье для данной функции $x(t)$: $a_n = \mathfrak{M}_t\{x(t)\overline{\chi_n(t)}\}$, и строится ряд Фурье $x(t) \sim \Sigma_n a_n\chi_n(t)$. Семейство I_S всех п. п. функций $x(t) \in A$ таких, что $a_n \neq 0$, если $\chi_n \in S$, оказывается идеалом. Решаются три основные задачи, составляющие оригинальную часть статьи.

1. Отыскиваются такие комплекснозначные функции $q(\chi)$ в G^* (где G^* есть группа характеров), что какова бы ни была п. п. функция $x(t) = \Sigma_n a_n\chi_n(t)$ ряд $\Sigma_n a_n q(\chi_n)\chi_n(t)$ также изображает п. п. функцию. Доказывается, что $q(\chi) = p_1(\chi) - p_2(\chi) + ip_3(\chi) - ip_4(\chi)$, где p_i — положительно определенные функции в G^*, т. е. $\Sigma_{i,j=1}^{n} p(t_i t_j^{-1})\alpha_i\overline{\alpha}_j \geqslant 0$, где $t_1, \ldots, t_n \in G^*$, а α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$—комплекснозначные числа.

2. Отыскивается такое множество $S \subset G^*$, что всякой п. п. функции $z(t) = \Sigma_{\chi_n \in G^*} a_n\chi_n(t)$ соответствует $z_S(t) = \Sigma_{\chi_n \in S} a_n\chi_n(t)$.

Доказывается, что S должно быть таким, чтобы его характеристическая функция $\varphi_S(\chi)$ равнялась $q(\chi)$, где последняя имеет тот же смысл, что и в задаче 1.

3. Отыскиваются допустимые перестановки σ в группе $\overline{G^*}$, т. е. такие, что всякий ряд Фурье $\Sigma_{\chi \in G^*} a_n\chi_n(t)$ п. п. функции переходит соответственно в ряды Фурье $\Sigma_{\chi \in G^*} a_n\sigma(\chi_n)(t)$ и $\Sigma_{\chi \in G^*} a_n\sigma^{-1}(\chi_n)(t)$ для каких-то других п. п функций. Такой перестановке соответствует некоторый автоморфизм T_σ в пространстве A, который удовлетворяет условиям: $T_\sigma(\alpha x + \beta y) = \alpha T_\sigma(x) + \beta T_\sigma(y)$, $T_\sigma(x*y) = T_\sigma(x)*T_\sigma(y)$, $x, y \in A$, α, β — комплексные числа.

Устанавливается необходимое и достаточное условие допустимости перестановки $\sigma[\sigma(1) = 1]$, а именно:

$$\sup \|\|1 + \textstyle\sum_\nu a_\nu\sigma(\chi_\nu)(t)\|/\|1 + \sum_\nu a_\nu\chi_\nu(t)\|\| < \infty,$$

когда a_ν, χ_ν пробегают всевозможные значения в каждом ряде Фурье (для каждой п. п. функции).

А. С. Кованько

7471. Функции, периодические в среднем. Ч. I. Многообразия, у которых аннулирующие идеалы являются главными. Эренпрейс (Mean periodic functions. Part I. Varieties whose annihilator ideals are principal. Ehrenpreis Leon), Amer. J. Math., 1955, 77, № 2, 293—328 (англ.)

Пусть C — евклидово пространство n комплексных переменных, H — пространство всех целых функций над C, в котором топология задается равномерной сходимостью на каждом компактном множестве пространства C; H' — пространство линейных функционалов над H, в котором топология задается равномерной сходимостью на ограниченных множествах пространства H.

Согласно Шварцу (Schwartz L., Ann. Math., 1947, 48, 857—929), функция $f \in H$ называется периодической в среднем, если линейные комбинации ее сдвигов $\tau_z f = f(x + z)$ $(x, z \in C)$ не плотны в H. Чтобы f была периодической в среднем, необходимо и достаточно, чтобы существовал функционал $S \in H'$ такой, что $S*f = S(\tau_{-z}f) = 0$.

Рассматриваются так называемые многообразия (varieties): непустые множества $W \subset H$, отличные от $\{0\}$, замкнутые по отношению к сдвигам, линейным комбинациям и топологии, заданной в H. Примером может служить замыкание множества линейных комбинаций всех сдвигов некоторой периодической в среднем функции f.

Под аннулирующим идеалом W' множества W понимается совокупность всех таких $S \in H'$, что $S * f = 0$ для любой $f \in W$ (W' — замкнутый идеал по отношению к операции свертки $(S * T)f = S(T * f)$).

Доказывается теорема: Пусть W — многообразие, аннулирующий идеал которого является главным. Тогда W содержит экспоненциальный полином (т. е. линейную комбинацию произведений экспоненциалов на мономиалы). Более того, W полностью определяется своими экспоненциальными полиномами: каждая функция $f \in W$ является пределом экспоненциальных полиномов из W.

Показывается, что аналогичные результаты имеют место, если вместо H рассматривать некоторые другие пространства целых функций, например функций экспоненциального типа.

Случай $n = 1$ был исследован Шварцем (см. приведенную выше ссылку). Г. Н. Золотарев

7472. Полугруппы операторов. Филлипс (Semigroups of operators. Phillips R. S.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, 61, № 1, 16—33 (англ.)

Обзор важнейших результатов теории однопараметрических полугрупп операторов, полученных Хилле, Феллером, Миядера и автором после выхода в свет (в 1948 г.) монографии Хилле (русский перевод: Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., Изд-во ин. лит., 1951). Библ. 21 назв. Д. А. Васильков

7473. Замечания об объемах и мерах в локально бикомпактных пространствах. Хаупт, Пок (Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen. Haupt Otto, Pauc Christian Y.), Abhandl. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1955, № 7, 189—218 (нем.)

Пусть R — локально бикомпактное топологическое пространство. Объемом $i|\mathfrak{p}$ называется неотрицательная аддитивная функция i, определенная на булевом кольце $\mathfrak{p}$ подмножеств пространства R. Если $\mathfrak{p}$ и i счетно аддитивны, то объем $i|\mathfrak{p}$ называется мерой. Объем $i|\mathfrak{p}$ называется адаптированным, если: 1) он конечен; 2) всякое множество $M \in \mathfrak{p}$ имеет бикомпактное замыкание; 3) граница всякого множества $M \in \mathfrak{p}$ принадлежит к $\mathfrak{p}$ и, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, может быть заключена в открытое множество $O \in \mathfrak{p}$ с $i(O) < \varepsilon$; 4) $\mathfrak{p}$ содержит некоторый базис пространства R. Из этого определения следует, что i есть счетно аддитивная функция на $\mathfrak{p}$. Адаптированные объемы рассматриваются как естественное обобщение классического объема Жордана. В работе изучаются расширения таких объемов, причем главный интерес для авторов представляют пространства, не удовлетворяющие аксиомам счетности.

При помощи классических конструкций строится целый ряд мер, служащих последовательными расширениями заданного адаптированного объема. Первое из этих расширений является минимальным, последнее получается методом Каратеодори. Если R обладает

счетной базой, то последнее расширение совпадает с пополнением первого.

Определения и результаты работы сопоставляются с другими изложениями, имеющимися в литературе.

В. А. Рохлин

7474. Об измеримых отображениях в пространстве с конечной мерой. **Даукер** (On measurable transformations in finite measure spaces. Dowker Yael Naim), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 504—516 (англ.)

Пусть (S, m) — пространство с мерой, $m(S)=1$, и T — невырожденное измеримое отображение S на себя. Изучаются условия, при которых существует мера на S, инвариантная относительно T и эквивалентная m. Справедлива следующая теорема: Для того чтобы существовала конечная инвариантная мера μ, эквивалентная m, необходимо и достаточно, чтобы для любого измеримого $A \subset m(A)>0$ выполнялось условие: $\varlimsup m(T^n A)>0$ при $n\to\infty$ В общем случае S распадается на сумму двух инвариантных измеримых множеств S_1 и S_2, в одном из которых существует инвариантная мера, эквивалентная m, а в другом имеется измеримое подмножество A, для которого $\varlimsup m(T^n A)=0$ и $\overline{\lim}\, m(T^n A]=m(S_1)$. Специально рассматривается случай эргодического T (когда S не может быть разбито на два инвариантных подмножества положительной меры). Имеет место теорема: Если отображение T эргодично, $\mu\sim m$, $\mu(S)=1$ и мера m не атомическая, то для каждого измеримого множества A имеем:

$$n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(T^i A)-n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1} m(T^i A)\to 0$$

при $n\to\infty$.

С. В. Фомин

7475. Функции множества и их интегралы. Ионеску-Тулча (Funcţii de mulţime şi integralele lor. Ionescu Tulcea C. T.), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 1—2, 73—142 (рум.; рез. русс., франц.)

Определяются и изучаются интегралы для функций множества, имеющих в качестве значений подмножества некоторой равномерной полугруппы. Работа делится на 5 частей.

В первой части вводятся равномерные полугруппы. Равномерная полугруппа — это множество G, являющееся одновременно абелевой полугруппой с нейтральным элементом 0 и пространством с равномерной отделимостью, причем сложение равномерно непрерывно. Автор использует понятие суммируемого семейства элементов равномерной полугруппы (Bourbaki N., Groupes topologiques, Actualités scient. et industr., 916—1143, Paris, 1951) и распространяет это понятие на семейства подмножеств аналогично определению Рикарта (Rickart C. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 52, 498—521).

Во второй части устанавливается необходимое и достаточное условие абсолютной непрерывности функции множества относительно внешней меры.

В третьей части изучается аддитивный интеграл. Рассматривается множество G, называемое автором группоидом, в котором для некоторых пар элементов определена операция $x\bigcirc y$, удовлетворяющая условиям коммутативности и ассоциативности и имеющая нейтральный элемент e. Пусть F — равномерная полугруппа и G — группоид. Функция S на G со значениями в $\mathfrak{P}(F)$ (через $\mathfrak{P}(X)$ обозначается множество всех подмножеств множества X) называется суммой Римана, если $S(x)\neq\phi$ для всех $x\in G$, $S(e)=\{0\}$, а также если определено $x\bigcirc y$, то $S(x\bigcirc y)=S(x)+S(y)$. Риманова сумма называется интегрируемой относительно фильтра $\mathscr{F}$ группоида G, если фильтр базы $S(\mathscr{F})$ сходится к пределу. Предел и называется интегралом от S (по $\mathscr{F}$). Устанавливаются обычные свойства интегральных сумм и их интегралов.

Пусть теперь E — непустое множество, T — семейство подмножеств E (содержащее непустое множество) и G — группоид, элементами которого являются конечные семейства непустых множеств из T, причем $x\bigcirc y$ для $x,\ y\in G$ есть семейство, образованное множествами из x и y. Пусть F — равномерная полугруппа, f — функция на T со значениями $\mathfrak{P}(F)$ (с $f(a)\neq\phi$ для $a\neq\varphi$) и пусть S_f — риманова сумма, $S_f(x)=\sum_{i\in I} f(a_i)$, где $x=(a_i)_{i\in I}\in G$. По определению, f интегрируема относительно фильтра $\mathscr{F}$, если S_f интегрируема относительно $\mathscr{F}$. Интеграл от S_f называется аддитивным интегралом.

Автор устанавливает свойства аддитивных интегралов, используя полученные свойства интегралов римановых сумм.

В качестве частных случаев аддитивного интеграла получаются интеграл Беркилла и аддитивный интеграл Колмогорова.

В четвертой части определяется и используется вполне аддитивный интеграл. Определяется понятие полного группоида: множество G, в котором для некоторых счетных множеств $\{x_n\}$ определен элемент $\bigcirc x_n$, не зависящий от порядка членов, причем выполняется условие ассоциативности и имеется нейтральный элемент e. Пусть F — равномерная полугруппа. Функция S, определенная на подмножестве $D_S\ni e$ полного группоида G, со значениями в $\mathfrak{P}(F)$, называется суммой Лебега, если $S(x)\neq\phi$ для всех $x\in D_S$, $S(e)=\{0\}$, а также если определен $\bigcirc x_n$ и принадлежит D_S, то семейство $\{S(x_n)\}$ суммируемо и $S(\bigcirc x_n)=\sum_n S(x_n)$.

Сумма Лебега S называется вполне интегрируемой относительно фильтра $\mathscr{F}\ni D_S$ группоида G, если фильтр базы $S(\mathscr{F})$ сходится к пределу. Предел и называется вполне аддитивным интегралом от S.

Устанавливаются обычные свойства вполне интегрируемых сумм и их интегралов. Определяются понятия вполне интегрируемой функции и вполне аддитивного интеграла от функции с помощью того же процесса, что и для аддитивных интегралов, но роль конечных семейств играют теперь счетные семейства. Частными случаями вполне аддитивного интеграла автора являются вполне аддитивные интегралы Колмогорова, Никодима и Биркгофа.

В последней части работы вводятся интеграл, обобщающий кратный интеграл Рикарта, и слабый интеграл, обобщающий интеграл Петтиса и Гельфанда.

R. Cristescu

7476. Сходимость почти всюду операторных средних. **Данфорд, Шварц** (Convergence almost everywhere of operator averages. Dunford Nelson, Schwartz J.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 4, 229—231 (англ.)

Пусть μ — неотрицательная счетноаддитивная функция, определенная на борелевском теле Σ подмножеств некоторого множества S. Пусть $|f|_p$, где $1\leqslant p\leqslant\infty$ — обычная норма элемента f в пространстве $L_p=L_p(S,\Sigma,\mu)$, и пусть $|f|_p=\infty$, если f есть определенная на S измеримая функция, не принадлежащая к L_p. Если T — линейный оператор с областью определения $D(T)\supset L_1\cap L_\infty$ и совокупностью значений $R(T)\subset L_1\cup L_\infty$, то через $|T|_p$ обозначается наименьшее из значений K, удовлетворяющих неравенству $|Tf|_p\leqslant K|f|_p$ для всех $f\in D(T)$.

Приводятся (без полных доказательств) следующие теоремы:

1. Пусть $\{T_i(t)\}$ $(i=1,\ldots,k)$ — сильно измеримые полугруппы линейных операторов в L_1, удовлетворяющие условиям $|T_i(t)|_1 \leqslant 1$, $|T_i(t)|_\infty \leqslant 1$ $(i=1,\ldots,k;$ $t>0)$, и пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_k>0$, $f\in L_p$, $p>1$. Тогда усреднение

$$A(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)f=(\alpha_1\ldots\alpha_k)^{-1}\times$$

$$\times\int_0^{\alpha_1}\ldots\int_0^{\alpha_k}T_1(t_1)\ldots T_k(t_k)f\,dt_1\ldots dt_k$$

почти всюду имеет предел при неограниченном и независимом возрастании $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$. Сверх того, существует функция $f^*\in L_p$, мажорирующая все функции $A(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)f$.

2. Пусть $\{T(t_1,\ldots,t_k)\}$ — сильно измеримая k-параметрическая полугруппа линейных операторов в L_1, удовлетворяющая условиям $|T(t_1,\ldots,t_k)|_1\leqslant 1$, $|T(t_1,\ldots,t_k)|_\infty\leqslant 1$ $(t_1,\ldots,t_k>0)$, и пусть $\alpha>0$, $f\in L_1$. Тогда усреднение

$$A(\alpha)f=\alpha^{-k}\int_0^{\alpha}\ldots\int_0^{\alpha}T(t_1,\ldots,t_k)f\,dt_1\ldots dt_k$$

почти всюду имеет предел при $\alpha\to\infty$.

Верны и дискретные аналоги обеих теорем.

В. А. Рохлин

7477. О представлении линейных операторов посредством ядер. Махарам (On kernel representation of linear operators. Maharam Dorothy), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 79, № 1, 229—255 (англ.)

Изучаются положительные операторы — интегралы, определенные автором ранее (РЖМат, 1954, 3002). Определения всех основных понятий и основные обозначения см. там же. Если $g=\varphi(f)$ — такой интеграл, то он представляется в виде интеграла по числовой мере $g(y)=\int_J f(x,y)\,dm(x)$. Если другой интеграл $h=\psi(f)$ представим в виде $h(y)=\int_J k(x,y)f(x,y)\,dm(x)$ или $\psi(f)=\varphi(kf)$, то автор говорит, что ψ выражается через φ с помощью ядра $k(x,y)$.

Интеграл φ имеет, по определению, сплошную область значений (full-valued), если из соотношения $g'\leqslant\varphi(f)$ $(g'\in F'^{+}, f\in F^{+})$ следует существование такого $g\in F^{+}$, что $g\leqslant f$ и $\varphi(g)=g'$. Для каждого $f\in F$ через $[f]$ обозначается носитель (locus) функции f, т. е. то измеримое множество (точнее, соответствующий ему элемент булевой алгебры измеримых множеств, рассматриваемых с пренебрежением множествами меры нуль), на котором $f(x)\neq 0$.

Основная теорема. Пусть φ и ψ — два интеграла, заданные на одном и том же F, со значениями в одном и том же F', причем $[\psi(f)]\leqslant[\varphi(f)]$ при всех $f\in F^{+}$, а φ имеет сплошную область значений. Тогда ψ тоже имеет сплошную область значений и ψ представим через φ с помощью некоторого ядра.

Если F' — множество действительных чисел, т. е. если рассматривается интеграл с числовыми значениями, эта теорема сводится к теореме Радона — Никодима (Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, М., 1954, 154).

Если заданные интегралы распространимы на некоторые более широкие множества функций, то возможно, что такие распространенные операторы допускают представление посредством ядра, один через другой. Выясняются условия, при которых такое представление существует.

В последнем параграфе рассматриваются операторы с ограниченным изменением, т. е. представимые в виде разности двух положительных (интегралов). Они обладают рядом свойств, аналогичных свойствам функций с ограниченным изменением. Если полная вариация оператора φ представляет интеграл со сплошной областью значений, то все S (множество, на котором заданы функции, образующие F) разбивается на два дизъюнктных измеримых множества p и q так, что для всех функций f из области определения оператора φ, носитель которых заключен в p, $\varphi(f)\geqslant 0$, а для f с носителем $[f]\leqslant q$ $\varphi(f)\leqslant 0$.

Б. З. Вулих

См. также: 7451, 7695

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

7478. Две предельные теоремы для простейшего случайного блуждания по прямой. Добрушин Р. Л., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 139—146

На простейшей однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний E_k $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ с вероятностями перехода $p_{k,k+1}=p_{k,k-1}=\frac{1}{2}$, $p_{ij}=0$ для $i-j|\neq 1$ задается функция $f(E_k)$. Пусть $\xi_n=f(\zeta_1)+f(\zeta_2)+\cdots+f(\zeta_n)$, где ζ_i — состояние системы в i-й момент времени. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(E_k)$ — функция, заданная на состояниях системы, и пусть ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(E_k)=c\neq 0$ абсолютно сходится, тогда при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\xi_n}{c\sqrt{n}}<x\right\}\to\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt & \text{при } x\geqslant 0\\ 0 & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

Теорема 2. Пусть в обозначениях теоремы 1 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(E_k)=0$ и $f(E_k)$ отлично от нуля лишь для конечного числа состояний E_k. Тогда при $n\to\infty$

$$P\left\{\frac{\xi_n}{d\cdot n^{1/4}}<x\right\}\to G(x),$$

где $G'(x)$ существует и дается формулой

$$G'(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{y^2}{2x^2}-\frac{x^4}{2}\right\}dx$$

и $d>0$, $d^2=4\sum_k kf^2(E_k)+8\sum_{i<j}if(E_i)f(E_j)-$ $-\sum_k[f(E_k)]^2$. Распределение $G(x)$ может быть описано как распределение произведения $\sqrt{|\xi|}\cdot\eta$, где ξ и η — нормально распределенные с параметрами (0,1) независимые случайные величины. В случае, когда $f(E_i)=1$, $f(E_j)=-1$ и $f(E_k)=0$, $k\neq i,j$, $d^2=4|j-i|-2$.

Примечание референта. Можно показать, что функция $G'(x)$ имеет следующее простое представление $(x>0)$:

$$G'(x)=G'(-x)=\frac{1}{4x^5}p\left(\frac{1}{8x^4},\frac{1}{4},1\right);$$

здесь функция $p(x, \alpha, \beta)$ — плотность устойчивого распределения, характеристическая функция $f(t)$ которого задается в виде $\log f(t) = -|t|^{\alpha} \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\alpha\beta \operatorname{sgn} t\right\}$, где $0 < \alpha < 1$ и $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$. В. М. Золотарев

7479. Обратные вероятности и эволюционные марковские стохастические процессы. Рамакришнан (Inverse probability and evolutionary Markoff stochastic processes. Ramakrishnan Alladi), Proceed. Indian Acad. Sci., 1955, **A41**, № 4, 145—153 (англ.)

Пусть $\pi(x; t)$ — плотность распределения для состояния процесса Маркова в момент времени t. В основном работа посвящена определению $\pi(x; t)$ по известной функции $\pi(x, t_0)$ $(t < t_0)$. Строгие доказательства и точные формулировки отсутствуют. И. И. Гихман

7480. О взаимном расположении линий регрессии. Сапогов Н. А., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 187—192

Доказываются следующие предложения о линиях регрессии (X, Y).

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $p = 1 + \alpha$, $q = 1 + 1/\alpha$. Если величины (X, Y) обладают конечной дисперсией и соотношение $|Y| = c_1 |X|^{p/q}$ не имеет места, то невозможно одновременное выполнение неравенств:

$$|F(x)| = |M(Y \mid X = x)| \geqslant c_1 |x|^{\alpha};$$
$$|f(y)| = |M(X \mid Y = y)| \geqslant c_1^{-1/\alpha} |y|^{1/\alpha}.$$

Теорема 2. Пусть $y = \Phi(x)$ — непрерывная выпуклая функция, определенная для всех $x \geqslant 0$, $\Phi(0) = 0$ и $x = \Psi(y)$ — обратная ей функция; при этих условиях невозможно одновременное выполнение двух неравенств

$$|F(x)| \geqslant \Phi(|x|); \quad |f(y)| \geqslant \Psi(|y|),$$

если только X и Y обладают конечной дисперсией и не связаны соотношением $|y| = \Phi(|X|)$. Указываются обобщения этих теорем для многомерных величин. Полученные результаты применяются для доказательства теоремы О. В. Сарманова (Докл. АН СССР, 1948, 59, № 6, 1061—1064), согласно которой не существует корреляции с линиями регрессии, удовлетворяющими неравенствам:

$$|F(x)| > c'|x|^{\alpha}; \; |f(y)| > c''|y|^{\beta}, \; c' > 0, \; c'' > 0, \; \alpha\beta > 1$$

(при этом поверхность корреляции должна была удовлетворять некоторым ограничительным условиям). Автор показывает, что эти условия могут быть отброшены. Н. В. Смирнов

7481. Коррелированные случайные блуждания. Гиллис (Correlated random walk. Gillis J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 4, 639—651 (англ.)

Изучается блуждание по целочисленным точкам d-мерного пространства такое, что система переходит за один шаг в одну из $2d$ точек, соседних с той, в которой она находилась, причем с вероятностью p направление перехода совпадает с направлением перехода на предыдущем шаге и с вероятностью q оно совпадает с любым другим направлением $(p + (2d - 1)q = 1)$, а в остальном направление перехода не зависит от траектории системы в прошлом. В начальный момент система находится в начале координат. Пусть R_n — вероятность попасть в начало координат на n-м шаге. При $d = 1$ и $d = 2$, 4, 6, ... показано, что

$$R_n \sim \left(\frac{1 - (p - q)}{1 + (p - q)}\right)^{d/2} \overline{R}_n,$$

где R_n — это вероятность R_n, соответствующая случаю $p = q$. Отсюда следует, что при $d = 1,2$ блуждание будет «возвратным», а при $d = 4,6, \ldots$ — «невозвратным». Для случая $d = 1$ доказана асимптотическая нормальность положения частицы. Его среднее квадратичное отклонение равно асимптотически $\left(\frac{1 + (p - q)}{1 - (p - q)}\right)^{1/2} n^{1/2}$ (в оригинале опечатка). Р. Л. Добрушин

7482. Об условных математических ожиданиях. Алда (On conditional expectations. Alda Vaclav), Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 4, 503—505 (англ.; рез. русс.).

Рассматривается счетное декартово произведение одинаковых пространств с заданными на них одинаковыми вероятностными мерами. Пусть f — случайная величина и f_n — ее условное математическое ожидание относительно n первых фиксированных координат. Тогда почти всюду $\lim_{n \to \infty} f_n = f$. Автор дает новое элементарное доказательство этой теоремы, впервые полученной Андерсеном и Иессеном (Andersen E., Jessen B., Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., 1946, 22). Другое доказательство этой теоремы, основанное на том, что последовательность f_n образует мартингал, см. в книге Дуба (РЖМат, 1953, 831 К). См. также РЖМат, 1955, 2780. Р. Л. Добрушин

7483. Математическая заметка о геометрических вероятностях. Масуяма (Matehmatical note on area sampling. Masuyama Motosaburo) Sankhya, 1954, **13**, Part 3, 241—242 (англ.)

Методами интегральной геометрии рассматриваются две задачи о пересечении случайной кривой и случайной прямой, обобщающие известную задачу Бюффона. Как указано в редакционном примечании, хотя реферируемая работа новых результатов не содержит, она показывает возможность приложения методов интегральной геометрии к проблемам статистики. Н. Н. Ченцов, В. П. Швальб

7484. Распределение максимума среднего арифметического коррелированных случайных величин. Герленд (Distribution of the maximum of the arithmetic mean of correlated random variables. Gurland John), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 2, 294—300 (англ.)

Пусть $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ — случайная величина, причем каждое Z_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ имеет распределение Пирсона III типа

$$P(x) = (\theta\Gamma(\lambda))^{-1} e^{-x/\theta} x^{\lambda - 1}, \; x > 0,$$

и каждая пара величин Z_i и Z_j имеет одну и ту же корреляцию $\rho \geqslant 0$. Сначала выводится распределение величины $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i$, выражающееся через гипергеометрическую функцию. Затем находится распределение максимума среднего арифметического величин Z_i в выборках размера n сначала при больших n, а затем при больших n и k.

Рассматриваются отдельно случаи $\rho > 0$ и $\rho = 0$. С. Х. Туманян

7485. О некоторых свойствах бесселевых функций распределения. Лаха (On some properties of the Bessel function distributions. Laha R. G.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, **46**, № 1, 59—72 (англ.)

Рассматриваются случайные величины с бесселевой функцией распределения

$$dF(x) = \text{const} \cdot x^{1/2(p-1)} e^{-\alpha x} I_{p-1}(\beta x^{1/2}) \, dx \; (0 \leqslant x < \infty),$$

где

$$I_{p-1}(\beta x^{1/2}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,\Gamma(p + r)} \left(\frac{\beta x^{1/2}}{2}\right)^{p-1+2r}$$

С помощью метода характеристических функций выводится ряд свойств случайных величин, имеющих указанное распределение. Частично эти свойства были получены ранее другими способами.

Основные результаты работы следующие: 1. Доказывается, что сумма независимых случайных величин, имеющих бесселеву функцию распределения, также является случайной величиной с бесселевой функцией распределения. 2. Выводятся функции распределения для отношения и разности двух независимых случайных величин с бесселевой функцией распределения. 3. Выводятся функции распределения для линейной комбинации случайных величин, имеющих бесселеву функцию распределения, и для отношения двух независимых линейных комбинаций таких величин.

С помощью этих результатов выводятся распределение нецентрального χ^2, распределение отклонения двух нецентральных величин χ^2 и ряд других следствий.

С. Х. Туманян

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

7486. Получение выборок значений изотропного гауссовского процесса. Хаммерсли, Нелдер (Sampling from an isotropic Gaussian process. Hammersley J. M., Nelder J. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 652—662 (англ.)

Пусть $w(x)$ — изотропный гауссовский процесс в n-мерном евклидовом пространстве $E_n = \{x\}$, т. е. случайная функция на E_n, значения которой в любых k точках $x_1, \ldots, x_k$ имеют совместное нормальное распределение, причем коэффициент корреляции ρ_{ik} между $w(x_i)$ и $w(x_k)$ имеет вид $\rho(|x_i - x_k|)$. В дальнейшем предполагается, что среднее значение и дисперсия $w(x)$ при любом x равны соответственно 0 и 1, что не ограничивает общности. Задачей статьи является разработка процедуры для получения случайной выборки $w(x_1), \ldots, w(x_k)$ значений изотропного гауссовского процесса с заданной корреляционной функцией $\rho(r)$.

Выборку объема n с заданной корреляционной матрицей R можно взять в виде вектора $A\xi$, где ξ — вектор, компоненты которого суть независимые нормальные величины с нулевым средним значением, а A — матрица, определяемая из уравнения $A^2 = R$. Однако, при больших n определение матрицы A требует чрезмерно сложных вычислений. Поэтому предлагается иная процедура.

По заданной корреляционной функции $\rho(r)$ указанным ниже способом определяются плотность вероятностей $f(z)$ неотрицательной случайной величины z и неотрицательная функция $v(z)$. Задается семейство произвольных интегральных функций распределения $F_z(s)$ с нулевыми средними значениями и дисперсиями $v(z)$. Пространство E_n покрывается сферами, центры которых распределены по E_n равномерно и независимо друг от друга, а радиусы z имеют плотность вероятностей $f(z)$. Каждой сфере радиуса z приписывается число s, являющееся значением случайной величины с распределением $F_z(s)$. Тогда в качестве значения $w(x)$ может быть взята сумма значений s для всех сфер, содержащих точку x.

Практически, чтобы иметь дело лишь с конечным числом сфер, описанная процедура может быть видоизменена следующим образом. Задается большое фиксированное число R, и плотность вероятностей $f(z)$ заменяется подобранной подходящим образом плотностью вероятностей $f_R(z)$. Выбирается случайным образом радиус z из совокупности с распределением $f_R(z)$, и затем строится сфера с этим радиусом, центр которой помещается внутри сферы C радиуса $R + z$ с центром в начале координат и имеет внутри C равномерное распределение. Построенной сфере приписывается число s, выбранное случайным образом из совокупности с распределением $F_z(s)$. Построение подобных сфер при фиксированном R производится большое число раз, чтобы сумма значений s для каждого $w(x)$ содержала много слагаемых. Тогда указанная сумма для каждого x будет асимптотически нормальной в силу центральной предельной теоремы.

Показывается, что функции $f_R(z)$ и $v(z)$ следует выбирать так, чтобы их произведение равнялось $(1 + R/z)^n \times \times \varphi'(1/z)\, z^{-2}$, причем функция φ определяется по корреляционной функции $\rho(r)$, как решение обобщенного интегрального уравнения Шлемильха

$$\frac{2\Gamma(n/2+1)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(n/2+1/2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t\sin\theta)\cos^n\theta\, d\theta = \rho(2/t).$$

Находится решение этого уравнения. Выписываются окончательные формулы для $f_R(z)\,v(z)$ для числа измерений $n = 1, 2, 3$. В качестве примеров рассматриваются случаи, когда $\rho(r) = e^{-\lambda r}$ (в одномерном пространстве такая корреляционная функция соответствует марковскому процессу).

Полученные результаты позволяют установить, что заданная функция $\rho(r)$ является корреляционной функцией некоторого гауссовского процесса, если $\varphi' \geqslant 0$. Однако, это условие не является необходимым; так, оно не выполняется для процесса Уиттла — процесса в E_2 с корреляционной функцией $\lambda r K_1(\lambda r)$, где K_1 — цилиндрическая функция Макдональда. Такие процессы не могут быть реализованы с помощью изложенной процедуры.

А. С. Монин

7487. Распределение коэффициента регрессии в выборках из ненормальной совокупности. Хилл (The distribution of the regression coefficient in samples from a non-normal population. Hill I. D.), Biometrica, 1954, 41, № 3—4, 548—551 (англ.)

Пусть $\beta = \chi_{11}/\chi_{20}$ — коэффициент регрессии y по x в генеральной совокупности, а $b = k_{11}/k_{20}$ — соответствующий выборочный коэффициент регрессии. Тогда, как известно, если выборка произведена из нормальной совокупности, величина

$$t = (b - \beta)\left\{\frac{(n-1)\,\chi_{20}}{(1-\rho^2)\,\chi_{02}}\right\}^{1/2}$$

имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

Рассматривается вопрос, как влияет нормальность исходного распределения на распределение выборочного коэффициента регрессии b. Устанавливается, что при больших выборках для всех исходных распределений, кумулянты которых удовлетворяют соотношению $\chi_{22}\chi_{20}^2 + \chi_{40}\chi_{11}^2 = 2\chi_{31}\chi_{11}\chi_{20}$, распределение коэффициента регрессии то же самое, что и в случае нормального распределения.

Для выборок ограниченного размера приводится пример, в котором сравниваются случаи, когда исходными распределениями являются нормальное распределение и распределение, рассмотренное Родесом (Rhodes, Biometrika, 1923, 14, 355). Пусть

$$\psi = k_{11} - ck_{20},$$

$$c = \left\{\frac{\chi_{11} + t_{n-1,\alpha}\,(\chi_{20}\chi_{02} - \chi_{11}^2)^{1/2}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}\right\}\frac{1}{\chi_{20}},$$

$t_{n-1,\alpha}$ — 100α — процентная точка распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Вычисляются четыре первые кумулянты ψ, с помощью которых можно оценить для данного α вероятности $P(\psi > 0)$. Приводится таблица, в которой эти вероятности сравниваются для случаев, когда выборка произведена из нормальной совокупности и когда выборка произведена из совокупности с распределением Родеса. Таблица составлена для значений $\alpha = 0{,}05$ и $\alpha = 0{,}01$ и размеров выборок $n = 11, 21, 61$. Сравниваемые вероятности значительно отличаются друг от друга.

С. Х. Туманян

7488. Усеченные выборки из распределений, допускающих достаточные статистики. **Дес Радж** (Truncated sampling from distributions admitting sufficient statistics. Des Raj), Sankhya, 1954, 14, № 1—2, 169—174 (англ.)

Рассматривается совокупность с плотностью распределения

$$f(x, \bar{\theta}) = \exp\left\{\sum_k u_k(\bar{\theta})\, v_k(x) + A(x) + B(\bar{\theta})\right\} \qquad (1)$$

где $\bar{\theta}$ равно $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)$. Совокупность (1) предполагается усеченной числами x_0' и x_0'' $(x_0' < x_0'')$. Числа наблюдений в выборке размера N, попавшие в интервалы $(-\infty, x_0')$, (x_0', x_0''), (x_0'', ∞), обозначаются соответственно через n_1, n_0 и n_2 $(n_0 + n_1 + n_2 = N)$.

Рассматриваются три случая: а) n_1 и n_2 известны, б) $n_1 + n_2$ известно, в) вся выборка берется из интервала (x_0', x_0''). В каждом из этих случаев простым путем находится значение $M\left[-\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_r\,\partial\theta_s}\right]^{-1}$, где L — логарифм функции правдоподобия.

С. Х. Туманян

7489. Усеченное отрицательно-биномиальное распределение. **Сампфорд** (The truncated negative binomial distribution. Sampford M. R.), Biometrica, 1955, 42, № 1—2, 58—69 (англ.)

Рассматривается задача оценки параметров усеченного отрицательно биномиального распределения, задаваемого формулой

$$P(r) = \frac{\omega^k}{1-\omega^k}\cdot\frac{(k+r-1)!}{(k-1)!\,r!}\,\eta^r,\quad r = 1, 2, \ldots$$

где $\eta = 1 - \omega$, $\omega < 1$, $k > 0$.

Задача оценки параметров ω и k этого распределения вначале исследуется методом моментов. Указывается способ решения уравнений, получаемых приравниванием первого и второго моментов распределения соответствующим выборочным моментам. Исследуются вопросы эффективности полученных оценок. Рассматриваются также оценки по методу максимума правдоподобия.

С. Х. Туманян

7490. О моментах порядковых статистик в выборках из нормальных совокупностей. **Рубен** (On the moments of order statistics in samples from normal populations. Ruben H.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 200—227 (англ.)

Рассматриваются моменты r-й порядковой статистики в выборке размера n из нормальной совокупности, определяемые соотношением

$${}_s\mu'_{r|n} = nC_{n-1}^{r-1}\int_{-\infty}^{\infty} x^s\, z p^{r-1}\, q^{n-r}\, dx \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

где

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2},\quad p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi,$$

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\, d\xi.$$

Указанные моменты вычисляются с помощью некоторого рекуррентного соотношения, выведенного для функции

$$\Phi(s; \alpha; \beta; \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s\, z^\alpha\, p^\beta\, q^\gamma\, dx.$$

В заключение приводятся таблицы, в частности для моментов ${}_s\mu'_{n|n}$ экстремального члена выборки размера n из нормальной совокупности, с точностью до девятого десятичного знака при $n = 1, 2 \ldots 50$ и $s = 1, 2 \ldots 10$.

С. Х. Туманян

7491. Выборочные свойства локальных статистик стационарных случайных последовательностей. **Джоуэтт** (Sampling properties of local statistics in stationary stochastic series. Jowett G. H.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 160—169 (англ.)

Пусть $\{x_i\}$ — стационарная последовательность с корреляционной функцией $\sigma^2\rho_s$. Дисперсия статистики $U = n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(x_{2k-1} - x_{2k})$ имеет вид $D(U) = n^{-1}\sigma^2 \times$ $\times \sum_{s=-(n-1)}^{n-1}(1 - n^{-1}|s|)\,(-\Delta''\rho_{2s})$, где Δ'' обозначает вторую центрированную разность. Во многих случаях, когда корреляционная функция ρ_s при больших s становится на малых интервалах приблизительно линейной, вторые разности $\Delta''\rho_{2s}$ быстро затухают с ростом s, и суммирование в формуле для $D(U)$ может быть распространено лишь на небольшие значения s. В работе изучаются статистики общего вида, обладающие свойством, аналогичным указанному свойству статистики U, именно, величины вида

$$L_{\alpha i} = \int_s x_i(t)\, dL_\alpha(t) = \sum_r l_\alpha^*(t_r)\, x_i(t_r) + \int_s x_i(t)\, l_\alpha(t)\, dt;\quad \int_s dL_\alpha(t) = 0,$$

где $x_i(t)$ — стационарные и стационарно связанные друг с другом случайные функции вектора $t \in S$, а величины $l_\alpha^*(t)$, $l_\alpha(t)$ при достаточно больших значениях $|t|$ равны нулю. Предполагается, что величины $x_i(t)$ нормальны, а их взаимные структурные функции при достаточно больших значениях своего аргумента зависят от него приблизительно линейно. При этих предположениях вычисляются математические ожидания произведений величин $L_{\alpha i}$. Оказывается, что эти математические ожидания определяются лишь значениями структурных функций при малых значениях их аргументов. Рассматривается ряд примеров.

А. С. Монин

7492. Об определении оптимального объема выборки. **Нурдботтен** (On the determination of an optimal sample size. Nordbotten Svein), Skand. aktuarietidskr., 1954, № 1—2, 60—64 (англ.)

Рассматривается следующая задача: для оценки некоторого параметра θ распределения случайной величины произведены n наблюдений. Точность произведенной оценки характеризуется функцией $F(t, n, \theta)$. Стоимость C операции по оценке θ зависит от времени производства наблюдений и от числа наблюдений n; эти величины связаны зависимостью $G(t, n, C) = 0$ (1).

Требуется найти n и t, для которых F достигает минимума при условии, что (1) выполнено.

Задача рассмотрена для случая оценки среднего значения величины, принимающей конечное число значений. Равенство (19) работы содержит ошибку; обо-

значения неудачны и способны вызвать путаницу; предположения (12) и (13) относительно зависимости точности наблюдений от длительности отдельных наблюдений кажутся искусственными. Б. В. Гнеденко

7493. Заметка о коэффициентах различных χ^2-аппроксимаций. Бартлетт (A note on the multiplying factors for various χ^2 approximations. Bartlett M. S.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, B16, № 2, 296—298 (англ.)

Приводится сводка χ^2-аппроксимаций различных критериев, основанных на асимптотических приближениях отношений правдоподобия, взятых с определенными коэффициентами. Эти критерии (для проверки гипотезы о корреляционной матрице R, когда альтернативной является гипотеза о единичной матрице I, для проверки гипотез об однородности дисперсий и т. д.) ранее были предложены автором в статьях, указанных в библиографии. С. Х. Туманян

7494. Некоторые свойства бета и гамма-распределений Джамбунатхан (Some properties of Beta and Gamma distributions. Jambunathan M. V.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 401—405 (англ.)

Изучаются некоторые свойства гамма-распределения, задаваемого плотностью вероятностей

$$(1/\Gamma(a))\, e^{-x} x^{a-1}, \quad 0 \leqslant x < \infty,$$

а также двух видов бета-распределений, задаваемых плотностями вероятностей

$$(1/B(a,b))\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leqslant x < 1,$$
$$x^{a-1}/B(a,b)\,(1+x)^{a+b}, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

В качестве приложения изучаемых вопросов двумя способами выводится распределение статистики D^2 Стьюдента, служащей для проверки гипотезы, что две выборки произведены из многомерных нормальных совокупностей с одной и той же матрицей вторых моментов. С. Х. Туманян

7495. Двустепенная процедура для оценки разности между средними. Гурье, Роббинс (Two-stage procedures for estimating the difference between means. Ghurye S. G., Robbins Herbert), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 146—152 (англ.)

Для оценки разности между средними θ_1 и θ_2 двух совокупностей на основе выборок в n_1 и n_2 наблюдений соответственно применяется разность между выборочными средними $t_1(n_1) - t_2(n_2)$. В предположении, что стоимость выборки является известной линейной функцией числа наблюдений $a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3$ и не должна превосходить некоторой величины A, а дисперсии исходных распределений известны, величины n_1 и n_2 могут быть выбраны так, чтобы дисперсия разности $t_1(n_1) - t_2(n_2)$ была минимальной V_0.

В случае, когда дисперсии исходных распределений неизвестны, предлагается двустепенная процедура, при которой дисперсии распределений оцениваются на основе первых частей выборок. Обозначим через V^* дисперсию получаемой при этом оценки $t_1(n_1) - t_2(n_2)$. Тогда при выполнении некоторых условий $V^*/V_0 \to 1$ при $A \to \infty$. Е. Л. Ющенко

7496. Доверительные границы для полиномиальных кривых. Хоел (Confidence bands for polynomial curves. Hoel Paul G.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 534—542 (англ.)

Рассматривается случайная переменная y_t, представляющая, например, величину некоторой характеристики индивидуума из данной совокупности в момент времени t. При некоторых предположениях строятся доверительные границы для кривой $E(y_t)$ (E — математическое ожидание) с заданной нижней гранью коэффициента доверия. Одно из упомянутых предположений состоит в том, что $E(y^t)$ полином относительно t. С. Х. Туманян

7497. Совместные доверительные области для коэффициентов множественной регресси. Дьюранд (Joint confidence regions for multiple regression coefficients. Durand David), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 265, 130—146 (англ.)

Рассматривается семейство, зависящее от k параметров $X_1, X_2, \ldots, X_k$, величин Y, распределенных нормально со средним $b_0 + b_1 X_1 + \cdots + b_k X_k$ и одной и той же дисперсией σ^2. Коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_k$ и величина σ^2 неизвестны. Делается n наблюдений ($n > k+1$) величины Y, каждое при своем наборе значений параметров X_j. Требуется оценить по этим наблюдениям величины b_i и σ. В классической постановке задачи о регрессии требуется указать доверительные интервалы для каждой из неизвестных величин, т. е. совместные доверительные области специального вида:

$$\{\hat{b_0} - t_0 \leqslant b_0 \leqslant \hat{b}_0 + t_0, \ldots, \hat{b}_k - t_k \leqslant b_k \leqslant \hat{b}_k + t_k\}.$$

Автор указывает, что часто практичнее определять доверительные интервалы не для самих величин b_i, а для их линейных комбинаций, т. е. совместные доверительные области типа полиедров. Рекомендуемая автором процедура отыскания доверительной области такова. В качестве оценок величин b_i и σ^2 выбираются оценки наибольшего правдоподобия $\hat{b}_i$ и $\hat{\sigma}^2$. Известно (Крамер, Математические методы статистики, Изд-во ин. лит., 1948, § 37.3), что величина

$$z_{n,k} = \frac{n-k-1}{k\hat{\sigma}^2} \sum_{i,j}^{k} \frac{a_{ij}}{n} (\hat{b}_i - b)(\hat{b}_j - b),$$

где

$$a_{ij} = \sum_{\xi=1}^{n} (X_{i\xi} - \bar{X}_i)(X_{j\xi} - \bar{X}_j);$$
$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{\xi=1}^{n} X_{i\xi}$$

распределена как дисперсионное отношение с k степенями свободы числителя и $n-k-1$ степенями свободы знаменателя. Пусть

$$P\{z_{n,k} > F_\alpha(k, n-k-1)\} = \alpha.$$

Тогда уравнение $z_{n,k} = F_\alpha(k, n-k-1)$ задает в пространстве параметров $b_0, b_1, \ldots, b_k$ $k+1$-мерный эллипсоид, который с вероятностью $1-\alpha$ покрывает точку, изображающую значения неизвестных параметров.

В качестве границ доверительных интервалов для линейных комбинаций вида $Q = \sum_{i=1}^{k} h_i b_i$, имеющих совместный уровень значимости α, указываются значения $Q = \bar{Q}$ и $Q = \underline{Q}$, при которых гиперплоскости $\sum_{i=1}^{k} h_i b_i - Q = 0$ касаются эллипсоида $z_{n,k} = F_\alpha$. В работе имеются опечатки. Н. Н. Ченцов, В. П. Швальб

7498. Некоторые замечания о доверительных пределах. Стерн (Some remarks on confidence or fiducial limits. Sterne Theodore E.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 275—278 (англ.)

Пусть было сделано n повторений случайного эксперимента, причем S исходов оказались благоприятными. По S и n автор строит доверительный интервал для неизвестной вероятности благоприятного исхода. Для n от 1 до 10 приведены таблицы правых и левых границ доверительных интервалов для 50% и 90% уровней

значимости. Указывается, что интервалы получаются более узкими, чем в аналогичных таблицах Клоппера и Пирсона. Н. Н. Ченцов, В. П. Швальб

7499. Теория оценок для фундаментального случайного процесса и для процесса Орнштейна — Уленбека. Манн (A theory of estimation for the fundamental random process and the Ornstein — Uhlenbeck process. Mann H. B.), Sankhya, 1954, **13**, № 4 ,325—350 (англ.)

Непосредственно измеряются значения $y_t = x_t + f(t)$, где x_t — случайный процесс, а $f(t) = \sum_{i=1}^{s} k_i \zeta_i(t)$ — неслучайная функция с неизвестными параметрами k_i. Требуется дать оценки для характеристик процесса x_t и для параметров k_i.

Если x_t — фундаментальный случайный процесс (нормальный процесс с независимыми стационарными приращениями $x_{t+\tau} - x_t$, дисперсии которых равны $c\tau$), то при некоторых общих предположениях наилучшими (в определенном смысле) несмещенными линейными оценками для k_i будут

$$\hat{k}_i = \sum_{j=1}^{s} \Phi^{ij} \int_0^T \zeta_j'(t)\, dy_t, \quad \Phi_{ij} = \int_0^T \zeta_i'(t)\, \zeta_j'(t)\, dt,$$

причем матрица вторых моментов для этих оценок имеет вид $c\Phi^{ij}$. В качестве оценки для c предлагается

$$\hat{c} = \frac{1}{N-s} \sum_{i=1}^{N} \frac{[y_{t_i} - y_{t_{i-1}} - \hat{f}(t_i) + \hat{f}(t_{i-1})]^2}{t_i - t_{i-1}},$$

где

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T,$$

а $\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^{s} \hat{k}_i \zeta_i(t)$.

При этом $(N-s)(\hat{c}/c) - \Delta_N$ имеет распределение χ^2 с $N-s$ степенями свободы (Δ_N стремится по вероятности к нулю при $N \to \infty$).

Для выбора между гипотезами $H_0[f(t) = 0]$ и $H_1[f(t) = \Sigma k_i \zeta_i(t)]$ предлагается критерий $\psi^2 = \int_0^T \hat{f}^2(t)\, dt$, причем ψ^2/c имеет распределение χ^2 с s степенями свободы.

Пусть x_t — процесс Орнштейна — Уленбека, т. е. стационарный нормальный процесс, удовлетворяющий уравнению $x_{t+\tau} = e^{-\beta\tau} x_t + \varepsilon_{t,\tau}$, где $\varepsilon_{t,\tau}$ — нормальная величина с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma^2(1 - e^{-2\beta\tau})$, независимая от x_t (и от $\varepsilon_{t',\tau'}$, если интервалы $t,\ t+\tau$ и $t',\ t'+\tau'$ не перекрываются). Параметр $2\beta\sigma^2$ можно оценить, измеряя $D_N = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{N} (y_{nT|N} - y_{(n-1)T|N})^2$. Именно, при некоторых общих предположениях $\sqrt{N}(D_N - 2\beta\sigma^2)$ асимптотически нормально с предельной дисперсией $8\beta^2\sigma^4$. Если β известно, то оценки $\hat{k}_i$ и их вторые моменты определяются аналогично вышеизложенному, но при некотором специфическом определении интеграла и производной. При неизвестном β все оценочные процедуры несколько видоизменяются.

Особое внимание уделяется аппроксимации функции $f(t)$ отрезками ряда Фурье. А. С. Монин

7500. Дальнейшее приближение к распределению статистики Уилкоксона в общем случае. Сандрум (A further approximation of the distribution of Wilcoxon's statistic in the general case. Sundrum R. M.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 2, 255—260 (англ.)

Критерий Уилкоксона однородности двух выборок $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ основан на статистике

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} d_{ik},$$

где $d_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } X_i < Y_k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Выводятся значения для третьего и четвертого центральных моментов статистики U в общем случае. Рассматриваются частные случаи: а) нулевая гипотеза верна; б) X распределено равномерно в интервале $(0,1)$, Y распределено равномерно в интервале $(\Delta, 1+\Delta)$, где $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$; в) X и Y распределены нормально, причем $E(Y) - E(X) = \theta$, $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y) = \sigma^2$.

Приводится способ оценки параметров, входящих в выражение третьего и четвертого моментов, с помощью данных выборки в случае, когда исходные распределения неизвестны. С. Х. Туманян

7501. Заметка о моментах порядковых статистик в выборках из симметричных совокупностей. Сил (A note on moments of order statistics from symmetrical populations. Seal K. C.), Calcutta Statist. Assoc Bull., 1955, 6, № 22, 91—92 (англ.)

Рассматривается группа из n совокупностей, имеющих распределения

$$dF_i = f_i(x, \theta_i, \underline{\lambda_i})\, dx, \text{ где } \underline{\lambda_i} = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ip}), \qquad (1)$$

симметричные относительно параметров θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Пусть x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — выборка, в которой имеется по одному элементу из каждой из данных n совокупностей, а $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$ — расположенные в порядке возрастания элементы выборки x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Для определенного частного вида совокупностей (1) устанавливаются некоторые свойства порядковых статистик $X_{(i)}$. С. Х. Туманян

7502. О стохастической независимости однородной квадратичной статистики и среднего. Лага Р. Г., Вестн. Ленингр. ун-та, 1956, № 1, 25—32

Рассматривается задача: Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечную дисперсию. Каков возможный класс функций распределения, для которых данная квадратичная форма $Q = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$ (при условии $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \neq 0$) распределена независимо от линейной формы $L = \sum_{i=1}^{n} x_i$? Эта задача сводится к задаче полного перечисления различных возможных решений некоторого дифференциального уравнения, являющихся характеристическими функциями. Устанавливается, что стохастическая независимость квадратичной формы Q и линейной L возможна для случайных величин а) распределенных нормально, б) имеющих несобственное распределение, в) распределенных по дискретному закону $P(x_i = a) = p$, $P(x_i = -a) = 1 - p$. В последнем случае $Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$. В. П. Скитович

7503. Статистические проверочные распределения в конечном промежутке. Еккель (Statistische Prüfverteilungen endlicher Spannweite. Jaeckel K.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 4—5, 190—191 (нем.)

Для аппроксимации функции распределения, которое сосредоточено в конечном промежутке и плотность $\varphi(x)$ которого известна и имеет приблизительно симметричный вид, предлагается использовать распределения одного из пирсоновских типов

$$\psi(x-\alpha, h) = \frac{15}{16}[1-h^2(x-\alpha)^2];$$

$$\alpha - \frac{1}{h} \leqslant x \leqslant \alpha + \frac{1}{h},$$

где параметры α и h определяются так, чтобы интеграл

$$\int_{\alpha-\frac{1}{h}}^{\alpha+\frac{1}{h}} \sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x-\alpha, h)}\,dx = 1-\varepsilon$$

достигал максимума. При этом ε считается мерой расхождения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$. Обычно параметры α и h определяют из условия равенства математических ожиданий и дисперсий законов $\psi(x)$ и $\varphi(x)$. Автор отмечает, что при использовании метода последовательных приближений объем вычислений для определения α и h оказывается небольшим.

Применение метода иллюстрируется численным примером. Указывается также на возможность применения изложенного принципа определения наилучшего приближающего закона $\psi(x)$ в других случаях.

Н. Н. Ченцов, В. П. Швальб

7504. Оценка параметров «скошенного» распределения посредством линейных систематических статистик. Сархан (Estimation of the parameters of a skewed distribution by linear systematic statistics. Sarhan A. E.), J. Amer. Statis. Assoc., 1955, 50, № 269, 196—208 (англ.)

Рассматривается распределение с плотностью

$$\frac{12}{\theta_2}\left(\frac{y-\theta_1}{\theta_2}+\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}-\frac{y-\theta_1}{\theta_2}\right),$$

$$\theta_1 - \frac{2\theta_2}{3} \leqslant y \leqslant \theta_1 + \frac{\theta_2}{3},$$

где θ_1 — мода, а θ_2 — размах распределения.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — выборка из совокупности с рассматриваемым распределением, причем $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. В качестве оценки параметров θ_i $(i=1,2)$ предлагаются линейные комбинации $\theta_i^* = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_j$, $i=1,2$, причем α_{ij} выбираются так, чтобы выборочная дисперсия θ_i^* была наименьшей.

Значения коэффициентов α_{ij} приводятся в таблицах для $n=2$, 3, 4 и 5. Для среднего значения и стандартного уклонения «скошенного» распределения предлагаются несмещенные оценки

$$\mu^* = \theta_1^* - \frac{\theta_2^*}{15}, \quad \sigma^* = \frac{\theta_2^*}{5}.$$

Приводятся таблицы, по которым можно определить μ^* и σ^* для $n=2$, 3, 4 и 5.

Изучается эффективность некоторых других оценок среднего значения и стандартного уклонения. Например, в качестве оценок для среднего значения рассматриваются среднее арифметическое выборочных значений, среднее арифметическое из крайних значений выборки, медиана выборки. Таблица эффективности этих оценок приведена для $n=2,3,4,5$; особенно низкой является эффективность медианы.

В заключение автор показывает, как использовать приемы матричного исчисления для подсчета наилучших линейных оценок параметров. С. Х. Туманян

7505. Некоторые замечания о логарифмически нормальном распределении. Вартман (Einige Bemerkungen zur logarithmischen Normalverteilung. Wartmann Rolf), Mitteilungsbl. math. Statist., 1955, 7, № 2, 152—165 (нем.)

Рассматривается логарифмически нормальное распределение, определяемое плотностью вероятности

$$f(x) = g\left[\eta \ln (x-\alpha)/\beta\right],$$

где $g(z)$ — плотность нормального распределения. Приведены формулы, определяющие моменты и кумулянты (семиинварианты) такого распределения. Для оценки параметров по выборочным данным рекомендуется использовать K-статистики, являющиеся несмещенными оценками кумулянтов. Эти оценки автор считает наилучшими. Воспроизводится часть известных формул для кумулянтов этих статистик. Г. И. Егудин

7506. Оценка средней и стандартного отклонения посредством порядковых статистик. II. Сархан (Estimation of the mean and standard deviation by order statistics. Part II. Sarhan A. E.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 505—511 (англ.)

Для трех семейств распределений («U-образного», «параболического» и «скошенного») среди оценок среднего и стандарта, являющихся линейными комбинациями членов вариационного ряда, находятся наилучшие. Доказательства не приводятся. Настоящая статья является продолжением ранее опубликованной статьи автора (РЖМат, 1955, 4578). Р. Х. Дивеев

7507. Теория дисперсии Лексиса в ее отношении к современной статистической методологии, преимущественно к дисперсионному анализу. Бауэр (Die Lexissche Dispersionstheorie in ihren Beziehungen zur modernen statistischen Methodenlehre insbesondere zur Streuungsanalyse (analysis of variance). Bauer Rainald K.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1955, 7, № 1, 25—45 (нем.)

Основная идея современных методов оценки и дисперсионного анализа содержится уже в теории дисперсии, развитой Лексисом и Дормуа в 70-х годах прошлого столетия и получившей завершение в трудах Маркова, Борткевича, Чупрова и О. Андерсона.

Коэффициент дисперсии Лексиса Q представляет отношение наблюденного среднеквадратического отклонения ε частоты события к среднеквадратическому отклонению $\varkappa$ частоты, получаемому в биномиальном распределении:

$$Q = \frac{\varepsilon}{\varkappa} = \sqrt{\frac{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^r (p_i - p)^2}{\frac{1}{n}pq}}.$$

В случае схемы Бернулли $\varepsilon = \varkappa$, в случае схемы Пуассона $\varepsilon < \varkappa$, в случае схемы Лексиса $\varepsilon > \varkappa$. Поэтому коэффициент дисперсии может принимать значения: $Q=1$, $Q<1$, $Q>1$. В зависимости от этого дисперсия называется соответственно нормальной, поднормальной или сверхнормальной.

Рассматриваемая в связи с теорией дисперсии величина χ^2, введенная Пирсоном, представляет видоизменение коэффициента Q^2 Лексиса. На это впервые было указано Р. Фишером. Точно так же видоизменениями Q^2 являются коэффициенты взаимной сопряженности Пирсона и Чупрова.

Тесную связь с коэффициентом Q^2 имеют также различные критерии оценки — t Стьюдента, F Фишера, Λ Уилкса и основные формулы современного дисперсионного анализа. Библ. 121 назв. А. К. Митропольский

7508. Таблицы обобщенных статистик. Абделя-Ати (Tables of generalized k-statistics. Abdel-

Aty S. H.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 255—260 (англ.)

Таблицы, позволяющие написать явное выражение для обобщенных «k-статистик», введенных Уишартом (Wishart J., Biometrika, 1952, 39, № 1), через некоторые симметрические функции данных выборки.

Н. В. Смирнов

7509. Заметка о функции распределения коэффициента корреляции. Харли (A note on the probability integral of the correlation coefficient. Harley B. I.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 278—280 (англ.)

Как известно, Р. Фишер показал, что величина

$$Z = \frac{1}{2} \lg \frac{1+r}{1-r},$$

где r — выборочный коэффициент корреляции, распределена приблизительно нормально. Однако, если коэффициент корреляции совокупности ρ близок к числу 0,9, нормальное распределение не дает достаточной точности. Предлагается в указанном случае нормальное распределение z «исправить» с помощью асимптотического разложения Эджворта.

Приведены таблицы для случаев $n = 25$, $\rho = 0{,}9$ $n = 50$, $\rho = 0{,}9$ (n — объем выборки), в которых сравниваются точные значения распределения r и приближенные в случае предположения нормальности, а также в случае использования разложения Эджворта. Таблицы, по крайней мере для соответствующих объемов выборки, подтверждают справедливость сделанного предложения.

С. Х. Туманян

7510. Оценки коэффициентов корреляции по диаграммам рассеивания. Шугар (Estimation of correlation coefficients from scatter diagrams. Sugar G. R.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 3, 354—357 (англ.)

Предлагается метод оценки коэффициента корреляции двух случайных величин ξ и η, основанный на сравнении эмпирических диаграмм рассеивания с диаграммами линий уровня совместной функции плотности вероятности этих величин. Рассмотрен случай совместного нормального распределения и совместного распределения с плотностью

$$f(x, y) = \frac{2xy}{M\xi^2 - 2r^2} I_0\left[\frac{2xy}{M\xi^2 - 2r^2}\right] \exp\left[-\frac{(x^2+y^2)\sqrt{M\xi^2}}{(M\xi^2 - 2r^2)\sqrt{2}}\right],$$

где I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Обсуждаются некоторые причины, влияющие на точность метода, и делается вывод, что ошибки в определении коэффициента корреляции могут быть порядка $\pm 0{,}1$.

В. С. Королюк

7511. Корреляция для усеченных выборок значений случайной функции. Френкель, Кампе-де-Фериье (Correlation for truncated samples of a random function. Frenkiel F. N., Kampé de Fériet J.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 291—292 (англ.)

Краткий реферат работы, посвященной оценке корреляционной функции случайного процесса по его индивидуальной реализации, измеренной лишь на конечном интервале значений аргумента. А. С. Монин

7512. Корреляция между дискретной и непрерывной переменной. Тейт (Correlation between a discrete and a continuous variable. Point-biserial correlation. Tate Robert F.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 603—607 (англ.)

X — случайная переменная, принимающая два значения 1 и 0 с вероятностями соответственно p и q, Y — непрерывная случайная переменная, ρ — коэффициент корреляции между X и Y (называемый в этом случае пойнт-бисериальным коэффициентом корреляции) Утверждается, что если условные распределения Y при $X = 0$ и $X = 1$ нормальны и имеют равные дисперсии, то распределение обычной оценки коэффициента корреляции по выборочным данным

$$r = \frac{\Sigma X_i Y_i - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\sqrt{\Sigma (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\Sigma (Y_i - \overline{Y})^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

асимптотически нормально:

$$r \sim \mathfrak{N}\left[\rho, \frac{4pq - \rho^2(6pq - 1)}{4npq}(1 - \rho^2)^2\right].$$

Для случая, когда $p = q = 1/2$

$$\operatorname{sgn}(r) \tanh^{-1}\sqrt{1 - (1 - r^2)^2} \sim$$
$$\sim \mathfrak{N}\left[\operatorname{sgn}(\rho) \tanh^{-1}\sqrt{1 - (1 - \rho^2)^2}, 2/n\right].$$

Последнее соотношение используется при расчете доверительных интервалов для ρ. Для малых выборок рассматривается распределение и способ использования $T = r\sqrt{n-2}/\sqrt{1 - r^2}$.

Я. И. Лукомский

7513. Оценки вероятностного интеграла и некоторых точек процентного отношения для многомерного аналога t-распределения Стьюдента. Даннетт, Собел (Approximations to the probability integral and certain percentage points of a multivariate analoge of Student's t-distribution. Dunnett C. W., Sobel M.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 258—260 (англ.)

Многомерным аналогом t-распределения Стьюдент служит распределение (РЖМат., 1955, 2330)

$$I = I_n(h_1, \ldots, h_p) =$$
$$= \int_{-\infty}^{h_1} \ldots \int_{-\infty}^{h_p} f(t_{1n}, \ldots, t_{pn})\, dt_{1n}, \ldots, dt_{pn},$$

где

$$f(t_{1n}, \ldots, t_{pn}) =$$
$$= \frac{\Gamma((n+p)/2)}{\Gamma(n/2)}\sqrt{\frac{A}{(\pi n)^p}}\left[1 + \frac{1}{n}\sum_{i,j} a_{ij} t_{in} t_{jn}\right]^{-\frac{n+p}{2}}$$

— функция плотности p случайных величин $\tau_{in} = z_i/s$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$; z_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ имеют в совокупности невырожденное p-мерное нормальное распределение, среднее значение 0 и неизвестную дисперсию σ^2, с известной корреляционной матрицей $\{\rho_{ij}\}$. При этом ns^2/σ^2 имеет χ^2_n распределение с n степенями свободы; A — детерминант матрицы $\{a_{ij}\} = \{\rho_{ij}\}^{-1}$.

При некоторых предположениях относительно корреляционной матрицы $\{\rho_{ij}\}$ получены оценки снизу для I, по которым вычисляются $h = h_1 = h_2 = \ldots = h_p$ для P-процентного уровня значимости. Приведена таблица различных оценок и точные значения величины h для $p = 3$; 9 и $n = 5$; ∞; $P = 0{,}99$; 0,95; 0,75; 0,50.

В. С. Королюк

7514. О приближении функции распределения эмпирическим распределением. Блэкман (On the approximation of a distribution function by an empirie distribution. Blackman J.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 256—267 (англ.)

Пусть $F^*(x)$ есть эмпирическая функция распределения, построенная по n независимым наблюдениям случайной величины с функцией распределения $F(x)$. Обозначим через a_n минимум функции

$$H(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x - a) - F^*(x)|^2\, dF(x - a).$$

Доказана следующая теорема: Если первые три производные $F(x)$ непрерывны и ограничены, то

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}\,a_n < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\mu x}{\nu}} e^{-y^2/2}\,dy,$$

где

$$\nu^2 = \int_0^1 \left|\int_0^y F'(F^{-1}(t))\,dt - \int_0^y \frac{dx}{x^2}\int_0^x tF'(F^{-1}(t))\,dt\right|^2 dy,$$

$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} |F'(x)|^2\,dF(x)$, $F^{-1}(t)$ — обратная функция для $F(x)$. В. С. Королюк

7515. Смещение в оценке автокорреляции. Маррио тт, Поп (Bias in the estimation of autocorrelations. Marriott F. H. C., Pope J. A.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 390—402 (англ.)

Рассматриваются смещения порядковых коэффициентов корреляции для некоторых типов стационарных рядов. Порядковые коэффициенты корреляции определяются в случае, когда известно среднее значение m, соотношением

$$r_k^* = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - m)(x_{t+k} - m)}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - m)^2},$$

а в случае, когда среднее значение неизвестно, соотношением

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n-k}x_t x_{t+k} - \frac{1}{(n-k)^2}\left(\sum_{t=1}^{n-k}x_t\right)\left(\sum_{t=1}^{n-k}x_{t+k}\right)}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}x_t^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{t=1}^{n}x_t\right)^2}$$

Рассматриваются две схемы:

1) $x_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, где ε_t — независимые нормально (0,1) распределенные случайные величины. Для этого случая вычисляются $\left(\text{с точностью до величины порядка } \frac{1}{n^2}\right)$ математические ожидания и дисперсии r_k и r_k^*.

2) $x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$, где $|\rho| < 1$. Вычисляются $\left(\text{с точностью до величин порядка } \frac{1}{n^2}\right)$ Mr_k, Mr_k^*, Dr_k. (Как указывает автор, формула для дисперсии была получена Бартлетом (Bartlett M. S., J. Roy. Statist. Soc. Suppl., 1946, 8, 27)).

Результаты для r_1 и r_2 сравниваются с полученными выборочными распределениями этих коэффициентов и сравнение дает хорошее согласие теории и практики. С. Х. Туманян

7516. К теории несмещенных оценок. Б а с у (A note on the theory of unbiassed estimation. B a s u D.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 345—348 (англ.)

Несмещенной оценкой для функции $\mu(\theta)$ параметра θ, входящего в распределение вероятностей P_θ изучаемой случайной величины, называется такая функция $T_x = \int_{-\infty}^{\infty} t\,d\eta_x$ выборочной точки X, математическое ожидание которой при всех допустимых значениях θ равно $\mu(\theta)$. Здесь η_x — распределение вероятностей на прямой, зависящее от выборочной точки X. Несмещенная оценка считается тем лучшей, чем меньше соответствующая «функция риска» — математическое ожидание величины $\int_{-\infty}^{\infty} w(t,\theta)\,d\eta_x$, где $w(t,\theta)$ — заданная весовая функция. При $w(t,\theta) = (t-\theta)^2$ этот критерий сводится к сравнению дисперсий оценок.

Доказывается, что при использовании некоторого класса весовых функций $w(t,\theta)$ наилучших несмещенных оценок не существует. Именно, если $w(t,\theta)$ при любом θ на каждом конечном интервале $|t-\mu(\theta)| < A$ ограничена и при $|t-\mu(\theta)| \to \infty$ бесконечно мала по сравнению с $|t-\mu(\theta)|$, то нижняя грань функций риска для различных несмещенных оценок тождественно по θ равна нулю.

В качестве примера рассматривается оценка среднего значения нормальной совокупности с единичной дисперсией при использовании весовой функции, равной $(t-\theta)^2$ при $|t-\theta| \leqslant a$ и $a^{3/2}|t-\theta|^{1/2}$ при $|t-\theta| > a$, где a — сколь угодно большая постоянная. В этом примере незначительное изменение определения дисперсии приводит к тому, что наилучшей несмещенной оценки уже не существует. А. С. Монин

7517. Эффективность критериев. Хёффдинг, Розенблатт (The efficiency of tests. Hoeffding Wassily, Rosenblatt Joan Raup), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 1, 52—63 (англ.)

Пусть C — некоторое семейство функций распределения, C_i $(i=1,2)$ — непересекающиеся подмножества C. Требуется выбрать одну из гипотез $F \in C_i$ $(i=1,2)$ по результатам n независимых наблюдений $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ случайной величины (или вектора) с распределением F. Рассматриваются семейства критериев I следующего типа: принимается гипотеза $F \in C_1$ или $F \in C_2$ в зависимости от того, будет ли $t_n(X_n) \leqslant c$ или $t_n(X_n) > c$. Здесь $t_n(X)$ — заданная система функций, $n = 1, 2\ldots$. Пусть α_1, α_2 — два неотрицательных числа. Наименьшее значение n, при котором

$$\inf_{F\in C_1} P\{t_n(X_n) \leqslant c\,/\,F\} \geqslant 1-\alpha_1,$$

$$\inf_{F\in C_2} P\{t_n(X_n) > c/F\} \geqslant 1-\alpha_2,$$

называется индексом эффективности семейства критериев I (для задачи $(C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2)$. Это определение, в существенном принадлежащее Питмэну, обобщается и на более сложные случаи. В основном работа посвящена асимптотике индекса эффективности в случае близких классов C_i $(i=1,2)$. Пусть $\theta(F)$ — некоторый функционал от распределения F и $C_1 = \{F;\ \theta(F) \leqslant \theta_1\}$, $C_2 = \{F;\ \theta(F) \geqslant \theta_2\}$.

В предположениях, суть которых, кратко говоря, состоит в том, что некоторая функция от $t_n(X_n)$ имеет предельное распределение, удовлетворяющее определенным условиям регулярности, выводится асимптотическая формула для индекса эффективности вида

$$N(I) \sim \left[\frac{D(\alpha_1,\alpha_2)}{\theta_2-\theta_1}\right]^{\frac{1}{r_1}},\quad \theta_2 - \theta_1 \to 0.$$

Точные формулировки предположений и значения величин r, $D(\alpha_1, \alpha_2)$ громоздки и мы их опускаем. Приведены три примера асимптотических выражений для $N(I)$, в том числе и для одностороннего критерия согласия Колмогорова — Смирнова. И. И. Гихман

7518. k-выборочный критерий, не зависящий от распределения, при наличии упорядоченных альтернатив. Джонкир (A distribution-free k-sample test against ordered alternatives. Jonckheere A. R.), Biometrika, 1954, 41, № 1, 2, 133—145 (англ.)

Пусть $(X_{11}, \ldots, X_{1m_1}), \ldots, (X_{k1}, \ldots, X_{km_k})$ — k выборок размера $m_1, m_2, \ldots, m_k$, извлеченных из непрерывных распределений $F_1(X), \ldots, F_k(X)$ соответствен-

но. Для проверки гипотезы $F_i(X) = F_j(X)$ $(i, j = 1, \ldots, k;$ $i \neq j)$ при наличии альтернативной гипотезы $F_1(X) < F_2(X) < \ldots < F_k(X)$ при всех X предлагается следующий критерий S, основанный на числе наблюдений p_{ij} в i-й выборке, меньших каждого из наблюдений в j-й выборке $(i < j)$. Пусть

$$p_{i\alpha_i j\alpha_j} = \begin{cases} 1, & \text{если } X_{i\alpha_i} < X_{j\alpha_j}; \\ 0, & \text{если } X_{i\alpha_i} > X_{j\alpha_j}, \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, k-1;\ j = 1+i;\ \alpha_i = 1, \ldots, m_i,\ \alpha_j = 1, \ldots, m_j)$,

$$p_{ij} = \sum_{\alpha_i=1}^{m_i} \sum_{\alpha_j=1}^{m_j} p_{i\alpha_i j\alpha_j}.$$

Положим

$$S = 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1+i}^{k} p_{ij} - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1+i}^{k} m_i m_j.$$

Приводятся таблицы для точного распределения S при $k = 3, 4, 5, 6$ в случае выборок равного размера $\leqslant 5$. Исследуется вопрос об асимптотическом поведении S.

Е. Л. Ющенко

7519. Критерий долговечности. Эпстейн, Собел (Life testing. Epstein Benjamin, Sobel Milton), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 486—502 (англ.)

В некоторых приложениях математической статистики, например в вопросах, касающихся проверки долговечности, износа оборудования и др., экспериментальные данные представляют собой упорядоченные выборки. Таково будет, например, положение, если некоторое число ламп одновременно включается с целью оценить продолжительность их горения.

Рассматривается вопрос проверки статистической гипотезы $\theta = \theta_1$ при противоположной гипотезе $\theta = \theta_2 < \theta_1$ в случае, когда распределение в генеральной совокупности экспоненциально

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0,$$

и наблюдения и являются в возрастающем порядке. Для проверки указанной гипотезы предлагается критерий

$$\hat{\theta}_{r,n} = \frac{x_{1,n} + \ldots + x_{r,n} + (n-r)\, x_{r,n}}{r},$$

где $x_{1,n} \leqslant x_{2,n} \leqslant \ldots \leqslant x_{r,n} \leqslant \ldots \leqslant x_{n,n}$ и $x_{i,n}$ обозначает i-е наблюдение в выборке из n образцов. При этом наблюдения прекращаются после получения первых r результатов. Доказывается теорема: Оценка $\hat{\theta}_{r,n}$ является лучшей в смысле максимума правдоподобия, несмещенной, с минимальной дисперсией, эффективной и достаточной. Величина $2r\hat{\theta}_{r,n}/\theta$ распределена как χ^2 с $2r$ степенями свободы и не зависит от размера выборки n.

Кроме того, рассматривается возможность проверки указанной гипотезы с помощью критерия, основанного на единственном $x_{k,n}$ — k-м наблюдении из упорядоченной выборки в n образцов.

Автор указывает, что результаты могут быть обобщены на случай, когда исходная случайная величина имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-g(x)/\theta}, & x > 0\ (\theta > 0), \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $g(x)$ — строго неубывающая функция. Е. Л. Ющенко

7520. Вывод точного выборочного распределения размаха из дискретной совокупности. Берр (Calculation of exact sampling distribution of ranges from a discrete population. Burr Irving W.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 530—532 (англ.)

Приводится способ определения точного выборочного распределения размаха из дискретной совокупности, заданной на конечном интервале. С. Х. Туманян

7521. Эффективность стохастического предсказания. Огавара (Efficiency of a stochastic prediction. Ogawara M.), Papers Meteorol. and. Geophys., 1955, 5, № 3—4, 203—211 (англ.)

Пусть y — «погода» и пусть $L(c, y)$ — убыток, который приходится терпеть, несмотря на защитные мероприятия, проведенные в ожидании этой погоды, c — стоимость этих мероприятий. Пусть $F(y)$ — распределение вероятностей y и пусть $R(c, y) = c + L(c, y)$. Найдем $c = c_k$, при котором $R_k(c) = \int R(c, y)\, dF(y)$ принимает минимальное значение.

Под стохастическим предсказанием понимается формально определенное распределение вероятностей $F(y/x)$ при условии x. Пусть найдена $c(x)$, для которой $R_s(c, x) = \int R(c, y)\, dF(y/x)$ минимальна при каждом x. Пусть $G(x)$ — распределение вероятностей в множестве условий x и $R_s = \int R_s(c, x)\, dG(x)$.

Под эффективностью предсказания понимается $l_s = (R_k(c_k) - R_s)/R_k(c_k)$.

Автор рассматривает несколько конкретных примеров, для которых вычисляет эффективность предсказания.

В. Г. Винокуров

7522. Доверительная область для решения системы нескольких уравнений и ее применение к планированию эксперимента. Бокс, Хантер (A confidence region for the solution of a set of simultaneous equations with an application to experimental design. Box G. E. P., Hunter J. S.), Biometrika, 1954, 41, № 1—2, 190—199 (англ.)

Пусть имеется система k линейных уравнений

$$a_{i0} + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ik}x_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

причем коэффициенты a_{ij} $(j = 0, 1, \ldots, k)$ содержат случайные ошибки, совместное распределение которых является нормальным. Матрица вторых моментов этого распределения $\Omega\sigma^2$ предполагается известной, с точностью до множителя σ^2.

Несложным рассуждением найдена доверительная область для решения этой системы. При дополнительном предположении о том, что величины a_{ij} некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, построены примеры доверительных областей для случая $k = 2$. Один из них использует результаты факториального эксперимента. Все разобранные примеры иллюстрируются фигурами. В. В. Петров

7523. О сравнении двух средних. Дальнейшее обсуждение итерационных методов для вычисления таблиц. Трикетт, Уэлш (On the comparison of two means. further discussion of iterative methods for calculating tables. Trickett W. H., Welch B. L.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 361—374 (англ.)

Пусть имеются две независимые выборки объемов n_i $(i = 1, 2)$ из нормальных совокупностей с параметрами $(\bar{X}_i, \sigma_i)$ и их выборочными оценками $(\bar{x}_i, s_i)$ соответственно. Для оценки разности $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ в том случае, когда σ_i неизвестны, можно использовать обычную характеристику: $v = [(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)] / \sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}$. Распределение v, найденное автором, при данных n_i зависит от величины $\gamma = (\sigma_1^2/n)/(\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$; для данных

P, n_1, n_2 и γ существует такое $v_0 = \Phi(\gamma, n_1, n_2, P)$, что $P\{v < v_0\} = P$. Не зная γ, мы можем приближенно оценить эту величину с помощью характеристики $c = (s_1^2/n_1)/(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)$ и тогда лишь с некоторым приближением считать, что $P\{v < \Phi(c, n_1, n_2, P)\} = P$. Автор, следуя этому пути, ищет такую функцию $v(c)$, которая при любом γ точно удовлетворяет равенству $P(v < v(c)) = P$. Разыскание $v(c)$ приводится к решению нелинейного интегрального уравнения. Автор рассматривает два итерационных метода численного решения этого уравнения, позволяющих составить необходимые для практики таблицы. Н. В. Смирнов

7524. Сочетание оценок по различным экспериментам. Кокран (The combination of estimates from different experiments. Cochran W. G.), Biometrics, 1954, 10, № 1, 101—129 (англ.)

Пусть имеется ряд оценок x_i величины μ и соответствующих оценок s_i стандартного уклонения величины μ, полученных в результате различных экспериментов. Исследуется вопрос о сочетании этих оценок в виде взвешенного среднего как в случае, когда условия, при которых проводятся отдельные эксперименты, близки между собою, так и в случае, когда это не имеет места, или отдельные результаты обладают различной точностью. Обсуждаются обстоятельства, при которых подходящим для оценки является среднее взвешенное, и случаи, когда должно быть дано предпочтение невзвешенному среднему. Приводятся рекомендации практического характера. Е. Л. Ющенко

7525. Оценка параметров усеченного и цензурированного экспоненциального распределения. Димер, Вотау (Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions. Deemer Walter L. Jr, Votaw David F., Jr), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 3, 498—504 (англ.)

Даются оценки максимального правдоподобия параметров усеченного и цензурированного экспоненциального распределения, асимптотическая вариация оценок и асимптотические доверительные интервалы. Полученные результаты имеют приложение к изучению точности бомбометания и в других вопросах. Р. Х. Дивеев

7526. Об оценке параметров совокупности, состоящей из помеченных членов. Галленд (On the estimation of population parameters from marked members. Gulland J. A.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 269—270 (англ.)

Небольшая заметка, посвященная оценке двух коэффициентов смертности помеченных и вновь возвращенных в озеро рыб методом максимума правдоподобия. Р. Х. Дивеев

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

7527. О некоторых вариационных задачах, встречающихся в теории динамического программирования. Белман, Гликсберг, Гросс (On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming. Bellman Richard, Glicksberg Irving, Gross Oliver), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 3, 363—397 (англ.)

§ 1 носит вводный характер. В § 2 изучаются и решаются следующие задачи о минимуме функционалов в L^2:

$$\min_L \{\|g + Af\|^2 + a\|f\|^2\}, \quad \min_{\|f\|^2 \leqslant c} \|g + Af\|^2, \quad \min_{\|g + Af\|^2 \leqslant c} \|f\|^2.$$

Здесь $g \in L^2$, A — ограниченный линейный оператор в L^2, a и c — заданные положительные числа. В § 3 рассматривается задача: пусть вектор $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^N$ определяется из системы

$$x' = Bx + f; \quad x(0) = c, \tag{1}$$

где $B = \{b_{ij}\}_{i,\,j=1}^N$ — постоянная матрица, $f(t) = \{f_i(t)\}_{i=1}^N$; требуется найти минимум $J_a(f) = \int_0^T \sum_{i=1}^N (x_i - c_i)^2\,dt + a\int_0^T \sum_{i=1}^N f_i^2\,dt$. Эта задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. В §§ 4 и 5 указывается, что при замене системы (1) на систему разностных уравнений дело обстоит совершенно аналогично, а случай системы дифференциально-разностных уравнений будет рассмотрен отдельно ввиду наличия некоторых дополнительных трудностей. В § 6 решается вспомогательная задача о нахождении необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять матрица B, для того, чтобы все координаты $x(t)$, находимые из (1), были неотрицательны для $t > 0$, как только неотрицательны все координаты c и f. Искомые условия: $b_{ij} \geqslant 0$ при $i \neq j$. В § 7 решается имеющая простой экономический смысл задача: определить $y_i(t)$ так, чтобы получить максимум интеграла $\int_0^T \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)\,dt$ при условиях: $x_i' = \sum_{i=1}^N a_{ij}y_j$; $x_i(0) = c_i$; $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$. В § 8 решаются задачи на нахождение $\min \int_0^T (1 - x^2)\,dt$ и $\min \int_0^T (dx/dt)^2\,dt$ при одинаковых условиях; $x' = -x + f$; $x(0) = 1$; $\int_0^T f\,dt \leqslant a < T$; $0 \leqslant f \leqslant M$ $(M > 1)$. § 9 посвящен нахождению $\min \max_t |1 - x(t)|$ при условиях $x' = -x + f$; $x(0) = 1$, $\int_0^T f\,dt \leqslant a$. М. К. Гавурин

7528. Математическое программирование. Лехмускоски (Matemaattinen ohjelmointi. Lehmuskoski M. J.), Tekn. aikakauslehti, 1956, 46, № 2, 37—38 (фин.)

Обзорная статья о линейном программировании (см. например, РЖМат, 1955, 2409; 1956, 1557). Строятся примеры, показывающие, что требующий много вычислений метод симплекса иногда можно заменить некоторым неаналитическим методом (см. Melden M. G., Operations Research, Factory Management and Maintenance, Octobre, 1953). В. А. Статулявичус

7529. Непрерывные игры с совершенной информацией. Земба А., Бюл. Польской АН, 1955, Отд. 3, 3, № 10, 509—511

Непрерывные игры с совершенной информацией. Земба (Continuous games with perfect information. Zięba A.), Bull. Acad. Polon. sci., 1955, cl. 3, 3, № 10, 515—518

Непрерывные игры рассматривались ранее Штейнгаузом (Steinhaus H., Definicje potrzebne do teorii gry i pościgu, Zlota Mysl Akademicka, Lwow, 1929). Приводится пример непрерывной открытой (см. РЖМат, 1956, 4711, 4717) игры, не являющейся вполне определенной. О. В. Шалаевский

7530. Смешанные стратегии в действии. Бересфорд, Пестон (A mixed strategy in action. Beresford R. S., Peston M. H.), Operat. Res. Quart., 1955, 6, № 4, 173—175 (англ.)

Описывается использование интуитивно угаданной оптимальной смешанной стратегии в условиях одной военной задачи. Н. Н. Воробьев

7531. Одно обобщение теории игр и экономического поведения. Й о н г (An extension of the theory of games and economic behaviour. J o n g h B. H. d e), Verzekerings-Arch. Actuarieel Bijvoegsel, 1953, 30, 54—61) (англ.)

Автор критикует определение Неймана и Моргенстерна оптимальной стратегии для нулевой игры двух лиц на основании того, что «объект с наибольшим математическим ожиданием не обязательно является максимально выгодным». Поступая таким образом, автор приходит к отрицанию их рассуждений, касающихся выгоды, в которых вторичные критерии, такие, как дисперсия, сведены к числовым показателям выгоды, рассматриваемым как платежи. В этом свете замечания автора сводятся к предложению о том, как может быть построена такая измеримая выгода. Применение высших моментов не является новым (см. например, Fondements et applications de la théorie du risque en économetrie, Colloques internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique № 40, Paris, 1954). H. W. Kuhn

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 3, 273

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

7532. Об одной задаче теории вероятностей, связанной с контролем плавности закруглений железнодорожного пути. Р ы в к и н М. С., Уч. зап. Новосибир. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 69—83

Пусть возможные результаты измерения значений X_k — случайные величины ξ_k, следующие нормальным законам распределения со средними значениями X_k и одним и тем же стандартом σ. Требуется определить σ так, чтобы для заданных Δ и α

$$P(|\xi_i-\xi_j|<\Delta \mid |X_i-X_j|>\Delta)=\alpha.$$

Так может быть сформулирована задача, которую автор рассматривает при дополнительном предположении, что X_k являются значениями нормальной случайной величины, с известным стандартом. Применительно к конкретной технической задаче, решаемой в статье, такое предположение вряд ли правомерно.

Приводимое решение излишне сложно. Его можно существенно упростить, например, введя в рассмотрение закон распределения модуля разности двух нормальных случайных величин. Г. И. Егудин

7533. О потоках событий, порожденных процессом Пуассона. Т а к а ч Л. (On processes of happenings generated by means of a Poisson process. T a k á c s L a j o s), Acta math. Acad. sci. hung., 1955, 6, № 1—2, 81—99 (англ.; рез. русс.)

Рассматривается m одинаковых независимых случайных процессов, каждый из которых устроен как телефонная линия с одним проводом. Вызовы, поступающие на линию, образуют процесс Пуассона с параметром p, причем, если линия свободна, то в момент вызова начинается разговор со случайной длительностью. Длительности последовательных разговоров независимы и обладают общей функцией распределения $H(x)$. Говорим, что система из m процессов находится в момент t в состоянии E_j, если число занятых линий равно j.

Изучается число переходов за время t из состояния E_0 в состояние E_1, а также время, проведенное вне состояния E_0 за промежуток времени t. Эти проблемы изучаются для отрезков времени $[0, t]$ и для $[n, n+t]$ с последующим предельным переходом $n \to \infty$.

Определение функций распределения этих величин приводится к определению функций распределения интервала времени между последовательными переходами $E_0 \to E_1$. Преобразование Лапласа этой последней есть

$$\varphi(s)=1-\frac{p^m}{mp+s}\left[\int_0^\infty e^{-st}(f(t))^m dt\right]^{-1},$$

где $f(t)$ — плотность вероятности начала разговора в момент t — удовлетворяет следующему интегральному уравнению типа Вольтерра

$$f(t)=p-p\int_0^t f(t-x)(1-H(x))\,dx.$$

Во второй части работы исследуется процесс Пуассона с параметром λ. Все события этого процесса можно рассматривать как вызовы, за каждым из которых следует разговор. Длительности подчиняются тем же условиям, что и раньше. Снова говорим, что система находится в состоянии E_j, если число текущих разговоров равно j. Этот процесс получается из описанного выше, если провести предельный переход $p \to 0$ и $m \to \infty$ при $mp=\lambda$. Для этого процесса решаются те же задачи, что и для прежнего, причем для $\varphi(s)$ получается формула

$$\varphi(s)=1-\frac{1}{\lambda+s}\left[\int_0^\infty e^{-st-\lambda\int_0^t(1-H(x))dx}\,dt\right]^{-1}.$$

Вышеописанные процессы играют важную роль при решении проблем, связанных с теорией счетчиков частиц. В предыдущей работе автора (Acta math. Acad. sci. hung., 1951, 2, 275—298) были найдены средние тех величин, которые изучаются в настоящей работе. В. А. Волконский

7534. Контрольные диаграммы с предупредительными линиями. П е й д ж (Control charts with warning lines. P a g e E. S.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 243—257 (англ.)

Рассматриваются диаграммы, применяемые для контроля хода производства с нанесенными на них линиями «действия»

$$\mu \pm B_1 \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

и линиями «предупреждения»

$$\mu \pm B_2 \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

где μ — средняя линия допуска.

Общая схема контроля (схема I) такова: назначаются целые числа $k \geqslant 2$; $n \geqslant k$ и $N \geqslant 1$. Берутся выборки объема N. Если средняя в последней выборке не выходит за линии действия и, кроме того, менее чем k средних, полученных в последних n выборках, находятся вне предупредительных линий, то процесс производства продолжается. В противоположных случаях предпринимается «действие» (подналадка или переналадка станка и т. п.). Показано, что при $k=2$; $a=1$; $b=n-1$; $c=n$ и $h=n$ (схема III), а также при $k=n$; $a=n-1$; $b=1$; $c=n$ и $h=n$ (схема IV) схема I эквивалентна последовательному контролю, проводимому по схеме II.

Схема II: Предпринимается «действие» если выполняется одно из неравенств

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{n-i} > h,$$

где $x = -a < 0$, если выборочная средняя находится внутри предупредительных линий; $x = b > 0$, если выборочная средняя лежит между предупредительными линиями и линиями действия; $x = c > b$, если выборочная средняя лежит вне линий действия. Для схем III и IV находятся формулы для вычисления математического ожидания числа изделий, проверяемых между двумя «действиями» L, в предположении нормального распределения с дисперсией σ и генеральной средней $\bar{x}_0 = \mu \pm \lambda\sigma$. Если значения L для $\bar{x}_0 = \mu \pm 0{,}4\ \sigma$ и $\bar{x}_0 = \mu \pm 0{,}8\ \sigma$ равны соответственно 100 и 25, то оптимальным методом контроля, обеспечивающим максимум L при $\lambda = 0$, будет контроль при $B_1 = 2{,}875$; $B_2 = 1{,}5$; $n = k = 3$ (В тексте опечатка — указано, что $k = 4$). Даются таблицы значений L для ряда n, B_1 и B_2, необходимые для практического применения схемы IV. Наконец показано, что контроль по двум показателям: средней и дисперсии (0 дисперсии судят по выборочному значению размаха $R = x_{max} - x_{min}$), может быть заменен контролем по следующей схеме (схема V):

Предпринимается действие: 1) если одна из выборочных средних будет за линиями действия; 2) если n последовательных средних будут вне предупредительных линий; 3) если две из n последовательных средних находятся вне противоположных предупредительных линий.

Для этой схемы определяется объем инспекции при $x_0 = \mu \pm \lambda\sigma$ и для $\sigma' = k\sigma$ проводится сравнение с контролем по среднему размаху; а также с контролем по среднему и размаху для $N = 5$ и, для этого значения N, даются краткие таблицы значений L при различных B_1, B_2, λ и k. М. И. Эйдельнант

См. также: 7363, 7424, 7714, 7743, 7832

ГЕОМЕТРИЯ

7535. Изменение взглядов на геометрию. Ходж (Changing views of geometry. Hodge W. V. D.), Mat. Gaz., 1955, **39**, № 329, 177—183 (англ.)

Обращение Ходжа к Математической ассоциации в качестве ее президента (январь 1954 —апрель 1955 г.). Рассматривается в популярной форме вопрос о сущности геометрии; в частности высказывается точка зрения на отрицательную роль эрлангенской программы Клейна, сузившей взгляд на геометрию и потом приведшей в свое время к ее отрыву от анализа. Развитие геометрии в духе теории многообразий рассматривается, как шаг к сближению различных областей математики, имеющий большое значение для ее дальнейшего развития. Излагаются некоторые соображения, относящиеся к преподаванию геометрии.

В. В. Рыжков

7536. Предмет геометрии. Бергхёйс (L'objet de la géométrie. Berghuys J. J. W.), Synthese, 1954, **9**, № 6, 395—407 (франц.)

Доклад на нидерландской конференции по логике и философии естествознания (Eindhoven, 1953). Вновь ставится вопрос о взаимоотношении между абстрактными геометрическими фигурами и их изображениями (чертежами, моделями). Поскольку первые не адэкватны последним, чем же занимается, например, школьная геометрия с ее обязательными чертежами? В историческом и философском аспектах высказываются не новые уже мысли в духе известного тезиса А. Пуанкаре (о котором автор не упоминает): геометрия создана не из опыта, но по поводу опыта.

Я. С. Дубнов

7537. Признак параллелограмма. Параллелограмм или не параллелограмм? Гант (Conditon for parallelogram. When is a parallelogram not a parallelogram? Gant P.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 329, 191—195 (англ.)

Доказывается, что если четырехугольник $ABCD$ имеет две равные противоположные стороны ($AB = CD$) и два равных противоположных угла ($\angle B = \angle D = \alpha$), то при $\alpha \geqslant 90°$ $ABCD$ может быть только параллелограммом, а при $\alpha < 90°$, кроме параллелограмма $ABCD$, существует еще один четырехугольник $ABCD'$, удовлетворяющий вышеуказанному условию.

Далее рассматривается $\triangle ABX$, где AB — данный отрезок и $\angle A = \angle X = \alpha$, причем точка C лежит на BX. Если точка C движется по прямой BX, то вершины D и D' искомых четырехугольников $ABCD$ и $ABCD'$ тоже перемещаются. Автор приходит к заключению, что геометрическое место вершин D параллелограммов $ABCD$ будет прямая, параллельная BX и проходящая через A, а геометрическое место вершин D' четырехугольников $ABCD'$ будет кривая третьего порядка. Если начало координат поместить в точку X, а ось абсцисс направить по прямой XB, то уравнение этой кривой будет $y^3 + x^2y + m(x^2 - y^2) - 2xy = 0$. Н. В. Наумович

7538. Почему мы измеряем в евклидовой геометрии углы трансцендентными функциями, тогда как длины — алгебраическими функциями? Пинль (Warum messen wir in der euklidischen Geometrie Winkel durch transzendente Funktionen, Längen jedoch durch algebraische Funktionen? Pinl M.), Math.-phys. Semesterber., 1955, **4**, № 3—4, 263—269 (нем.)

Автор считает, что его работа комментирует изречение Бека: «Евклидова геометрия состоит из обломков эллиптической геометрии». Рассматривая принцип двойственности в проективной геометрии, автор показывает, что абсолютные образы эллиптической геометрии двойственны, тогда как абсолютные образы евклидовой геометрии лишены двойственности. Рассматривая уравнения кривых второго класса $\lambda^2 u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = 0$ и соответствующих кривых второго порядка $x_0^2 + \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$, автор заключает, что на различии рангов этих квадратичных форм при $\lambda \to 0$ базируется различие в измерении длин и углов в евклидовой геометрии. С. И. Зетель

7539. О преподавании теории кривых второго порядка в педагогических институтах. Выгодский М. Я., Уч. зап. Тульск. гос. пед. ин-та, 1954, № 5, 198—212

Приведены возражения против широкого применения теории инвариантов кривых второго порядка (и поверхностей второго порядка) относительно преобразований декартовой прямоугольной системы координат, которое имеет место в преподавании аналитической геометрии в педагогических институтах (громоздкость самой теории, шаблон в решении последующих задач и т. п.). Изложено упрощение уравнения кривой второго порядка с помощью непосредственного преобразования системы координат (а) поворот осей; б) перенос начала). В. Т. Базылев

7540. Идея геометрического преобразования в школьном курсе математики. Зельцман В. Б., Уч. зап. Кишиневск. гос. пед. ин-та, 1955, **3**, 29—44

Обосновывается важность использования идеи геометрических преобразований в школьном преподавании с точки зрения методологической, научно-теоретической и методической. Рекомендуется ввести в 8 классе при изложении преобразования подобия точное определение преобразования как перехода от точек одной фигуры к соответствующим точкам другой. Отдельно рассмотрены осевая и центральная симметрия, вращение около точки, параллельный перенос с точки зрения методики изложения этих вопросов в курсе геометрии 6 и 7 классов.

Задачам и примерам, иллюстрирующим важность применения геометрических преобразований при доказательствах теорем и в построениях, уделено мало внимания. З. А. Скопец

7541. Новые шаги по следам Архимеда. Лоран (Nouveaux pas sur les traces d'Archimède. Lorent H.), Mathesis, 1955, **64**, № 3—5, 128—132 (франц.)

Отношение площади полной поверхности, полученной вращением равностороннего треугольника вокруг высоты, к площади шаровой поверхности, описанной кругом, вписанным в треугольник, равно отношению объема тела вращения к объему шара (соотношение Архимеда). Показано, что равенство отношений сохраняется при замене равностороннего треугольника равнобедренным.

Для равнобочной трапеции, описанной около круга радиуса r с основаниями $2a$ и $2x$, соотношение Архимеда сохраняет силу, если $x = r^2/a$. При замене вписанного круга вневписанным соотношения Архимеда не существуют ни для равностороннего, ни для равнобедренных треугольников. С. И. Зетель

7542. Теорема о правильных многоугольниках. Рабин (A theorem on regular polygons. Rabin Michael), Riveon Lematematika, 1954, **8**, 13—15, (англ.)

Ни один правильный n-угольник не может иметь все свои вершины в квадратной решетке, кроме $n = 4$. Это вытекает из того факта, что площадь будет рациональной и в то же время рациональным кратным от $\operatorname{ctg}\pi/n$. E. G. Straus

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 4, 393.

7543. О геометрии тетраэдра. Тебо (Sur la géométrie du tétraèdre. Thébault V.), Mathesis, 1955, **64**, № 3—5, suppl. 1—16 (франц.)

Исследуются тетраэдры частного вида. Они характеризуются особенностями расположения отдельных точек или плоскостей, таких, как точка, симметричная с центром описанного шара относительно центра тяжести тетраэдра; биссекторные плоскости двугранных углов; центр тяжести масс, равных квадратам ребер и сосредоточенных в середине этих ребер, и т. п. Библ. 10 назв. В. А. Залгаллер

7544. О вычислительных формулах для кривизны и кручения кривой. Шингуров О. П., Уч. Зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1955, **1**, 117—126

Даются вычислительные формулы для кривизны плоской кривой и для кривизны и кручения пространственной кривой во всех случаях расположения кривой по отношению к сопровождающему реперу, в частности, в случаях точек перегиба и точек возврата плоской кривой и их пространственных аналогов (РЖМат, 1956, 6092). Б. А. Розенфельд

7545. К вопросу о связи между уравнениями кривых на поверхностях и их развертках. Сенютович В. А., Сб. тр общетехн. кафедр. Ленингр. ин-та холодильной пром-сти, 1955, **8**, 50—54

Аналитически определяется вид кривой, получающейся на развертке по виду кривой, лежащей на развертываемом цилиндре или конусе, а также даётся решение обратной задачи. Устанавливаются формулы связи между координатами точки на поверхности (круговой цилиндр, конус) и координатами соответствующей точки на развертке. Приводятся примеры на прямую и обратную задачи. С. И. Зетель

7546. Курс геометрии. Сен (A course of geometry. Sen R. N.), Calcutta University Press, Calcutta, 1953, XXXVI + 311 pp., 12 rupees) (англ.)

Книга представляет простое, но строгое изложение следующих разделов: векторные пространства, матрицы, системы линейных уравнений, определители, линейные преобразования, теория групп (краткое введение), векторы и углы на плоскости, площадь треугольника, сложное отношение, гармоническая сопряженность, движения, конические сечения (общие и канонические уравнения, фокусы и директрисы), лагерровское определение угла, гомотетия и конгруэнтность (с необычным названием «гребное движение» для сдвига), инверсия, полярное соответствие, аффинитеты (включая простые растяжения и сжатия), классификация конических сечений, сопряженные диаметры, проективные пучки линий, инволюции, четырехугольник и четырехсторонник, однородные координаты, коллинеации и корреляции, линейная и квадратичная зависимость, теоремы Паскаля и Брианшона, пучки конических сечений, инварианты пары конических сечений, трилинейные и ареальные координаты, векторы в трехмерном пространстве, прямые и плоскости, двойственность, координаты прямой, секущие трех скрещивающихся прямых, гомологии, теорема Дезарга, группы преобразований, эрлангенская программа, связки и конусы, полярность и нуль-система, круг в бесконечности, ортогональные преобразования, классификация кривых второго порядка, софокусные кривые, приведение общей квадратичной формы к нормальному виду.

Как видно из этого содержания, здесь охвачен более обширный материал, чем в большинстве элементарных руководств. Книга хорошо напечатана, снабжена хорошими чертежами, пояснительными примерами и указателем. H. S. M. Coxeter

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 4, 339—340

7547 К. Абсолютная геометрия. Мацухара (絶對幾何. 松原元一等・研數書院, 2 月, 678, 圓 450 (Кенсу-сётон), 1955, 678 стр., 450 иен.)

7548 К. Элементарная координатная геометрия. Максуэлл (Elementary coordination geometry. Maxwell Edwin Arthur. Adapted for use in Australia by F. Chong. Abridg. Austr. ed. Melbourne, London, Oxford Univ. Press, 1955, VIII, 119 pp., ill. 12 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 289, 8 (англ.)

7549 К. Краткий курс аналитической геометрии. Манолов (Кратък курс по аналитична геометрия. Манолов Спас. София, Земиздат, 1955, 256 стр., 9.50 лв.) (болг.)

7550 К. Учебник по векторной алгебре (с приложениями.) Нараян (A text book of vector algebra (with applications). Narayan Shanti, S. Chand and Co., Dehli, 1954, iv + 190 pp., 5/4 0 rupees), Math. Revs., 1955, **16**, № 4, 342 (англ.)

7551 К. Элементарный векторный анализ. Уэтерберн (Elementary vector analysis. New and rev. ed. Weatherburn Charles Ernest. London, Bell, 1955, xi, 191 pp, ill., 16sh). Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 292, 12 (англ.)

7552 К. Векторный анализ. Ньюэлл (Vector analysis. Newell Homer, Edward. New York—London, McGraw-Hill, 1955, xi, 216 pp., ill, 41 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 318, 6 (англ.)

7553 К. Аналитическая геометрия. Привалов И. И. Учебник для высш. техн. учеб. заведений.

Изд. 21-е, стереотип. М., Гостехиздат, 1956, 299, стр., илл., 6 р. 90 к.

7554 Д. Основные идеи теории конфигураций второго порядка в геометриях над полями. Канненберг (Grundgedanken einer Theorie der Gebilde zweiter Ordnung in Schiefkörpergeometrien. Kannenberg Rüdiger. Diss. Math.-naturwiss. F., Bonn, 1954, 99 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 19, 1379 (нем.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

7555. Геометрическая интерпретация ротора и приложения к астатическим системам. Стоппелли (Una rappresentazione geometrica dei rotori e sue applicazioni all'astatica. Stoppelli Francesco), Ricerche mat., 1954, 3, № 1, 95—107 (итал.)

7556. Понятие тензора и его значение для физики. Душек (Der Tensorbegriff und seine Bedeutung für die Physik. Duschek Adalbert), Phys. Bl., 1954, 10, 436—444 (нем.)

7557. Понятие тензора и его значение для физики. Тензорный анализ. Душек (Der Tensorbegriff und seine Bedeutung für die Physik. Tensoranalysis. Duschek Adalbert), Phys. Bl., 1955, 11, 5, 203—215 (нем.)

Третья и последняя часть обзорной работы по тензорному исчислению (РЖМат, 1955, 4685). В § 11 рассмотрены правила дифференцирования тензоров по времени и по координатам, подчеркивается векторный характер оператора $\partial/\partial x_i$. Определен градиент, дивергенция и вихрь ($R_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$). Отмечаются тождества для операций дифференцирования второго порядка такие, например, как grad div — rot rot = $= \Delta$. В § 12 основные операции тензорного анализа рассматриваются в криволинейных координатах евклидова пространства. В § 13 рассмотрены параллельный перенос и кривизна пространства Римана. В § 14 содержатся общие высказывания о пользе тензорного исчисления для физики и отмечается желательность индексных обозначений в векторном исчислении.

И. С. Аржаных

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7558. Обобщенные теоремы Дезарга для n-мерного проективного пространства. Белл (Generalized theorems of Desargues for n-dimensional projective space. Bell P. O.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 6, 675—681 (англ.)

Даются обобщения прямой и обратной теорем Дезарга для n-мерного проективного пространства. Обобщенная прямая теорема: Если два симплекса $A_1, A_2 \ldots A_n$ и $A_1', A_2' \ldots A_n'$ находятся в перспективе относительно точки φ и если A_j не совпадает с A_j' для $k < j \leqslant n$, то существует точка P_{ij}, общая прямым A_iA_j, $A_i'A_j'$, $k < i < j$, и эта точка линейно зависит от точек $P_{i,\,i+1}P_{i+1,\,i+2}, \ldots, P_{j-1,\,j}$.

Е. С. Тихомирова

7559. Овалы, двойственность и теорема Дезарга. Остром (Ovals, dualities, and Desargues's theorem. Ostrom T. G.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 4, 417—431 (англ.)

Статья посвящена изучению овалов и полярности в конечных проективных плоскостях с $n+1$ точкой на каждой прямой. Под овалом понимается множество, состоящее из $n+1$ точки, никакие три из которых не коллинеарны. Рассматриваются свойства коллинеаций, переводящих овал в себя. Изучаются некоторые свойства овалов в недезарговых плоскостях, аналогичные свойствам конических сечений в дезарговых плоскостях. Полученные результаты применяются к случаю, когда овал состоит из абсолютных точек полярности. Далее рассматриваются овалы в транзитивных плоскостях. Всюду, кроме § 5, n предполагается нечетным.

Е. С. Тихомирова

7560. О точечном преобразовании между совмещенными проективными пространствами в окрестности общей точки. Кантони (Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti nell' intorno di un punto unito. Cantoni Lionello), Boll Unione mat. ital., 1955, 10, № 2, 212—223 (итал.)

Следуя работам Вилла (Villa M., Atti acad. naz. Lincei, Lincei, 1948, 4, № 8, 55—61) и его школы, автор рассматривает преобразование (T) $x'^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$ между двумя совмещенными проективными пространствами S_r, S_r', в окрестности общей точки O из T и ищет с помощью проективной группы каноническую форму преобразования T.

Если взять точку O за начало координат, то преобразование T, если проективное соответствие $T(O)$, порождаемое преобразованием T в звезде O — общего вида, можно записать в форме:

$$x'^i = a^i x^i + a^i_{jk} x^j x^k + \ldots, \qquad (1)$$

где a^i — не равные нулю постоянные и ненаписанные члены не ниже 3-го порядка.

С геометрической точки зрения это приводит к выбору осей координат в точке O в качестве двойных прямых гомографии $T(O)$. Посредством проективного преобразования

$$x^i = \frac{\lambda^i y^i}{1 + \beta_1 y^1 + \ldots + \beta_r y^r},$$

$$x'^i = \frac{\lambda^i y'^i}{1 + \beta_1 y'^1 + \ldots + \beta_r y'^r},$$

приложенного одновременно к переменным x^i и x'^i, формулы (1) принимают вид:

$$y'^i = a^i y^i + B^i_{jk} y^j y^k + \ldots$$

Это нам говорит, что a^i являются абсолютными инвариантами. Мы имеем также:

$$2B^i_{jk} = a^i \beta_k s^i_j (a^k - 1) + a^i \beta_j \delta^i_k (a^j - 1) + 2b^j_{jk} \lambda^j \lambda^k / \lambda^i.$$

Отсюда следует, что при всех $a^i \neq 1$ можно использовать β_i для приведения к нулю количеств B^i_{ii}.

С геометрической точки зрения, если $a^1 \neq 1$, то если проективитет, соприкасающийся к преобразованию T вдоль оси b $x^1 (x^2 = \ldots = x^n = 0)$

$$x' = \frac{(a^1)^2 x}{a^1 - b^1_{11} x}$$

имеет двойную точку A_1, кроме начала, и если выбрать гиперплоскость $(A_1, \ldots, A_r)$ как несобственную гиперплоскость, то это приводит к предположению, что все $b^1_{11}, \ldots, b^r_{rr}$ равны нулю. Чтобы определить теперь λ^i, налагаются условия $\sum_{i=1}^{n} {}_{j,k} B^i_{jk} = a^i \lambda^i$, которые получают геометрическую интерпретацию с помощью характеристических прямых. Если одна из констант a^i, на-

пример a^1 равна 1, то точка A совпадает с началом O и тогда, чтобы найти каноническую форму (1), следует использовать также члены третьего порядка.

Рассматриваются все случаи, которые могут представиться, даже случай, когда имеется специальная гомография $T(O)$ для $n = 3$, ставшая специальной, в каждом случае дается внутренний репер с его геометрической интерпретацией. G. Vrânceanu

7561 К. Лобачевский и его геометрия. Каган В. Ф., Гостехиздат, 1955, 304 стр., илл. 6 р. 45 к.

Сборник общедоступных статей, опубликованных в разных изданиях 1927—1950 гг. Подготовлен к печати И. Н. Бронштейном, которым написаны предисловие, примечания и устранены некоторые повторения. В качестве вступления воспроизведена речь, произнесенная В. Ф. Каганом на юбилейном заседании в Казани («Столетие неевклидовой геометрии Лобачевского», Казань, 1927, 59—66; учтены рукописные изменения, сделанные автором в его личном экземпляре). Далее следуют 5 статей:

I. «Учение о параллельных линиях до открытия неевклидовой геометрии» содержит бо́льшую часть вводной статьи В. Ф. Кагана к «Геометрическим исследованиям» Н. И. Лобачевского («Полное собрание сочинений», 1946, 1, 31—67). Подробный обзор тщетных попыток доказательства постулата о параллельных; как доказательства, так и их опровержения даются преимущественно в подлинных текстах их авторов.

II. «Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке» 1943; второе издание, 1948, М.— Л., Гостехиздат, 84 стр.). Популярное изложение элементов геометрии Лобачевского переплетается с биографическим очерком. Дается представление о влиянии этой геометрии на современную науку, в частности — на теорию относительности. Приложения «Важнейшие даты жизни Н. И. Лобачевского», «Краткие библиографические сведения» помещены в конце сборника (стр. 297—299).

III. «Элементы неевклидовой геометрии у других геометров» — (Приложение к I тому «Полн. собр. соч. Н. И. Лобачевского», 160—171). Очерк достижений Гаусса, Швейкарта, Таурinуса, Я. Бойаи, Саккери, Ламберта.

IV. «Янош Бойаи» — биографический очерк, предпосланный переводу «Appendix» Я. Бойаи (М — Л., Гостехиздат, 1950, 234 стр.).

V. «Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Бойаи» — (Тр. Ин-та истории естествозн. АН СССР, 1948, 2, М.— Л., 323—389). Сравнительный анализ методов и результатов трех исследователей, преимущественно Лобачевского и Бойаи, так как от Гаусса остались только разрозненные заметки и письма. Лобачевский во всех своих сочинениях с большой полнотой строит одну геометрию, названную позже гиперболической, и лишь в качестве вспомогательного орудия пользуется евклидовой двумерной геометрией (на орисфере) как предельным случаем гиперболической. Для метода Бойаи характерно стремление, осуществленное впрочем лишь частично, объединить обе названные геометрии в одну «абсолютную».

Сборник, за исключением некоторых частей последней статьи, доступен читателю, окончившему среднюю школу и даже ученику старших классов.

Я. С Дубнов

7562. Построение проекции по заданным направлениям проектирования. Артюховская А. Г., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, 5, 155—172

Рассматривается построение аксонометрических проекций по заданному ортогональному чертежу при любом положении плоскости проекций и направлении проектирования без вычисления коэффициентов искажения. Работа посвящена ортогональной аксонометрии, но дано обобщение для случая косоугольного проектирования.

На плоскость общего положения, которая принимается за плоскость аксонометрических проекций, ортогонально проектируется точка и начало координат, а затем эта плоскость совмещается с плоскостью чертежа. При совмещении плоскости аксонометрических проекций с плоскостью чертежа положение проекции начала координат определяется известным способом (см., например, Попов Н. А., Курс начертательной геометрии, ОГИЗ, 1947).

Подробно рассматриваются построения аксонометрических проекций прямых, различно расположенных относительно плоскости аксонометрических проекций, а также построение аксонометрической проекции тела вращения с криволинейной образующей, для чего обычным способом определяется контур собственной тени, который при проектировании даст очерк аксонометрической проекции поверхности.

В. Н. Журавлева

7563. Приборы для вычерчивания перспективных и аксонометрических изображений. Юдицкий М. М., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, 5, 173—183

Излагаются теория и устройство разработанных автором приборов для механического построения перспективных и аксонометрических изображений. Геометрическое обоснование приборов: через проектируемую точку пространства проводят две лучевые плоскости — горизонтально-проектирующую и фронтально-проектирующую. Эти плоскости проходят через соответствующие проекции точки и пересекают плоскость картины по двум прямым, в пересечении которых находится искомое изображение точки пространства.

Рассматриваются следующие построения: перспективы на фронтальной картинной плоскости, ортогональных проекций точки по ее аксонометрической и вторичной проекциям, фронтальных косоугольных проекций. Отличие в построении прямоугольных и косоугольных фронтальных аксонометрических проекций заключается лишь в различных углах наклона аналогичных прямых. Величины углов приведены в таблице.

Предложены следующие приборы, основанные на приведенных построениях:

1) Прибор для вычерчивания перспективного изображения тела на фронтальной картинной плоскости. Приводится схема прибора.

2) Прибор для вычерчивания аксонометрических проекций тела по его двум ортогональным проекциям, так называемый аксограф. Подробно рассматривается конструкция двух вариантов этого прибора, который позволяет получать аксонометрические проекции трех видов: прямоугольную изометрию и две диметрии: обычную и повернутую на 90°. Прибор дает возможность строить 14 различных вариантов ориентирования аксонометрического чертежа.

3) Прибор для вычерчивания двух ортогональных проекций тела по его аксонометрической и вторичной проекциям.

Все эти приборы имеют два обводных острия, которые одновременно обводят две разноименные проекции линии предмета. Прибор суммирует движения от обводных остриев и передает на пишущее, которое, в зависимости от назначения прибора, непрерывной линией вычерчивает соответствующее изображение.

В. Н. Журавлева

7564 К. Начертательная геометрия. Урбан (Deskriptivní geometrie. 1. díl. Urban Alois. Praha, SNTL, 1955, 292, [1] s., il., 16.30 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 19, 474 (чеш.)

7565 К. Начертательная геометрия. Петров (Дескриптивна геометрия. Петров Г.) София, Наука и изкуство, 1955, 284 стр., 10.85 лв.) (болг.)

7566 К. Начертательная геометрия. Зетцер (Deskriptivní geometrie. Středové promítání a perspektiva. Setzer Ota. Praha, SNTL, 1955, 74, [37] s. il., 7,80 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 39, 958 (чеш.)

7567 К. Курс начертательной геометрии. Гавель (Kurs deskriptivní geometrie. Havel Václav, Praha, SNTL, 1955, 235 s. il., 2070 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR, České knihy, 1955, № 36, 888 (чеш.)

7568 К. Элементы начертательной геометрии. 14 изд. Шапю (Elementos de geometria descritiva. Com numerosos exercicios. 14 ed. Chaput Ignace, Trad. Rio de Janeiro, Briguiet, 1955, 438 p., il., 140 cr.), Bol. bibliogr. brasileiro, 1955, 3, № 3, 131 (порт.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

7569. О кривых 3-го порядка, допускающих несколько квадратичных аналлагматических преобразований посредством изогональных точек. Брике (Sur les cubiques admettant plusieurs anallagmaties quadratiques parpoints isogonaux. Briquet André), Rev. math. spéc., 1955, 66, № 3, 69—71 (франц.)

Приводится семейство кривых, определяемых в барицентрических координатах уравнением

$$ax\left(\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)+by\left(\frac{z^2}{\gamma^2}+\frac{x^2}{\alpha^2}\right)+cz\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)+ +d\,xyz=0,$$

(кривые Γ_2), где α, β, γ — длины сторон координатного треугольника, а a, b, c, d — параметры.

Кривые Γ_2, как легко видеть, остаются инвариантными относительно преобразования $x'=\frac{\alpha^2}{x}$, $y'=\frac{\beta^2}{y}$, $z'=\frac{\gamma^2}{z}$ (преобразование посредством изогональных точек).

Произвольная кривая третьего порядка в общем случае может рассматриваться как кривая Γ_2 в изогональном преобразовании тремя различными способами.

На каждой кривой третьего порядка Γ в общем случае имеется девять точек таких, что одна пара хорд, соединяющих точки касания касательных к Γ, проведенных через одну из этих точек на Γ, образует прямой угол и что эти 9 точек состоят из троек коллинеарных точек. Д. Гордевский

7570. Проективная классификация вещественных плоских линий третьего порядка. Соколов Н. П., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 3, 295—304

Рассматривается классификация линий третьего порядка как геометрическая интерпретация проективной классификации вещественных кубических тройничных форм. В основу исследования кладутся две статьи автора о кубических тройничных формах (РЖМат, 1956, 195 и 4340).

Используя установленные инварианты кубических тройничных форм относительно проективных преобразований, автор находит каноническую форму уравнений линий третьего порядка различных типов. В заключение исследуются необходимые и достаточные условия проективной эквивалентности двух линий третьего порядка. Б. Н. Саморуков

7571. Полная топологическая классификация неособых действительных алгебраических кривых 6-го порядка в действительной проективной плоскости. Гудков Д. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 521—524

Из известных теорем Гарнака и Безу (Harnack, Math. Ann., 1876, 10, 189) вытекает, что возможны не более 68 топологических типов неособых кривых 6-го порядка. Из теоремы Петровского (Петровский И. Г., Ann. Math., 1938, 39, 197) вытекает, что один из них — кривая, состоящая из 11 овалов один вне другого — не существует (в противоположность этому для кривых до 5-го порядка включительно существуют все топологические типы, допускаемые теоремами Гарнака и Безу). В работе утверждается, что не существует действительных неособенных кривых 6-го порядка, имеющих какой-либо из еще 14 выписанных топологических типов; кривые остальных 53 топологических типов существуют. Доказательства опираются на предыдущую работу автора (РЖМат, 1956, 4788); полностью они не приведены. И. М. Яглом

7572. Точки коинциденции кривой. Примроз (Coincidence points of a curve. Primrose E. J. F.), Tôhoku Math. J., 1954, ser. 2, 6, № 1, 35—37 (англ.)

Альфен (Halphen, Oeuvres, 2, Paris, Gauthier — Villars, 1916, 319) определяет точку коинциденции плоской кривой так: существует пучок кривых 3-го порядка, имеющих с данной кривой точку восьмикратного касания и касающихся друг друга в данной точке P; кривые пучка имеют, кроме того, общую точку H; если точка P совпадает с H, то она называется точкой коинциденции. Альфен показал далее (Halphen, Oeuvres, 2, 450), что необходимым и достаточным условием, чтобы простая точка P была точкой коинциденции, является существование кривой 3-го порядка с двойной точкой P такой, которая считалась бы девять раз за пересечение данной кривой и кривой 3-го порядка: вообще такая кубическая линия имеет узел в точке P с ветвью, имеющей восьмикратное касание с кривой. Автор определяет число точек коинциденции кривой через ее плюкеровы числа, при этом предполагает, что кривая не имеет особенностей, кроме узлов и точек возврата; точки же возврата или перегиба не считаются за точки коинциденции. Если кривая имеет только узлы, то число точек коинциденции равно $32\,m-40\,n$, где n — порядок, m — класс кривой. Если же кривая имеет k точек возврата, то число ее точек коинциденции будет $32\,m-40\,n+24\,k$. Автор отмечает, что изложение вопроса о точках коинциденции в книге Хилтона (Hilton, Plane Algebraic Curves, 2nd edit. London, H. Milfor, Oxford univ. press., 1932), требует некоторых изменений: определение точек коинциденции (стр. 254) применимо только для кривой 3-го порядка, решение примера 23 (стр. 257) неправильно. С. С. Бюшгенс

7573. Одна теорема о целых кремоновых преобразованиях плоскости. Энгель (Ein Satz über ganze Cremona-Transformationen der Ebene. Engel Wolfgang), Math. Ann., 1955, 130, № 1, 10—19 (нем.)

Пусть $R_0=K_0[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — кольцо полиномов над полем комплексных чисел K_0 и $R=K_0(x_1, \ldots, x_n)$ — поле отношений этого кольца. Автоморфизм поля R, оставляющий инвариантными элементы поля K_0, называется кремоновым преобразованием. Кремоново преобразование называется целым, если при этом автоморфизм $ex_i \longleftrightarrow g_i$, $g_i \in R_0$, $i=1, \ldots, n$. Для случая $n=2$ доказывается теорема: Пусть $g(x, y)$ и $h(x, y)$ — полиномы и

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}=c=\text{const}\neq 0.$$

Если целое кремоново преобразование задается формулами $x'=g(x, y)$, $y'=h(x, y)$, то $x=g'(x', y')$, $y'=h'(x', y')$ также являются полиномами. А. С. Феденко

7574. Типы рациональных линейчатых поверхностей 5-го порядка в обыкновенном пространстве Шварца,

полученные проектированием нормальной рациональной линейчатой поверхности 5-го порядка в S_6. Франчески (I tipi di superficie rigate razionali del 5° ordine dell'ordinario spazio, di H. A. Schwarz, dedotti come proiezioni della superficie rigata razionale normale del 5° ordine di S_6. Francheschi Odoardo), Giorn. mat. Battaglini, 1955, 83, № 1, 107—113 (итал.)

По теореме Бертини (Bertini, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Pisa, 1907, 285.) всякая рациональная линейчатая поверхность порядка $r-1$ в пространстве $S_t (t<r)$ может быть получена из линейчатой поверхности порядка $r-1$ в S_r проектированием S_r из подпространства S_{r-t-1}. Шварц (Schwarz H. A., Ges. Math. Abhandl., Berlin, 1890, 2, 25) по виду кратной линии поверхности σ-го порядка выделил 10 типов таких поверхностей в S_3. Автор показывает, как надо выбрать нормальную рациональную поверхность Φ_5 в S_6 и подпространство S, из которого она проектируется, чтобы получить каждый из 10 типов Шварца. С. П. Фиников

7575. Об одной лемме Энрикеса. Бюрниат (Sur un lemme de F. Enriques. Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 2, 97—100 (франц.)

В своей книге «Алгебраические поверхности», в главе о теореме Римана — Роха Энрикес вводит одну лемму для доказательства формулы, определяющей измерение линейной системы кривых, входящей в каноническую систему поверхности; доказательство этой леммы опирается на первую часть теоремы Римана — Роха. Автор показывает, что рассматриваемую лемму можно доказать, пользуясь лишь понятием линейной эквивалентности на поверхности. С. С. Бюшгенс

7576. Классификация поверхностей на основе их внутренней геометрии. Джерджели (Clasificarea suprafeţelor pe baza geometriei lor intrinseci. Gergely É.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. R. P. R. Fil. Cluj., 1954, Ser. I, 5, № 3-4, 27—44 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются поверхности, у которых выпуклые и не выпуклые области (в случае регулярной поверхности области положительной и отрицательной кривизны) отделены непрерывными кривыми, образующими нигде не плотное множество. Эти поверхности разбиваются на классы эквивалентных поверхностей. Две поверхности относятся к одному классу, если существует гомеоморфизм одной поверхности на другую, при котором выпуклые и невыпуклые множества точек соответствуют. Каждый класс характеризуется системой кривых отделения. Выясняется, когда заданная система кривых топологически эквивалентна системе кривых отделения некоторой поверхности. А. В. Погорелов

7577. Алгебраические поверхности с выродившейся канонической системой. Бюрниат (Surfaces algébriques à système canonique dégénéré. Burniat Pol), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 4, 441—456 (франц.)

Расширяя свои построения, данные в двух предыдущих работах (РЖМат, 1955, 3374, 5256), автор для всякого значения геометрического жанра p_g и для линейного жанра, удовлетворяющего условиям $8p_g-10 \leqslant p^{(1)} \leqslant 8p_g+1$, строит модели поверхностей, каноническая система которых, кроме некоторой фиксированной компоненты, содержит переменную кривую из пучка кривых жанра, равного трем. Указывается 12 типов для каждого из отмеченных значений $p^{(1)}$, для каждого типа тройки кривых дирамации и значения бижанра, который меняется (в обратном порядке) в границах $9p_g+1 \geqslant P_2 \geqslant 9p_g-10$. Кроме того, в статье указываются две новые модели нерегулярных поверхностей ($p_g=2$, $p_a=p_g-2$, $p^{(1)}=8p_g-7$, $P_2=9p_g-9$), каноническая система которых распадается на фиксированную кривую и кривую переменную, состоящую из $r-1$ кривых пучка жанра, равного трем. С. С. Бюшгенс

7578. Бирациональные коварианты линейных систем кривых на алгебраической поверхности. Герарделли (Covarianti birazionali di sistemi lineari di curve sopra una superficie algebrica. Gherardelli Francesco), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 37, 157—174 (итал.)

Рассматривается поверхность U, вложенная в r-мерное пространство S_r. При достаточно общих предположениях относительно U можно построить на U дифференциальную форму $\Phi^{(r)}$ порядка 0 или 1, дискриминант которой $\Delta\Phi \neq 0$ и которая, как замечает автор, является обобщением формы, определяющей асимптотические линии поверхности в S_3. Если $r=\binom{t+2}{2}-1+s\ (0 \leqslant s \leqslant t+1)$, то в каждой точке P поверхности U строится в S_r подпространство $S(t)$, имеющее с U в P касание t-го порядка. Если $s>0$, то гиперплоскости, проходящие через $S(t)$, определяют в P пучок g_{t+1}^{s-1} касательных к U; его s-кратные элементы называются главными направлениями в P. Поле главных направлений определяет главные линии поверхности; дифференциальное уравнение этих линий и дает форму $\Phi^{(r)}$. При $s=0$ за $\Phi^{(r)}$ берется форма нулевого порядка — определитель, составленный из координат и их производных до t-го порядка включительно.

Если U — алгебраическая поверхность, то $\Delta\Phi$ — рациональная функция точки U, а кривая нулей $I_r=I_{t+1,s}$ — бирациональный ковариант гиперплоскостных сечений U. При $s=0$ это место точек, в которых $S(t)$ является гиперплоскостью, а при $s \neq 0$ — место точек, в которых совпадают хотя бы два главных направления; в частных случаях $r \leqslant 4$ — кривые, рассмотренные ранее Сегре (Segre B., Quart. J. Math., 1951, 2, 216—220). Рассматривая U, как проективный образ линейной системы кривых $|c|$ размерности r на алгебраической поверхности F в S_3, можно придать I_r смысл бирационального коварианта линейной системы кривых на F. Вычисляется функциональный эквивалент I_r; например при $s=0$ $I_{t+1,s}=\binom{t+2}{2}C+\binom{t+3}{2}K$, где K — каноническая кривая F, а C — производящая кривая данной системы. Та же идея проводится для построения $(k-1)$-мерного коварианта k-мерной поверхности и вычисления его функционального эквивалента.

Рассматриваются некоторые приложения полученных результатов, из которых отметим следующие: 1) обобщение формулы Нетера — для линейной системы r линейно независимых интегралов 1-го рода на иррегулярной поверхности F имеют место соотношения $I_{t+1,0} \equiv \equiv \binom{t+2}{3}K$, $I_{t+1,s} \equiv [s(t-s+2)-1]\left[2\binom{t+2}{3}+s(t+1)\right]K$ $(s>0)$, 2) изучение некоторых групп точек на F, ковариантных относительно линейной системы интегралов (обобщение понятия, введенного Севери для простого интеграла первого рода) и 3) оценка верхней грани числа бирациональных преобразований поверхности в себя.

Краткое изложение этих результатов приводилось в более ранней работе (РЖМат, 1955, 5258).

В. В. Морозов

7579. О непрерывных системах n—1-мерных алгебраических многообразий на n-мерном алгебраическом многообразии. Юдзёбо (On the continuous systems of n—1-dimensional algebraic varieties in an n-dimensional algebraic variety Yûjôbô Zuiman), Comment math. Univ. Sancti. Pauli., 1954, 3, № 1, 37—42 (англ.)

Пусть в $n+1$-мерном проективном пространстве дано n-мерное алгебраическое многообразие V^n порядка m, сечения которого с общим трехмерным подпространством S^3 имеет только обыкновенные особенности, т. е. имеет кривую двойных точек, на которой расположено конечное число тройных точек. Доказывается, что на многообразии V^n существует непрерывная система n — 1-мерных алгебраических подмногообразий, состоящая из ∞^q различных линейных систем, и не существует непрерывной системы n — 1-мерных алгебраических подмногообразий, состоящей из ∞^{q+1} различных линейных систем, где q — иррегулярность сечения V^n с общим S^3. Доказательство основано на лемме, устанавливающей необходимые и достаточные условия линейной эквивалентности двух n — 1-мерных гиперповерхностей одного и того же порядка, содержащихся в V^n, которая обобщает известный для случая $n=2$ результат.

Г. И. Клейнерман

7580. Проективная модель $(r$—1)-мерного алгебраического образования из комплексного S_r, полученная посредством алгебры $(r+1)$-дуальных чисел. Спампинато (Un modello proiettivo dell'ente algebrico ∞^{r-1} dell'S_r complesso ottenuto con l'algebra dei numeri $(r+1)$-duali. Spampinato Nicolo), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 2, 359—377 (итал.)

Гиперповерхность A комплексного S_r может быть продолжена (РЖМат, 1956, 4037) в некоторый образ в r-мерном проективном пространстве $\overline{S}_r$ над алгеброй $(r+1)$-дуальных чисел (РЖМат, 1955, 941). Пользуясь построенным ранее отображением $\overline{S}_2$ в S_R $(R=2r(r+1)-1)$, автор получает для A проективную модель W_{d-1} $(d=r^2+2r-1)$ в S_R, образованную ∞^{r-1} пространствами $S_{r(r+1)-1}$, однозначно соответствующими простым точкам A и их предельными положениями. Изучаются некоторые свойства этой модели.

В. В. Морозов

7581. Проективно инвариантная точка зрения на метод исключения Кронекера и точечные присоединенные формы алгебраического многообразия. Гаэта (Sopra un aspetto proiettivamente invariante del metodo di eliminazione di Kronecker e sulle forme puntuali associate alle varietà algebriche. Gaeta Federico), Atti. Accad. naz. Lincei Rend. Cl., sci. fis., mat e. natur., 1955, 18, № 2, 148—150 (итал.)

Когда дана система S алгебраических уравнений в однородных координатах (x) проективного пространства S_n, изображающая многообразие V, то основная цель метода исключений Кронекера заключается в изолировании различных неприводимых компонент многообразия V, а также в нахождении условий совместности системы S.

Однако a priori нет необходимости, чтобы эта цель достигалась только исключением переменных. Автор показывает, что сохраняя геометрическую идею метода Кронекера, указанную Севери, с бо́льшим преимуществом можно на каждом этапе вычисления вводить новую группу $n+1$ переменных, каждая из которых будет координатами вершины конуса, проектирующего многообразие, полученное на предыдущем этапе. Вкратце намечается метод.

Пусть S будет системой r алгебраических уравнений порядков $m_1, m_2, \ldots, m_r$, коэффициенты которых принадлежат основному коммутативному телу с нулевой характеристикой; рассмотрим трансцендентное расширение последнего $K(y_{10},\ldots y_{1n};\ y_{20},\ldots,y_{2n},\ \ldots,\ y_{i0},\ldots,y_{in})$, в котором y_{hj} $(h=1,2,\ldots,i)$ представляют i групп по $n+1$ элементов каждая, алгебраически между собой не зависимых; будем корóче писать $(y_1),(y_2),\ldots,(y_i)$ для соответствующих точек S_n. Построим конечную последовательность $(\leqslant n+1)$ систем $S^{(i)}$, присоединенных к $S=S^0$. Пусть формы $f_{ij}((y_1),(y_2),\ldots,(y_i),x)=0$ порядков m_{ij} $(j=1,2,\ldots,r_i)$ системы $S^{(i)}$ определяют алгебраическое многообразие $V^{(i)}$ и $D_i(y_1,y_2,\ldots,y_i,x)$ будет общим наибольшим их делителем, так что $f_{ij}=D_i\varphi_{ij}$. Если все φ_{ij} не зависят от (x), $S^{(i)}$ будем считать последней присоединенной системой. В противном случае определим $S^{(i+1)}$ как систему результантов Кронекера однородных относительно λ, μ уравнений $\varphi_{ij}(y_1,\ldots,y_i;\ \lambda x+\mu y_{i+1})=0$ в поле $K[y_1,y_2,\ldots,y_i,y_{i+1};x]$. Формы $f_{i+1,j}(y_1,\ldots,y_i;y_{i+1},x)$ системы S^{i+1} будут формами инерции Гурвица для системы φ_{ij}, и будучи приравнены нулям, дадут конусы $n-1$ измерений с вершиною (y_{i+1}). Пересечение конусов $D_i=0$ для всяких специализаций точек $(y_1),(y_2),\ldots,(y_i)$ дает полную компоненту многообразия V измерения $n-1-i$. Возможно решение и других деталей вопроса.

С. С. Бюшгенс

7582. О некоторых специальных функциях в полях Галуа. Кустаанхеймо (On some special functions in Galois fields. Kustaanheimo Paul), Compt. rend. 12 Congr. mathematiciens. Scand. Lund, 1953 (1954), 169—175 (англ.)

Пусть $\mathfrak{R}_p$ — трехмерное векторное пространство над конечным полем $GF(p)$ с p элементами. Обозначим через $R(t)$ — переменный вектор из $\mathfrak{R}_p$, зависящий от целочисленного параметра. Пусть

$$R(t+n)=F(R(t),R(t+1),\ldots,R(t+n-1),\ g_1(t),\ldots,g_k(t)), \quad (1)$$

где F — некоторая рациональная функция в $GF(p)$ от $n+k$ аргументов, n — некоторое целое число, $g_i(t)$ — данные функции от t в $GF(p)$. Рассматривается функциональное уравнение

$$R(t+2)=2R(t+1)-R(t)-c/m\,[R(t+1)-Vt], \quad (2)$$

являющееся аналогом дифференциального уравнения $mR''=-c(R-Vt)$. Решение уравнения (2) пишется в форме

$$R(t)=A\left(1-\frac{c}{2m}+\sqrt{\frac{c}{4m^2}-\frac{c}{m}}\right)^t+ +B\left(1-\frac{c}{2m}-\sqrt{\frac{c}{4m^2}-\frac{c}{m}}\right)^t+V(t-1), \quad (3)$$

где A и B — произвольные постоянные. Ясно, что это решение лежит уже в $\mathfrak{R}_{p^2}$. Исследуется вид решения (3) в зависимости от выбора функций $g_i(t)$ в (1).

Л. А. Скорняков

7583 К. Исследование плоских алгебраических рациональных кривых 3-го порядка. Манджо, Ферра (Studio di una curva piana algebrica razionale del 3 ordine. Par la preparazione all'esame scritto nel

concorsi a cattedre di matematica nelle scuole medie. Mangio S., Ferra C. Messina, Tip. La Sicilia, 1954, VI, 85—108 p., 300 L.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 649, 233 (итал.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

7584. Линейчатогеометрическая характеристика кривых W проективного пространства. Барнер (Geradengeometrische Kennzeichnung der W-Kurven des projektiven Raumes. Barner Martin), Arch. Math. 1955, 6, № 6, 462—470 (нем.)

Доказываются три теоремы: 1) Кривая W (такая кривая переходит сама в себя при преобразованиях некоторой однопараметрической проективной подгруппы) на квадрике есть кривая линейного комплекса (ее касательные принадлежат линейному комплексу), 2) Кривая комплекса на квадрике есть кривая W. 3) Кривая комплекса, являющаяся одновременно кривой W, лежит на твердой квадрике.

Отсюда главные утверждения статьи:

1) Кривая, которая вместе со своими касательными лежит на квадрике в R_5, но не укладывается в гиперплоскости, тогда и только тогда допускает однопараметрическую группу проективных преобразований, сдвигающих ее по ней самой и сохраняющих квадрику неизменной, когда кривая в фиксированной нулевой системе линейного комплекса переводится в многообразие своих соприкасающихся гиперплоскостей.

2) Кривая W в R_5, которая через твердую нуль-систему переводится в совокупность своих соприкасающихся плоскостей, лежит вместе со своими касательными на твердой квадрике.

Эти свойства обобщены автором для кривых W в R_n с нечетным числом измерений.

Статья содержит еще побочные результаты, в частности по поверхностным полосам. К. Н. Тихоцкий

7585. О тангенциальной кривизне преобразованных кривых при отображении поверхностей. Марусси (Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie. Marussi Antonio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 16, № 4, 428—483 (итал.)

При отображении поверхности Σ с линейным элементом $ds^2 = g_{ij}\,dy^i\,dy^j$ на поверхность $\bar{\Sigma}$ с линейным элементом $d\bar{s}^2 = a_{ij}\,dy^i dy^j$ геодезическая кривизна $\bar{\gamma}$ преобразованной кривой $\bar{C}$ связана с геодезической кривизной γ кривой C на Σ формулой

$$\bar{\gamma} = (S/m_t^3)\,\gamma + \varepsilon_{ij}\,T^i_{rs}\,\bar{\lambda}^r\bar{\lambda}^s\bar{\lambda}^j. \qquad (1)$$

Здесь $m_t = d\bar{s}/ds$ — масштаб линейного искажения, $S = \sqrt{g/a}$ — масштаб искажения площади, $\bar{\lambda}^i = dy^i/d\bar{s}$ — параметры направления кривой $\bar{C}$

$$T^k_{ij} = {}^1/_2\,a^{ih}\,(a_{hr|s} + a_{sh|r} - a_{rs|h})$$

и ковариантное дифференцирование выполняется с помощью метрического тензора g_{ij} поверхности Σ. Рассматриваются частные случаи формулы (1), соответствующие геодезическому, эквивалентному и конформному отображениям. В последнем случае $a_{rs} = e^{2\mu}g_{rs}$ и

$$\bar{\gamma} = e^{-\mu}\,(\gamma - \mu'_i\nu_i), \qquad (2)$$

где ν_i — ковариантные компоненты вектора, нормального к линии C. Формула (2) выражает известную теорему Сколься (Schols). Я. П. Бланк

7586. Геометрия полуокрестности кривой в двумерном многообразии ограниченной кривизны. Борисов Ю. Ф., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 4, 537—539

Рассматривается полуокрестность U кривой L на двумерном многообразии ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова (Докл. АН СССР, 1948, 60, № 3). В U вводятся координаты t, n, где t при $n = 0$ есть приведенная длина L, а при $n \neq 0$ определяется специальным образом; n при всех t есть расстояние точки до L. В этих координатах имеют место выражения для вариации длины и площади:

$$\delta s = (ds/d\lambda)/_{\lambda=0} = \int_0^1 n(t)\,dg(t) + n(0)\,f(\alpha) + n(1)\,f(\beta),$$

$$\delta\sigma = d\sigma/d\lambda\,|_{\lambda=0} = s(0)\int n(t)\,dt,$$

где $s = s(\lambda)$ — длина кривой с уравнением $n = \lambda n(t)$, причем $n(t)$ удовлетворяет условию Липшица, $\sigma = \sigma(\lambda)$ — площадь, ограниченная кривой L и кривыми $t = 0$, $n = \lambda n(t)$, $t = 1$; α, β — углы между кривыми L и $t = 0$, L и $t = 1$;

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x - \pi/2) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ x - \pi/2 & \text{при } x > \pi/2; \end{cases}$$

$$g(t) = -\varphi(t) + \sum_{\tau_i > 0}\tau_i - \sum_{\tau_i > 0}{}^2\operatorname{tg}\tau_i/2,$$

$\varphi(t)$ — поворот дуги L, отвечающей изменению параметра от 0 до t, τ_i — повороты L в угловых точках (L, по предположению, имеет поворот ограниченной вариации, поэтому множество угловых точек не более чем счетно, а $g(t)$ — функция ограниченной вариации).

В качестве приложений этих формул указывается, в частности, такой результат: если в многообразии ограниченной кривизны кривые с поворотом ограниченной вариации не имеют отрицательных нагрузок кривизны (к таким многообразиям принадлежат, например, общие выпуклые поверхности), то всякая дуга, ограничивающая максимальную (в смысле локального экстремума) площадь при данной длине, имеет постоянную геодезическую кривизну. Доказательства не приводятся. А. Д. Александров

7587. К вопросу об изгибании двусвязных кусков поверхностей. Ниче (Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke. Nitsche Joachim), Math. Z., 1955, 62, № 4, 388—399 (нем.)

Проблема изгибания многосвязного куска поверхности существенно отличается от проблемы изгибания односвязного куска. В последнем случае задание кривизны граничной кривой однозначно решает вопрос существования искомого изгибания (если оно вообще возможно). Этот факт, замеченный еще Рембсом (Rembs E., Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1930, 123—133), исследуется в этой работе подробнее в случае шаровой зоны. Полученные результаты могут быть сформулированы следующим образом.

Пусть R_1 и R_2 — радиусы двух параллельных круговых сечений единичной сферы, образующих основания рассматриваемого шарового пояса. Ищется изгибание этого шарового пояса, при котором нормальные кривизны границ изогнутой поверхности постоянны и соответственно равны ρ_1 и ρ_2 (общий случай будет рассмотрен в более поздней работе). В случае $R_1 = R_2$ (следовательно, в случае симметричного расположения границ по отношению к центру сферы) не существует изгибания, если $\rho_1 \neq \rho_2$, и существует однопараметрическое семейство изогнутых поверхностей, если $\rho_1 = \rho_2$.

Для $R_1 \neq R_2$ дело обстоит иначе. В этом случае решающую роль играет знак выражения

$$A = R_2^2(\rho_2 - 1) - R_1^2(\rho_1 - 1)/(R_2^2 - R_1^2).$$

Если $A > 0$, то имеется точно две налагающиеся поверхности, в случае $A \leqslant 0$ нет ни одной. Приведенные результаты имеют место только в том случае, когда заданные кривизны ρ_i мало отличаются от 1.

Автор пользуется методом, который уже применялся им в предыдущих работах (РЖМат, 1954, 4176; 1956, 4887 и 6841). Метод основывается на использовании интегрального соотношения, которому должно удовлетворять ρ. Разрешение этого соотношения сводится к интегро-дифференциальному уравнению. Здесь используются результаты И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, 31, № 2, 217—314) и решение получается и полностью исследуется при условии, что встречающиеся там функции допускают разложение в двойные степенные ряды. S. Gołąb

7588. Диады в теории отображения поверхностей. Лёбелль (Dyaden in der Theorie der Flächenabbildungen. Löbell Frank), Sitzungsber. math.-naturwiss. Kl. Bayerischen Akad. Wiss. München, 1954 (1955), 335—345 (нем.)

Рассматривается отображение поверхностей $\mathbf{x}(u, v) \rightleftarrows \mathbf{y}(u, v)$, при котором три квадратичные формы (основные формы пары поверхностей) dx^2, dy^2, $dxdy$ связаны линейной зависимостью, индуцированный этим отображением аффинитет между соответственными касательными плоскостями $\varepsilon(u, v) \to \varepsilon'(u, v)$ и диада (аффинор) A, реализующая аффинитет $\varepsilon \to \varepsilon'$.

В работе обобщаются полученные ранее соотношения

$$A^2 - 2HA + K\bar{I} = 0, \quad (1)$$

$$dy^2 - 2Hdxdy + K\,dx^2 = 0 \quad (2)$$

(1) — для отображения, с параллелизмом касательных плоскостей, (2) — для гауссова отображения. В соотношении (1) H и K — обобщенные средняя и полная кривизны, например $K = \dfrac{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)(\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v)}{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)^2}$. В предположении, что в отображении $\mathbf{x}(u, v) \rightleftarrows \mathbf{y}(u, v)$ соответственные касательные плоскости непараллельны, автор строит диаду второго ранга $A = f_1' \cdot f_1 + f_2' \cdot f_2$ где $f_1 f_2$ — орты главных направлений поверхности $\mathbf{x}(u, v)$, f_1', f_2' — соответствующие в аффинитете векторы в ε'. Вводя ряд величин: $\mathbf{I}_1 = \mathbf{c}$ — вектор нормали поверхности $\mathbf{x}$, $\mathbf{I} = \mathbf{x}_u \times \mathbf{y}_v - \mathbf{x}_v \times \mathbf{y}_u$, $\bar{A}$ — диаду, сопряженную A, $A^* = \mathbf{c} \times A$, $J = \mathbf{I} : \mathbf{I}_1^2$, автор находит уравнения:

$$\bar{A}A - 2HA - J \cdot A^* + K \cdot I = I \cdot I - 2HI \cdot I_1 + KI_1 \cdot I_1, \quad (3)$$

$$dy^2 - 2Hdxdy + Kdx^2 - J \cdot \mathbf{I}_1 dx\, dy = \gamma^2 dx^2,$$

обобщающие формулы (1), (2). Далее строится диада 3-го ранга $B = A - 2H\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$, также реализующая аффинитет $\varepsilon \to \varepsilon'$.

Для B находится уравнение, аналогичное (3), а также уравнение Кэли — Гамильтона и указываются приемы, упрощающие вычисления рассматриваемых величин и операторов. И. В. Цыганков

7589. Аффинная классификация поверхностей с бесконечным числом сетей переноса. Шуликовский В. И., Докл. АН СССР, 1955, 105, № 3, 430—432

Поверхности переноса, несущие две сети кривых переноса, были определены С. Ли, доказавшим, что несобственные точки касательных к кривым переноса каждой сети расположены на алгебраической кривой четвертого порядка C_4.

Поверхности переноса с однопараметрическим семейством сетей переноса получаются при распадении C_4 на две кривые второго порядка. Тогда каждая кривая определяемого ими пучка порождает сеть переноса.

Автор перечисляет все проективно различные пучки кривых второго порядка, задаваемые вещественными уравнениями, и получает аффинную классификацию поверхностей, несущих однопараметрическое семейство сетей переноса в виде таблицы, содержащей уравнение пучков и соответствующие уравнения поверхностей в явном и параметрическом виде. Я. П. Бланк

7590. О некоторых новых геометрических аспектах конформных преобразований плоскости. Винченсини (Sur quelques nouveaux aspects géométriques des transformations conformes du plan. Vincensini Paul), Bull. sci. math., 1955, 79, mars-avril, 42—48 (франц.)

В ранее опубликованной работе (Bull. sci. math., 1944, 68, 60—72) автор ввел в рассмотрение класс конгруэнций (H), определив их следующим образом. Гармоническая поверхность $z = z(x,y)$ (z, (x,y) — гармоническая функция) ортогонально проектируется на плоскость x,y и через проекции m проводятся прямые, параллельные нормалям к поверхности. Эти прямые служат лучами конгруэнции (H). Последние представляют собою рибокуровские конгруэнции, у которых средняя поверхность — плоскость x, y. Прямые, параллельные лучам конгруэнции (H), проходящие через фиксированную точку, пересекают плоскость x, y в точках μ и соответствие $m \to \mu$ — конформное обратного типа.

Две сопряженные гармонические поверхности $z = z(x,y)$ и $z' = z'(x,y)$ (z и z' — сопряженные гармонические функции) определяют семейство гармонических поверхностей $z_\alpha = z\cos\alpha + z'\sin\alpha$. Соответствующие им конгруэнции ($H\alpha$) получаются из (H), если каждый луч конгруэнции (H) повернуть на угол α вокруг прямой, параллельной оси z и проходящей через точку его пересечения с плоскостью x,y. Позже Симонар и Аларден (Simonart, Alardin, Bull. Acad. R. Belgique, 1949, 602—613) ввели в рассмотрение другой класс рибокуровских конгруэнций — конгруэнций (P). Две сопряженные гармонические поверхности $z = z(x, y)$ и $z' = z'(x, y)$ проектируются на плоскость x, y и через проекции $m(x, y)$ проводятся прямые, параллельные общим перпендикулярам к нормалям поверхностей z и z'. Эти прямые и служат лучами конгруэнции (P). Сюрай (Süray, Communs Fac. Sci. Univ. Ankara, 1952, Ser. A4, 40—53) дополнил это определение, рассмотрев общие перпендикуляры к любым двум поверхностям семейства $z\cos\alpha + z'\sin\alpha$.

Соответствие между точками m и точками μ, полученными в пересечении плоскости x, y с прямыми, проходящими через фиксированную точку параллельно соответствующим лучам конгруэнции (P),— конформное прямого типа.

В данной работе автор доказывает, что любая конгруэнция (P) может быть получена из конгруэнции (H), если каждый луч последней повернуть на прямой угол в плоскости, проектирующей его ортогонально на среднюю плоскость, вокруг точки его пересечения со средней плоскостью.

Доказывается также следующая теорема: Пусть $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_2 = z_2(x, y)$ — две сопряженные гармонические функции, n_1 и n_2 — точки пересечения плоскости x, y с нормалями к z_1 и z_2 в точках с общей ортогональной проекцией $m(x, y)$. Если провести в плоскости x,y через фиксированную точку O вектор $\overline{O\mu}$, равный вектору $\overline{n_1 n_2}$, то отображение $m \to \mu$ — конформное обратного типа. Я. П. Бланк

7591. К проективной теории бесконечно малого изгибания поверхностей. Боль (Zur projektiven Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung. Bol Gerrit), Math. Z., 1955, 62, № 1, 1—16 (нем.)

Поверхность $\mathfrak{p}(u, v) + \varepsilon\mathfrak{p}(u, v)$ называется бесконечно малым изгибанием поверхности $\mathfrak{p}(u, v) \subset E_3$, если ее линейный элемент не содержит первой степени параметра ε. Бесконечно малому изгибанию поверхности соответствует в точке (u, v) движение пространства, которое приводит элемент исходной поверхности к наложению первого порядка с соответствующим элементом изгибания. Это движение разлагается на вращение вокруг начальной точки с вектором вращения $\varepsilon\mathfrak{x}(u, v)$ и перенос с вектором $\varepsilon\mathfrak{f}(u, v)$. Вектор с шестью координатами («шестивектор») $\mathfrak{F} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{f}]$ изображает винт изгибания.

Вектор $\mathfrak{f}$ представляет в каждой точке соприкасающийся линейный комплекс конгруэнции W с фокальной поверхностью $\mathfrak{p}(u, v)$.

Если отнести кусок поверхности $\mathfrak{x}(u, v)$ без параболических точек к асимптотическим линиям и проективные координаты нормировать так, чтобы определитель $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uv}) = \eta$ имел постоянное значение, тогда вектор $\mathfrak{x}$ определяется системой $\mathfrak{x}_{uu} = \beta\mathfrak{x}_v + \pi\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_{vv} = \gamma\mathfrak{x}_u + \chi\mathfrak{x}$. Асимптотические касательные представляются шестивекторами $\mathfrak{u} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u)$, $\mathfrak{v} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v)$. Величины $b = \mathfrak{f} \circ \mathfrak{u}$, $a = -\mathfrak{f} \circ \mathfrak{v}$ удовлетворяют уравнениям Фубини: $a_v = -\gamma b$, $b_u = -\beta a$. Бесконечно малым изгибаниям куска поверхности без параболических точек взаимно однозначно соответствуют решения основных уравнений для этого куска поверхности.

Бесконечно малое изгибание поверхности будет движением, если вектор $\mathfrak{f}$ постоянный (необходимое и достаточное условие). Рассматриваются функции:

$$2h = a_{uuu} - 4La_u - 2L_u a + \beta b_{vv} - \beta_v b_v + (\beta_{vv} - 4\beta M)\, b,$$

$$2k = b_{vvv} - 4Mb_v - 2M_v b + \gamma a_{uu} - \gamma_u a_u + (\gamma_{uu} - 4\gamma L)\, a,$$

$$2G = -aa_{uu} + {}^1/_2\, a_u^2 + 2La^2 + bb_{vv} - {}^1/_2 b_v^2 - 2Mb^2,$$

где $L = \pi + {}^1/_2\,\beta_v$; $M = \chi + {}^1/_2\,\gamma_u$.

Если при изгибании $G = \text{const}$, то изгибание есть движение, если только (в случае линейчатой поверхности) прямая $\mathfrak{g} = a\mathfrak{u} + b\mathfrak{v}$ не совпадает с образующей поверхности. Два бесконечно малых изгибания различаются на движение тогда и только тогда, когда h и k для них суть одинаковые функции u и v.

Для линейчатой поверхности общее решение основных уравнений получается в квадратурах. Каждое бесконечно малое изгибание линейчатой поверхности линейно составляется из миндингова бесконечно малого изгибания и такого ее бесконечно малого изгибания, при котором соответствующая конгруэнция W вырождается в самую линейчатую поверхность. Все бесконечно малые изгибания линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции, можно найти без интегрирования. Если известно бесконечно малое изгибание изотермически-асимптотической поверхности, то можно вывести без интегрирования бесконечную последовательность изгибаний.

Каждому проективному наложению поверхности R соответствуют два линейно независимых метрических наложения, которые определяются квадратурами. Бесконечно малому изгибанию поверхности R однозначно соответствует такое же изгибание каждой поверхности, проективно наложимой на данную. В заключение автор доказывает ряд теорем об изгибании квадрик.

В. Т. Базылев

7592. Система R в четырехмерном проективном пространстве. Коровин В. И., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 5, 797—799

Система трех уравнений типа Лапласа

$$X_{ik} = a_{ik}^i X_i + a_{ik}^k X_k + a_{ik} X \ldots \qquad (1)$$

от трех переменных u_1, u_2, u_3 ($X_i = \partial X / \partial u_i$, $X_{ik} = \partial^2 X / \partial u_i \partial u_k$, $i \neq k$) при замене $X = \rho X'$ переходит в систему такого же вида; при этом выражения $f_{12} = a_{12}^1 a_{12}^2 + a_{12} - \partial a_{12}^2 / \partial u_2$, $f_1 = a_{12}^1 - a_{23}^3$ (и еще 7 заменой индексов) инвариантны. Пусть вершина A_0 репера $\{A_\alpha\}$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, 4$) описывает гиперповерхность $\omega_0^4 = 0$ в пространстве P_4. Если отнести поверхность (A_0) к трижды сопряженной системе линий и написать уравнение поверхности в частных производных, то получим систему вида (1) с точечными инвариантами $f_{12} = a_0^1 b_0^2 \gamma_{12}$, $f_1 = (b_1^2 - c_1^3)\, a_0^1$ (и еще 7 инвариантов), где правые части определяются из таблицы форм репера 2-го порядка. Аналогично находятся тангенциальные инварианты F_{ij}, F_i. Если между точечными и тангенциальными инвариантами имеют место соотношения $f_{ij} = F_{ij} = \varepsilon_{ij} f_i f_j$ ($\varepsilon_{12} = -1$ и $\varepsilon_{ij} = +1$ в остальных случаях), то такие же соотношения имеют место и для всех преобразований Лапласа поверхности (A_0); такая трижды сопряженная система (A_0) в P_4 существует с произволом 15 постоянных.

Автор называет направление на поверхности (A_0) асимптотическим, если его трехмерная соприкасающаяся плоскость совпадает с трехмерной касательной плоскостью поверхности. В каждой точке поверхности имеется конус асимптотических направлений. Если инварианты удовлетворяют указанным соотношениям, то на всех преобразованиях Лапласа поверхности (A_0) конусы асимптотических направлений определяются тем же уравнением, что и на поверхности (A_0). Если, кроме того, $f_{ij} = f_{ji} = e_{ij} f_i f_j$ ($e_{13} = -1$ и $e_{ij} = +1$ в остальных случаях), то на поверхности (A_0) трижды сопряженная сеть имеет равные точечные инварианты; это же имеет место и для всех преобразований Лапласа поверхности. (Аналогичные соотношения получаются и для тангенциальных координат). Такая трижды сопряженная система существует в P_4 с произволом 12 постоянных.

В. Т. Базылев

7593. О поверхностях совпадения. Маркус (Asupra suprafețelor de coincidență. Marcus F.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 2, 307—310 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказывается характеристическое свойство проективно минимальных поверхностей совпадения. Рассматривая поверхность, отнесенную к своим асимптотическим линиям, и используя необходимые условия интегрируемости системы $x_{uu} = x_v + p_{11} x$, $x_{vv} = x_u + p_{22} x$, автор доказывает, что поверхности совпадения, для которых $p_{ii} = \text{const}$, являются проективно минимальными поверхностями и обратно для проективно минимальной поверхности совпадения имеет место $p_{ii} = \text{const}$.

A. Dobrescu

7594. Метрические свойства конгруэнций кривых. Поенару (Proprietăți metrice ale congruențelor de curbe. Poenaru Valentin), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 2, 295—301 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть (K) — конгруэнция кривых на плоскости $y = f(x, t)$, определенных на $a \leqslant x \leqslant b$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$, где параметр t является ординатой точки пересечения кривой с осью OY. Пусть $t_0 < t_1 \ldots < t_{n-1} < t_n = T$

$y = f\,x,\ t_i\}$ — соответствующие кривые. Пусть

$$V(t_0, \ldots, t_{n-1}, T) = \sum_{i=1}^{n} \left(\max_{x \in [a,\, b]} |f(x, t_i) - f(x, t_{i-1})| \right).$$

Если множество $\{V(t_0, \ldots, t_{n-1}, T)\}$ ограниченное, то конгруэнция (K) называется «ограниченным многообразием».

Доказывается теорема. Если конгруэнция кривых — «ограниченное многообразие», то множество точек, где в случае существования касательной она параллельна оси OY, образует множество плоской меры нуль. Это является обобщением известной теоремы, утверждающей, что множество точек, где действительная функция действительного переменного допускает единственную и бесконечную производную, есть множество меры нуль. S. Marcus

7595. О конгруэнциях W, у которых одна из фокальных поверхностей имеет асимптотические линии обоих семейств в линейных комплексах. Годо (Sur les congruences W dont une des nappes focales est une surface ayant ses asymptotiques des deux familles dans des complexes linéaires. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 4, 79—89 (франц).

Пусть (x) — поверхность, отнесенная к своим асимптотическим u, v. U и V — их образы на гиперквадрике Клейна Q в S_5, которые принадлежат последовательности Лапласа

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \qquad (L)$$

Если последовательность (L) обрывается в точках U_n и V_n, то U_n и V_n сопряжены относительно гиперквадрики Q. Пусть (x) — фокальная поверхность конгруэнции W, описываемой прямой j, и J — ее образ на Q, который принадлежит последовательности Лапласа $(\mathfrak{J})$

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n} \ldots \qquad (\mathfrak{J})$$

Рассматриваются взаимные соотношения между последовательностями (L) и $(\mathfrak{J})$, причем особое внимание уделяется обрывающимся последовательностям. Отдельно рассматривается случай $n = 1$ для обрывающихся последовательностей. В этом случае асимптотические u и v поверхности (x) принадлежат линейным комплексам. Затем строятся аналогичные последовательности для второй фокальной поверхности $(\bar{x})$ конгруэнции j и делаются аналогичные выводы. В. И. Коровин

7596. О поверхностях с однозначной проекцией на плоскость, кривизны которых ограничены неравенствами. Хейнц (Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind. Heinz Erhard), Math. Ann., 1955, 129, № 5, 451—454 (нем.)

Рассматриваются поверхности, заданные дважды непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$ в круге $x^2 + y^2 < R^2$. Известно, что если средняя или гауссова кривизна поверхности подчинены некоторым ограничениям, то радиус круга, являющегося проекцией поверхности на плоскость x, y, оценивается сверху через среднюю кривизну H или гауссову кривизну K. Автор получает эти оценки простым способом. Пусть средняя кривизна поверхности удовлетворяет условию $|H| \geqslant \alpha > 0$, тогда

$$R \leqslant 1/\alpha. \qquad (1)$$

Так как всегда $H^2 \geqslant K$, то из оценки (1) автор получает оценку

$$R \leqslant 1/\sqrt{\alpha}, \qquad (2)$$

если гауссова кривизна поверхности удовлетворяет условию $K \geqslant \alpha > 0$. Оценки (1) и (2) являются точными, как показывает пример сферического сегмента $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

В случае, когда $K \leqslant -\alpha < 0$, автор уточнил оценку Н. В. Ефимова (Докл. АН СССР, 1953, 93, 393—395, 609—611) для R сверху через число α, именно $R < e\,(3\alpha)^{-1/2}$. При этом автору удалось получить чрезвычайно простое доказательство теоремы Н. В. Ефимова. И. Я. Бакельман

7597. О четверке и паре расслояемых конгруэнций. Маркус (Asupra unei cvadruple şi a unei perechi de congruente de drepte stratificabile. Marcus F.), Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR, Fil. Iaşi, 1955, ser. 1, 6, № 1-2, 155—161 (рум.)

Доказываются две теоремы.

1. Если конгруэнции L, L', присоединенные к расслояемой паре конгруэнций K, K', являются конгруэнциями Вельша, то основная пара K, K' образована конгруэнциями w или конгруэнциями Вельша. Обратная теорема не всегда верна.

2. Если одна из конгруэнций расслояемой четверки является конгруэнцией Вельша, то и три остальные конгруэнции четверки будут конгруэнциями Вельша. С. П. Фиников

7598 К. Курс инфинитезимальной геометрии. Выпуск 2. Кинематика и кинематическая геометрия. Часть I: Общие вопросы. 2-е издание. Жюлиа (Cours de géométrie infinitesimale. 2. fasc. Cinématique et géométrie cinématique. I part.: Généralités. 2-ème ed. Julia Gaston. Paris. Ganthier-Villars, 1955, 80 p., 1500 fr.). (франц.)

Первый выпуск (См. РЖМат, 1955, 1455 реф.). В данном выпуске имеются главы о кинематике точки, о кинематике твердого тела и о сложении движений. Имеется несколько интересных приложений, как, например, замечание на стр. 53 о том, что если фиксированная система s_2 движется по отношению к другой фиксированной системе s_1 таким образом, что точка m из s_2 описывает плоскую траекторию на плоскости π, связанную с s_1, тогда при обратном движении s_1 по отношению к s_2 эта плоскость π проходит через фиксированную точку s_2. На стр. 59—67 мы находим исследование поверхностей в форме $f(r_1, r_2, r_3) = 0$, где r_i — расстояния точки поверхности от трех заданных фиксированных поверхностей: это приближение связано с именами Пуажо и Роберваля. Выпуск заканчивается главой о подвижном трехграннике. Для примеров автор обычно отсылает к своим работам: (Julia G., Exercices de géométrie infinitésimale, 2 fasc., Gauthier-Villars, Paris, 1944, 1952; Beghin H., Julia G., Exercices de mécanique, t. I, fasc. 2, 2-éme éd., ibid., 1951). D. J. Struik

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 512.

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

7599. Расслоение конгруэнций окружностей и сфер в конформном пространстве. Гейдельман Р. М., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 180—181

Рассматривается проблема расслоения конгруэнций окружностей и сфер в конформном пространстве. Если к конгруэнции (c_1) в пространстве M_3 можно присоединить ∞^1 двупараметрических семейств сфер $S_1 + kS_0$ так, чтобы при всяком значении параметра k производное многообразие dS_{01} содержало пучок сфер, проходящих через соответствующую окружность (c_2), то конгруэнция (c_1) расслаивает конгруэнцию c_2.

Если две конгруэнции окружностей (c_1) и (c_2) двусторонне расслояемы, то окружности обеих конгруэнций ортогональны одной сфере. Расслояющая конгруэнция (c_1) есть конгруэнция K (обладает двумя семействами каналовых поверхностей). Если расслояемая конгруэнция (c_2) — также конгруэнция K, то каналовые поверхности обеих конгруэнций соответствуют, а фокальные сферы расслояемой конгруэнции (c_2) принадлежат соответствующей производной связке фокальных сфер расслояющей конгруэнции (c_1). Если у расслояемой пары конгруэнций (c_1) и (c_2) соответствующие окружности сопряжены, то расслояемая конгруэнция (c_2) есть конгруэнция R. Эти результаты обобщены на расслояемую пару двупараметрических конгруэнций $(n-2)$-мерных сфер в пространстве M_n. При $k=3$ расслояющая конгруэнция специальная. При $k>3$ обе конгруэнции будут конгруэнциями K. Каналовые поверхности и $(k-1)$-параметрические фокальные семейства соответствуют и фокальные гиперсферы расслояемой конгруэнции принадлежат производному семейству соответствующих фокальных гиперсфер расслояющей конгруэнции. Нетривиальное двустороннее расслоение возможно, если $n=2k-2$ и такая пара K существует с произволом $2k^2-k$ функций одного аргумента. Асимптотическое многообразие на всех семействах фокальных гиперсфер обеих конгруэнций и на всех семействах расслояющих гиперсфер соответствуют. В. И. Коровин

7600. Уравнения Гаусса для подпространства обобщенного риманова пространства. Прванович (Équations de Gauss d'un sous-espace plongé dans l'espace Riemannien généralisé. Prvanovitch Milev a), Bull. cl. sci., Acad. roy. Belgique, 1955, 41, № 6, 615—621 (франц.)

Пусть обобщенное риманово пространство V_n, отнесенное к координатам $x^i (i=1, \ldots, n)$, вложено в обобщенное риманово пространство $\overline{V}_n$, отнесенное к координатам $y^\alpha (\alpha=1, \ldots, m)$. Пусть это вложение осуществляется функциями $y^\alpha = y^\alpha (x^1, \ldots, x^n)$. Обычным путем автор приходит к дифференциальным уравнениям второго порядка для этих функций. Рассматривая их условия интегрируемости, он получает уравнения Гаусса и Петерсона — Кодацци в тензорной форме, которые являются обобщением известных уравнений римановой геометрии и переходят в них, когда фундаментальные тензоры V_n и $\overline{V}_m$ симметричны. Реферируемая работа является интересным дополнением к статье Р. С. Мишры о подпространствах обобщенных римановых пространств (РЖМат, 1956, 5476). П. С. Синюков

7601. Теоремы о группах голономии римановых многообразий. Сасаки, Гото (Some theorems on holonomy groups of riemannian manifolds. Sasaki Shigeo, Goto Morikuni), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 80, № 1, 148—158 (англ.)

Обозначим через H группу голономии риманова многообразия M_n (преобразования касательного (точечного) пространства $E_n = E_n(O)$ точки O при переносе его вдоль замкнутого пути), h — однородная группа голономии (аналогичные линейные преобразования векторного касательного пространства), H^0, h^0 — соответственно, ограниченные (неоднородная и однородная) группы голономии (переносы по путям, гомотопным тождественному). Доказывается несколько теорем.

Теорема 1. Допустим, что ограниченная группа голономии h^0 приводима и $E_{(1)}, \ldots, E_{(m)}$ — ее неприводимые инвариантные подпространства. Если $E_{(1)}$ не инвариантно относительно h и $\dim E_{(1)} \geqslant 2$, обозначим $E^*_{(1)}$ неприводимое, инвариантное относительно h подпространство, содержащее $E_{(1)}$. Тогда можно выбрать из $E_{(1)}, E_{(2)}, \ldots, E_{(m)}$ l_1 $(l_1 = \dim E^*_{(1)} / \dim E_{(1)})$ линейных подпространств одной и той же размерности так, что они порождают $E^*_{(1)}$ и каждое из них может быть получено из другого преобразованием из h.

Пусть M_n — полное риманово многообразие с приводимой группой h, имеющей r-мерное и s-мерное $(r+s=n)$ инвариантные подпространства. Тогда возникают два взаимно ортогональных поля r-мерных и s-мерных плоскостей на M_n. Обозначим через R_P и S_P r- и s-мерные вполне геодезические подмногообразия, соответствующие этим полям, проходящие через точку $P \in M_n$. Примем следующую гипотезу (w): на многообразии M_n имеется точка O такая, что каждая точка R_O имеет окрестность (в R_O), пересекающую любое S-подмногообразие не более одного раза. Тогда $R_O \cap S$ дискретно, и точки его называются конгруэнтными между собой. Идентифицируя всевозможные конгруэнтные точки многообразия R_O, получаем новое многообразие R^*. Пусть C — замкнутая кривая, проходящая через O. Ей соответствует преобразование (точечное) касательного пространства к M_n, которому сопоставляется преобразование $t(M_n, C)$ касательного пространства к R_O. Доказывается (теорема 2), что эти преобразования образуют группу голономии $H(R^*)$.

Теорема 3. Допустим, что группа голономии h_0 полного риманова многообразия M_n имеет r инвариантных векторов и что эти r векторов порождают r-мерную плоскость, инвариантную относительно h. Если выполнена гипотеза (w), то r-мерная часть группы $H(M_n)$, соответствующая инвариантной r-мерной плоскости, является дискретной группой конгруэнтных преобразований евклидова пространства без неподвижных точек в E_n.

Теорема 4. Пусть M_n — неприводимое риманово многообразие. Тогда группа голономии H^0 либо 1) содержит все переносы евклидова пространства E_n, либо 2) имеет неподвижную точку (т. е. является подгруппой группы вращений относительно этой точки).

Теорема 5. Пусть M_n — полное риманово многообразие. Если H^0 имеет неподвижную точку, то M_n является формой евклидова пространства.

И. З. Розенкноп

7602. Теория связностей и теорема Э. Картана о группах голономии. I. Оцуки (Theory of connections and a theorem of E. Cartan on holonomy groups. I. Otsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1954, 4, № 1, 21—38 (англ.)

Доказывается следующая теорема, обобщающая результат Э. Картана (Acta Math., 1926, 48, 1—24): Пусть $\mathfrak{B} = \{B, p, X, Y, G\}$ — дифференцируемое косое произведение с инфинитезимальной связностью Γ, структурная группа которой есть G (см., например, РЖМат, 1954, 5764; 1955, 2876). Пусть H — группа голономии Γ в точке $x_0 \in X$ и K — минимальная инвариантная подгруппа G, содержащая H. Тогда произведение $\mathfrak{B}$ со связностью Γ G-эквивалентно другому косому произведению $\mathfrak{B}' = \{B', p', X, Y, H\}$ с инфинитезимальной связностью Γ', структурной группой которой является L, где 1) если X — n-ячейка, то $L=H$; 2) если X односвязно, то $L=K$; 3) в других случаях $L=G$.

Примечание референта. Леммы 1 и 2 автора, в сущности, имеются у Кобаяси (РЖМат, 1956, 4856). И. З. Розенкноп

7603. Двумерные пространства обобщенной проективной связности. Гото (On a two-dimensional projectively connected space in the wide sense with torsion Gotô Yûzô), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1954, A 28, № 3, 253—265 (англ.)

Канитани называет пространство X_n пространством обобщенной проективной связности, если в нем задана инвариантным образом система уравнений

$$dA_\alpha = \Gamma^\beta_{\alpha r} du^r A_\beta \quad (r = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, N),$$

где u^r — криволинейные координаты точки X_n, а A_0, $A_1, \ldots, A_N$ — псевдовекторы, определяющие вершины репера проективного пространства P_N (Kanitani J., Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1951, **A26**, № 3. Там же дается определение поверхности V_n пространства P_N, которая находится в соприкосновении порядка ν с пространством проективной связности $_{\omega}X_n$.

Устанавливаются условия существования поверхности V_2 пространства P_3, находящейся в соприкосновении порядков $\nu = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ с пространством проективной связности X_2, и некоторые геометрические свойства этих поверхностей. А. П. Норден

7604. О приводимости финслерова многообразия. Хассан Акбар-Заде (Sur la réductibilité d'une variété finslérienne. Hassan Akbar-Zadeh), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 16, 945—947 (франц.)

Условие приводимости риманова многообразия, данное Лихнеровичем, распространяется на финслеровы многообразия, причем, кроме требования приводимости группы голономии $\sigma_{x'}$ налагается условие соответствующей приводимости тензора кручения. В. В. Рыжков

7605. Инвариантные аффинные связности на однородных пространствах. Номидзу (Invariant affine connections on homogeneous spaces. Nomizu Katsumi), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 33—65 (англ.)

Обобщаются и уточняются классические результаты Картана о связях между пространствами аффинной связности и геометрией групп Ли и однородных многообразий.

В гл. 1 дается принадлежащее Кошулю (Koszul) алгебраическое определение аффинной связности. Аффинной связностью на гладком многообразии M называется закон, по которому каждому инфинитезимальному преобразованию X ставится в соответствие эндоморфизм $t(X)$ алгебры $\mathfrak{X}$ инфинитезимальных преобразований M. Рассматриваются порождаемые связностью кривизна, кручение, ковариантное дифференцирование и группа голономии.

В гл. 2 изучается аффинная связность на редуктивных однородных пространствах. Пространство G/H (G — группа Ли, H — замкнутая подгруппа) называется редуктивным, если в алгебре Ли $\mathfrak{G}$ группы G существует подпространство $\mathfrak{M}$ такое, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}$ (прямая сумма), и $\mathfrak{M}$ инвариантно, относительно adH (присоединенное представление H в $\mathfrak{G}$). Устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством инвариантных аффинных связностей на M и множеством функций α, билинейных на $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ со значениями в $\mathfrak{M}$, инвариантными относительно adH. В терминах функции α определяются кривизна, кручение, ковариантное дифференцирование. В множестве аффинных связностей выделяются канонические аффинные связности двух родов. Каноническая аффинная связность первого рода не имеет кручения, а у канонической связности второго рода равны 0 ковариантные производные тензоров кручения и кривизны. Эти связности совпадают на группах Ли со связностями, введенными Картаном (Картан, Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., 1949).

В гл. 3 автор переходит к симметрическим пространствам, являющимся частным случаем редуктивных. В симметрических пространствах канонические аффинные связности первого и второго родов совпадают. Доказывается, что полученная каноническая связность является единственной инвариантной аффинной связностью в симметрическом пространстве.

В гл. 4 обобщается известная теорема Картана о симметрических римановых пространствах. Доказывается, что пространство, у которого аффинная связность имеет равные 0 ковариантные производные тензоров кручения и кривизны, локально представимо в виде однородного редуктивного пространства с канонической аффинной связностью второго рода.

Примечание референта: Автор, повидимому, не знаком с результатами П. К. Рашевского (Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств, Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, М., 1952, 9), изучавшего инвариантные аффинные связности в редуктивных однородных пространствах. Л. Р. Волевич

7606. Комплексные косые произведения и линейчатые поверхности. Атия (Complex fibre bundles and ruled surfaces. Atiyah M. F.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 20, 407—434 (англ.)

Изучаются некоторые типы комплексно-аналитических косых произведений над алгебраическим многообразием X (без особенностей) с точки зрения их классификации. Употребляемые методы основаны на теории пучков (Cartan H., Paris seminarnotes, 1950—1951) Пусть $\mathfrak{F}(X, G)$ обозначает совокупность главных косых произведений с группой G. В качестве G рассматриваются: аддитивная (C) и мультипликативная (C^*) группы комплексных чисел, группа аффинных (A) и проективных (P). преобразований комплексной прямой. Вообще, когда G коммутативна, имеется взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{F}(X, G)$ и $H^1(X, A_G)$, где A_G обозначает пучок ростков аналитических функций со значениями в G, $H^1(X, A_G)$ — его первую группу когомологий. При $G = C, C^*$ эта группа известна (РЖМат, 1953, 130; 1954, 3274).

В первой главе доказывается классификационная теорема для A-произведений. Точной последовательности групп $0 \to C \to A \xrightarrow{\pi} C^* \to 0$ соответствует последовательность $\mathfrak{F}(X, C) \to \mathfrak{F}(X, A) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{F}(X, C^*)$. Элементы $\mathfrak{F}(X, C^*)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами дивизоров X (РЖМат, 1954, 3274). Пусть $\xi \in \mathfrak{F}(X, C^*)$. Доказывается (теорема 1), что $\pi^{-1}(\xi) = \xi + Y(\xi)$, где $Y(\xi)$ — проективное пространство размерности на 1 меньше, чем $H^1(X, \Omega(D))$ (группа когомологий X относительно пучка ростков мероморфных функций f таких, что $(f) + D \geqslant 0$, где D — дивизор, соответствующий ξ. A-произведение называется собственным, если оно не представимо в виде C^*-произведения.

Пусть G_N — грассманово (комплексное) многообразие прямых проективного пространства S_N ($N \geqslant 3$). Над G_N строится произведение B со слоем S_1 и группой P, образованное парами (l, p) из $G_N \times S_N$ такими, что p лежит на линии, соответствующей l. Пусть $\mathfrak{P}$ — ассоциированное главное произведение. P-произведение над X (главное) называется регулярным, если оно индуцировано из $\mathfrak{P}$ аналитическим отображением $\mu : X \to G_N$. Доказывается (теорема 2), что если

P-произведение имеет секущую поверхность, то оно регулярно.

Во второй главе автор ограничивается случаем, когда X — алгебраическая кривая. Тогда всякое алгебраическое P-произведение регулярно; их классификация приводит к классификации линейчатых поверхностей. Любому A-произведению соответствует P-произведение (ввиду включения $A \to P$). Оказывается, что все алгебраические P-произведения могут быть получены таким образом. Автор строит критерий для выяснения P-эквивалентности A-произведений и с помощью его классифицирует P-произведения, когда кривая X имеет небольшой род $p = 0, 1, 2$. Так, при $p = 0$ всякое алгебраическое P-произведение представимо C^*-произведением, для которого $\deg D \geqslant 0$. При $p = 1$, кроме C^*-произведений (для которых $\deg D \geqslant 0$), имеются еще два типа собственных A-произведений, соответствующих $\deg D = 0$ и $\deg D = -1$.

Доказывается теорема о касательном пучке, возникающем при погружении X в проективное пространство. Соответствующее A-произведение есть единственное собственное произведение, соответствующее каноническому классу дивизоров. И. З. Розенкноп

7607. Группы изометрии псевдоэрмитовых пространств. I, II. Исихара (Groups of isometries of pseudo-Hermitian spaces. I, II. Ishihara Shigeru), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 7, 418—420 (англ.)

При $n > 2$, $n \neq 4$ не существует групп движений $2n$-мерных псевдоэрмитовых пространств, порядок которых удовлетворяет неравенству $n^2 + 2n - 1 > r > n^2 + 2$. Если порядок группы равен $n^2 + 2n$, пространство имеет постоянную голоморфическую кривизну K. При $K = 0$ это — аффинное пространство с унитарной стационарной группой $U(n-1)$, при $K > 0$ — унитарно-эллиптическое пространство, при $K < 0$ — соответствующее ему симметрическое пространство отрицательной кривизны. Если порядок группы равен $n^2 + 2n - 1$, $n \neq 3$, пространство аффинное со стационарной группой $SU(n-1)$. При $n = 3$ это может быть также шестимерная сфера со стационарной группой, изоморфной простой специальной группе G_2.

Если порядок группы равен $n^2 + 2$, $n \neq 4$, пространство является, с локальной точки зрения, произведением двумерного и $2(n-1)$-мерного пространств постоянной голоморфической кривизны.

А. М. Васильев

7608. Многомерные δ-функции и дифференциально-геометрические объекты. Рашевский П. К., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 145—152

В дифференцируемом n-мерном многообразии X_n рассматривается регулярная поверхность U_m. Это значит, что U_m можно покрыть конечным числом областей, гомеоморфных m-мерному шару, в каждой из которых поверхность задается уравнениями $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^m)$, где x^i — достаточное число раз дифференцируемые функции, и ранг матрицы $\| \partial x^i / \partial u^\alpha \|$ равен m. Граница Γ_{m-1} поверхности U_m также предполагается регулярной. На U_m задается поле сверхвектора A^I, т. е. совокупность величин

$$A^*,\ A^{i_1},\ A^{i_1 i_2}, \ldots,\ A^{i_1, \ldots, i_v},$$

$$I = \{ *, (i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_1, \ldots, i_v) \},$$

преобразующихся вслед за преобразованиями координат в X_n так, что результат свертывания с любым ковариантным сверхвектором Φ_I, $A^I \Phi_I$ остается инвариантным. Φ_I в свою очередь определяется как совокупность величин $\Phi_*, \Phi_{i_1}, \Phi_{i_1 i_2}, \ldots, \Phi_{i_1, \ldots, i_v}$, преобразующихся по тому же закону, что и частные производные $\partial^s \Phi / \partial x^{i_1}, \ldots, \partial x^{i_s}$, от скалярной плотности Φ. Кроме того, при преобразовании параметров на поверхности U_m сверхвектор A^I умножается на якобиан этого преобразования. При таких условиях задание поля A^I на U_m означает задание m-мерной δ-функции, «сосредоточенной» на поверхности U_m, а именно δ-функция реализуется в виде линейного функционала в пространстве достаточно гладких функций $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$, заданных в некоторой окрестности U_m:

$$A(\varphi) = \int_{U_m} A^I (\gamma\varphi)_I \, du^1 du^2 \ldots du^m,$$

где $\gamma dx^1 dx^2, \ldots, dx^n$ — элемент объема в X_n, $(\gamma, \varphi)_I$ — частные производные от $\gamma\varphi$. Выясняется, в каком случае 2 сверхвектора A_1^I и A_2^I дают одну и ту же δ-функцию. Для этого вводится понятие приводимого A^I. A^I называется приводимым, если $A(\varphi) = 0$ всякий раз, когда $\varphi = 0$ в некоторой окрестности границы Γ_{m-1}.

Доказывается: 1) Если A^I приводим, то он представляет собой дивергенцию поля $B^{\alpha K}$, где $B^{\alpha K}$ по индексу K является сверхвектором класса $v - 1$, а по индексу α — относительным вектором в U_m. Верно и обратное. 2) Для того чтобы $A(\varphi) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы поля сверхвекторов A^I на U_m и B^K на Γ_{m-1} были приводимы. $B^K = n_\alpha B^{\alpha K}$, n_α — нормаль к границе Γ_{m-1}. Определяется также операция дифференцирования многомерных δ-функций.

Г. И. Кручкович

7609. Уравнения, не зависящие от выбора переменных, и характеризация метрических многообразий. Налли (Equazioni indipendenti dalla scelta delle variabili e caratterizzazione di varietà metriche. Nalli Pia), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 2, 135—146 (итал.)

Тензоры часто оказываются полезными в геометрии и в физике благодаря тому, что одновременное обращение всех компонент тензора в нуль не зависит от выбора системы координат. Этим свойством обладают наряду с тензорами некоторые иные дифференциально-геометрические объекты. В статье приведены примеры таких объектов (этим термином автор не пользуется). В наиболее подробно разобранном примере объект с требуемым свойством, не будучи тензором, получается из компонент 3-валентного смешанного тензора. Если в качестве последнего взять разность христоффелевых символов, принадлежащих двум поставленным в точечное соответствие римановым пространствам, то обращением в нуль (инвариантным) получаемого отсюда объекта (не тензора) соответствие характеризуется как геодезическое (геодезическим линиям одного пространства соответствуют геодезические другого). Дальнейшие рассмотрения связаны с уравнениями общей теории относительности, а также с переходом от функций целочисленных аргументов (индексов) к функциям континуальных аргументов. Я. С. Дубнов

7610. Единая теория шести измерений. Уравнения поля. Ренауди (Théorie unitaire à six dimensions. Équations du champ. Renaudie Josette), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 4, 399—401 (франц.)

В основу существующих в настоящее время шестимерных единых теорий поля кладется риманово пространство V_6, допускающее 2-параметрическую группу

(РЖМат, 1956, 4069). В реферируемой работе рассматривается тот случай, когда допускается 2-параметрическая абелева группа изометрий пространства в целом, порождающая два вектора Киллинга ξ и η; первый из этих векторов ориентирует пространство, а второй определяет время.

Если метрика V_6 определяется формой $d\sigma^2=\gamma_{\lambda\mu}dx^\lambda dx^\mu$ с сигнатурой $+\,+\,-\,-\,-\,-$, где $\gamma_{00}<0$, $\gamma_{11}>0$, то можно определить подпространство V_5 с метрикой

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j,$$

$$g_{ij}=\gamma_{ij}-\gamma_{0i}\gamma_{0j}/\gamma_{00}\quad (i,\ j=1,\ldots,\ 5),$$

которое локально изоморфно гиперповерхности $x^0=\text{const}$. Подпространством V_5 будет V_4 с элементом $dl^2=h_{LI}dx^L dx^I$ ($h_{LI}=g_{LI}-g_{1L}\cdot g_{1I}/g_{11}$; $L,I=2,\ldots,5$), которое определяет пространство — время. Вычисляя тензор Риччи для V_6 с помощью обобщенных уравнений Эйнштейна, автор получает шесть групп уравнений единой теории поля, в которые входят тензор гравитационного поля h_{LI} и тензоры импульса магнетизма и электрического поля. А. З. Петров

7611. Эффект Допплера и другие эффекты спектрального смещения в теории относительности. Лауэ (Relativitätstheorie, Doppler- und andere spektrale Verschiebungseffekte. Laue M. V.), Naturwissenschaften, 1954, 41, № 2, 25—29 (нем.)
См. РЖФиз, 1954, 11043.

7612. Конформная геометрия и элементарные частицы. Ингрэм (Conformal geometry and elementary particles. Ingraham R. L.), Nuovo cimento, 1954, 12, № 6, 825—851 (англ.; рез. итал.)
См. РЖФиз, 1956, 3116.

7613К. Исчисление Риччи. Введение в тензорный анализ и его геометрические приложения. 2-е издание. Схоутен (Ricci-calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications. 2d ed. Schouten J. A. (Grundlehren math. Wiss. Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, 10), Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1954, XX + 516 pp., 58.60 DM) (нем.)

Со времени опубликования «Исчисления Риччи» автора (Berlin, Springer, 1924) тензорное исчисление как приложение к дифференциальной геометрии значительно выросло, и настоящее издание — более чем простой перевод 1-го. Автор сыграл большую роль в развитии этой теории, и его результаты, опубликованные первоначально в статьях, появились также в книгах, написанных автором совместно с другими Однако в настоящее время впервые мы имеем удобопонятное изложение современного состояния работ в вполне определенной области. Единственная тема, которой во 2-м издании уделено меньше места, чем в 1-м,— проблема Пфаффа, и это потому, что полное изложение ее уже появилось в книге «Проблема Пфаффа и ее обобщения» (Oxford, 1949, MR 11, 179) автора и ван-дер Кулка.

Ценным дополнением в настоящем томе является расчленение понятий, которые раньше смешивались, но теперь принадлежат к существенно различным отраслям предмета. Другое дополнение относится к техническим приемам и обозначениям; они были развиты и значительно усовершенствованы со времени появления 1-го издания, и автор, особенно интересующийся этими вопросами, подает теорию в той форме, которую он считает наиболее ясной и сжатой.

Имеется 8 глав, каждая содержит от 8 до 12 разделов, их содержание вкратце следующее:

Гл. I. Алгебраические предпосылки. Эта глава ограничивается изучением n-мерного числового пространства, подвергаемого общему аффинному преобразованию. Векторы и тензоры определяются законами их преобразований, строится обычная алгебра тензоров, поливекторов и т. д. Глава заканчивается полезным обсуждением сокращенных обозначений и различных символик Картана, Клебша — Аронхольда, Вайценбёка и т. д.

Гл. II. Аналитические предпосылки. n-мерное геометрическое многообразие вводится как арифметическое многообразие вместе с допустимой координатной системой и псевдогруппой координатных преобразований. Геометрические объекты определяются классическим путем законами их преобразований, и касательное пространство точки появляется как векторное пространство, определенное дифференциалами координат. Разделы посвящены присоединенным многообразиям, системам дифференциальных уравнений, дифференциальным операторам, проблеме Пфаффа и производным Ли и Лагранжа со всеми формальными тождествами, связанными с ними. Наконец, описывается свободное от индексов исчисление Картана и устанавливается соответствие между ним и классическим тензорным исчислением.

Гл. III. Линейные связности. Они вводятся для того, чтобы ввести линейные дифференциальные операторы, которые дают тензорные поля, когда они оперируют над тензорными полями. Они в свою очередь ведут к понятиям параллельного перемещения и параллельных тензорных полей и к определению кручения. Тензор кривизны Римана-Кристоффеля для обычной связности вытекает из рассмотрения результата параллельного переноса вокруг инфинитезимальной замкнутой кривой и устанавливаются обычные тождества. Геодезические линии для общей связности определяются как самопараллельные кривые и нормальные координатные системы определяются в зависимости от этих кривых. Включен полезный раздел о координатах Ферми и глава заканчивается изложением некоторых общих связностей, включая общую связность Картана.

Гл. IV. Группы Ли и линейные связности. Конечномерная группа Ли определяется как аналитическая группа над пространством, покрытым, по условию, единственной системой координат; таким образом эта глава в основном относится к тому, что теперь называется локальной группой; свойства групп Ли в целом явно не рассматриваются. Многие из результатов, особенно те, которые касаются ($\pm$) связности, естественно связанные с группой Ли, принадлежат Картану и автору и их изложение в этой главе следует в тесной связи с направлением первоначальных работ с порой улучшенными обозначениями. Изложение почти целиком ограничивается общими рассуждениями, но зато глава содержит краткое изложение интегрируемых (разрешимых) групп и простых и полупростых групп.

Гл. V. Погружение и кривизна. Эта глава посвящена теории пространства, погруженного в другое, и порождаемой на подпространстве структуры. Рассматриваются различные структуры и выводятся нередко сложные уравнения для тензоров кривизны пространства и его подпространства. Они включают обобщение (на римановы подпространства) классических формул Френе для пространственной кривой.

Гл. VI. Проективные и конформные преобразования связностей. Эта глава касается специальных соотношений между симметрическими связностями и, в частности, проективных и конформных преобразований и связностей. В дополнение к обычным свойствам проективных и конформных пространств приводится изложение некоторых последних работ по субпроектив-

ным связностям и проблеме Адати и по конциркулярным преобразованиям.

Гл. VII. Вариации и деформации. Здесь дается подробное изложение инфинитезимальных преобразований пространств и подпространств и (локальной) теории групп движений заданного пространства. Тема модернизирована изложением групп голономии, присоединенных к различным связностям. Большинство современных работ по специальным проблемам в этой области исключены, но дается полный и ценный список литературы. Глава заканчивается теорией движений и голономии, изложенной методом Картана.

Гл. VIII. Различные примеры. Эта глава включает кратко, но полно аннотированное изложение таких специальных пространств как гармонические пространства, пространства с унитарными связностями (комплексные пространства) и пространства периодической кривизны.

Книга содержит 87 страниц библиографии (с фамилиями авторов, расположенными в алфавитном порядке) и указатель. В начале имеется также подробный список содержания.

Так как в книгу включено много тем, некоторые выкладки по необходимости кратки, даны с опущением подробных выкладок, приведено очень мало иллюстративных примеров; по этой причине книгу скорее следует рассматривать как справочник, чем как учебник. Чтобы компенсировать это, даются подробные ссылки на литературу по каждой теме, вошедшей в книгу, и сделаны ссылки на все имеющие отношение к изложенным темам работы, не вошедшие в книгу. В предисловии автор дает список тех частей дифференциальной геометрии, которые полностью исключены, причем наиболее важные из них почти несомненно связаны с топологией, где локальные теории распространяются на многообразия в целом. Также исключены все работы по обобщенным пространствам, таким как финслеровы и обобщенные пространства путей, а также такие темы как преобразования касания, линейные элементы и связности высших порядков, K-протяженности и приложения геометрии к дифференциальным уравнениям и прикладной математике.

Книга очень хорошо напечатана, шрифт хорошо выбран и печать совершенно ясная,— деталь, особенно важная в работе, содержащей сложные тензорные выражения. A. G. Walker

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 521

7614 К. О дифференциальных операторах первого порядка в тензорном исчислении. Схоутен (On the differential operators of first order in tensor calculus. Schouten J. A., Math. Centrum Amsterdam. Rapport ZW 1953—012, 1953, 6 pp. (англ.)

Автор, прежде всего, дает обзор идеи дифференциального оператора как дифференциального конкомитанта: 1) Ковариантная производная тензора T в римановом пространстве есть, очевидно, дифференциальный конкомитант тензора T и соответствующего метрического тензора $g_{\lambda\mu}$. 2) Производная Ли-Слебодзинского от объекта Ω есть дифференциальный конкомитант от Ω и от основного вектора. Эта производная обобщается автором (Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch, 1940 **43**, 449—452). 3) Исследуя условия, при которых всякая пара собственных направлений тензорного поля h_λ^ν является X_2-образующей, Нейенхёйс (Nijenhuis) просто нашел дифференциальный конкомитант двух тензоров $h_\lambda^{a\nu}$ ($a = 1, 2$), именно (здесь, очевидно, есть опечатка в уравнении (10) статьи)

$$\left(\partial_a h^{(1}_{[\lambda}\right) h^{2)}_{\mu]a} - h^{(1\nu}_a\, \partial_{[\mu} h^{2)}_{\lambda]a}\,.$$

4) В заключение автор показал, каким образом в некоторых простых случаях может быть найден новый дифференциальный конкомитант. Пример: Отрицательную производную Ли—Слебодзинского — $\underset{v}{\mathfrak{L}} h_\lambda^\nu$ от тензора h_λ^ν можно рассматривать как дифференциальную операцию над v^ν

$$O_\lambda v^\nu = -\underset{v}{\mathfrak{L}}\, h_\lambda^\nu.$$

Тогда $v^\nu O_\lambda w^\mu + w^\mu O_\lambda v^\nu$ может быть записана в форме, содержащей не только $u^{\nu\lambda} = v^\nu w^\lambda$, но и некоторые дополнительные выражения. Подставляя в эти последние другие выражения при определенных алгебраических условиях на $u^{\nu\mu}$ и h_λ^ν, автор получает новый дифференциальный конкомитант этих двух тензоров. Приводятся два других примера на тот же метод. V. Hlavatý

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 991.

7615 Д. Алгебраическая теория координатных структур и геометрических объектов. Спивак М. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск ун-т, Саратов, 1956

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

7616. Элементарные точки на плоских дугах. Шерк (Elementary points on plane arcs. Scherk Peter), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, Sec. 3, 48, 49—53 (англ.)

Классификация, полученная в предыдущей статье (РЖМат, 1956, 4871), применяется для установления признаков следующих свойств множеств линейных элементов P_p на проективной плоскости: 1) быть сильно дифференцируемым при $t = t_0$ (всякая прямая $P(t)P(t')$ стремится к $p(t_0)$, когда t и t' стремятся к t_0), 2) быть максимально дифференцируемым (предыдущее требование дополняется двойственным ему) — понятие, являющееся естественным развитием понятия максимальной непрерывности (РЖМат, 1954, 4173), 3) иметь порядок 2 (порядок — точная нижняя граница числа точек пересечения множества точек P с произвольной прямой: точки, имеющие правую и левую окрестности порядка 2, называются элементарными).

Например, доказана теорема: Пусть множество D линейных элементов P_p имеет непрерывно изменяющиеся касательные $p(t)$ и всюду максимально дифференцируемо; пусть существует прямая h, не содержащая ни одной точки множества D, и точка $H \subset h$, не принадлежащая ни одной прямой множества D; тогда D имеет порядок 2. Р. Н. Щербаков

7617. Значение топологических условий в характеристике системы окружностей, данной Буккелем — ван-Хемертом. Фрёйденталь (Die Bedeutung der topologischen Voraussetzung bei der Buckel-van Heemertschen Charakterisierung des Systems der Kreise. Freudenthal Hans), J. reine und angew. Math., 1955, **194**, № 1—4, 190—192 (нем.)

Продолжение работы ван Хемерта (РЖМат, 1956, 4881). Ставится вопрос, нельзя ли в системе условий ван Хемерта заменить требование связности и локальной компактности фигур одним требованием связности. На этот вопрос дается отрицательный ответ построением системы $\mathfrak{S}$ плоских точечных множеств («фигур»), удовлетворяющей всем требованиям ван Хемерта, кроме локальной компактности, и не являющейся системой окружностей. Для построения такой системы плоских множеств автору приходится доказывать существование связных истинных подполей поля комплекс-

ных чисел, не совпадающих с полем действительных чисел; это делается неэффективно, с применением методов теории множеств. И. М. Яглом

7618. Углы и расстояния в n-мерной евклидовой и неевклидовой геометрии. III. Сейдел (Angles and distances in n-dimensional euclidean and noneuclidean geometry. III. Seidel J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 535—541; Indagationes math., 1955, 17, № 4, 535—541 (англ.)

Третья, заключительная часть работы (РЖМат, 1956, 6830 и 6831). Из элементов IH-пространства строятся производные пространства, которые после установления в них соответствующих метрик, оказываются конгруэнтными различным неевклидовым и евклидову n-мерным пространствам.

I. Собственные элементы IH-пространства считаются эквивалентными, когда они зависимы. Класс эквивалентных элементов $\{a_i\}$, представляющий одномерное собственное подпространство, называется атомом. Множество всех атомов метризуется. Расстояние d_{ij} между атомами $\{a_i\}$ и $\{a_j\}$ определяется формулами:

$d_{ij} = r \arccos |a_{ij}| / \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ $(r > 0)$ в I-пространстве и

$d_{ij} = r \operatorname{arcosh} |a_{ij}| / \sqrt{a_{ii}a_{jj}}$ в H-пространстве.

Множество I всех атомов I-пространства и множество H всех атомов H-пространства являются метрическими пространствами, причем расстояния в I удовлетворяют условию: $0 \leqslant d_{ij} \leqslant (1/2)\pi r$.

II. Ненулевые элементы a_i и a_k I-пространства считаются эквивалентными, когда $a_k = pa_i$ $(p > 0)$. Каждый класс эквивалентных элементов составляет полуатом. Множество S всех полуатомов метризуется по формуле

$$d_{ij} = r \arccos a_{ij} / \sqrt{a_{ii}a_{jj}}.$$

В пространстве S $0 \leqslant d_{ij} \leqslant \pi r$, причем для каждого элемента найдется другой элемент (по крайней мере один) такой, что расстояние их равно πr.

III. Рассматривается множество R всех собственных двумерных подпространств H-пространства, проходящих через фиксированный несобственный элемент g_1. Эти подпространства называются молекулами. Расстояние между молекулами $\{g_1, a_i\}$ и $\{g_1, a_j\}$ устанавливается с помощью g_1-инварианта:

$$d_{ij} = \sqrt{D(g_1a_ia_j) / 2D(g_1a_i) D(g_1a_j)}.$$

Четыре производных пространства I, H, S, R являются метрическими, полными и выпуклыми. При этом получаемые из $(n+1)$-мерного I-пространства пространства атомов I_n и полуатомов S_n конгруэнтны: первое — эллиптическому n-мерному пространству кривизны $1/r^2$, второе — n-мерному сферическому пространству той же кривизны; пространство атомов H_n, получаемое из $(n+1)$-мерного H-пространства, конгруэнтно гиперболическому пространству кривизны $-1/r^2$, и получаемое из $(n+2)$-мерного H-пространства пространство молекул R_n конгруэнтно n-мерному евклидову пространству.

В производных пространствах с помощью введенных ранее инвариантных корней λ_i определяются углы и расстояния между двумя подпространствами. Углы задаются равенствами:

$$\varphi_i = \arccos \sqrt{\lambda_i} \quad (0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1),$$

где i принимает значение $1, 2, \ldots, m+1$ в I_n и S_n; $2, 3, \ldots, m+1$ в H_n и $3, 4, \ldots, m+2$ в R_n $(m \leqslant n)$. Расстояние в H_n определяется формулой

$$l = \operatorname{arcosh} \sqrt{\lambda_1} \quad (\lambda_1 \geqslant 1),$$

а в R_n как минимум расстояний между точками, взятыми из обоих подпространств.

Этим путем в силу указанной выше конгруэнтности получается определение углов и расстояний между подпространствами евклидова и неевклидовых n-мерных пространств. А. Г. Школьник

7619 К. Общая геометрия. Менгер (Géométrie générale. Menger Karl), Mémor. Sci. Math., № 124, Gauthier-Villars, Paris, 1954, 80 + I pp. 1000 fr.) (франц.)

Краткий обзор избранных тем геометрии расстояний, вошедших в эти мемуары, образует основу лекций, прочитанных автором в Сорбонне в 1951 г. По духу и стилю они сходны с предыдущим кратким резюме теоретико-метрических результатов, опубликованным автором (Jahrb. Dtsch. Math. Ver., 1931, 40, 201—219; Enseign. math., 1936, 35, 348—372). Первые три главы (Геометрия в метрических пространствах, Общая теория кривизны, Анализ и обобщение понятия метрического пространства) трактуют различные аспекты развития самой геометрии расстояний, в то время как результаты, исследованные в остальных 4 главах, можно рассматривать как приложения этой теории. Так, гл. IV, Вариационное исчисление и метрическая геометрия, посвящена резюме применения автором метрических методов для получения очень общих теорем существования и использованию им таких методов в теории криволинейных интегралов. Гл. V, Общая теория длины, рассматривает материал, представленный автором в Fundam. Math., 1949, 36, 109—118. Обобщение нормированного линейного пространства достигается допущением определенного над линейным пространством функционала с действительными значениями, удовлетворяющего только условию положительной однородности. Гл. VI, Обобщенные векторные пространства, набрасывает развитие понятий таких пространств, данное автором в Canad. J. Math., 1949, 1, 94—104 и C. r. Acad. sci., 1951, 232, 2176—2178). Начала приложений метрических методов к статистике и теории вероятностей изложены автором в нескольких небольших статьях (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1942, 28, 535—537; 1951, 37, 178—180, 226—229; C. r. Acad. sci., 1951, 232, 2001—2003). Последняя глава (4 страницы) посвящена обсуждению этой работы.

Примечания референта. 1. Теоремы евклидова вложения, данные в гл. I, установлены первоначально автором в 1928 г. В течение дальнейших лет использовались усовершенствованные теоремы (Blumenthal, Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 321—338; РЖМат, 1954, 4577). 2. Конгруэнтное вложение в гильбертово пространство метрических преобразований его подмножеств посредством $f(x) = x^{1/2}$, приписываемое Вильсону (стр. 13), в действительности, принадлежит Шёнбергу (Schoenberg I. J., Ann Math., 1937, (2), 38, 787—793). Вильсон установил это только для преобразования единичного сегмента (Wilson W. A., Amer. J. Math., 1935, 57, 62—68). 3. Краткое (и не слишком ясное) изложение доказательства теоремы об n-решетках для евклидовых дуг, данное Альтом и Бэром (Alt, Beer, Ergebn. Math. Kolloq, 1935, 6, 7) упоминается на странице 19, но не сделано ссылки на изящное доказательство Шёнберга этой теоремы для дуг любого полуметрического пространства с непрерывными расстояниями. 4. Изложение теорем, отражающих метрическую сущность формул Френе в теории кривых (хорошо изложенное на стр. 20), было выполнено в миссурийской диссертации Гаддама (РЖМат, 1953, 1389). L. M. Blumenthal

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 340.

7620. Соотношения между группами E_7 и E_8 и октавной плоскостью. IV. Фрёйденталь (Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene. IV. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, **A58**, № 3, 277—285; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 277—285 (нем.)

Продолжение более ранней работы автора (РЖМат, 1956, 1993).

На октавной плоскости определяются перспективные преобразования $\Pi^{\varkappa}_{A,B}$ с вершиной A и осью B, обладающие тем свойством, что четыре точки $A, B\times(A\times X)$, $X, X' = \Pi^{\varkappa}_{A,B}X$ лежат на одной действительной прямой и имеют сложное отношение, равное $\varkappa$. Если вершина A не лежит на оси B, то

$$\Pi^{\varkappa}_{A,B}X = X + \frac{1-\varkappa(X,B)}{\varkappa}\frac{}{(A,B)}A - \frac{4(1-\varkappa)}{(A,B)}B\times(A\times X);$$

указанное выражение нормировано так, чтобы имело место соотношение $\Pi^{\varkappa}_{A,B}\Pi^{\varkappa_1}_{A,B} = \Pi^{\varkappa\varkappa_1}_{A,B}$. С помощью предельного перехода находится $\Pi^{\varkappa}_{A,B}X$ и для того случая, когда A инцидентно B.

Далее строится геометрия в множестве $\mathfrak{N}$. Роль точек играют $\theta\in\mathfrak{N}$; две точки θ, θ_1 «соединимы», если θ и θ_1 коммутативны (условия этого установлены выше). Максимальное множество попарно соединимых точек образует плоскость; плоскости имеют строение октавных плоскостей, причем каждая из них определяется элементом P множества $\mathfrak{M}$: соотношение $\theta P = 0$ означает, что точка θ инцидентна плоскости P. Прямыми называются пересечения двух или нескольких плоскостей, если они содержат более чем одну точку.

Устанавливается ряд свойств построенного таким образом пространства $\mathfrak{N}$, из которых перечислим основные. В пространстве $\mathfrak{N}$ имеются ∞^{33} точек, ∞^{42} прямых и ∞^{27} плоскостей; через одну прямую проходят ∞^1 плоскостей, через одну точку — ∞^{17} прямых; существуют ∞^{25} точек, соединимых с данной точкой θ. Через две соединимые точки проходит одна и только одна прямая. Если две точки θ_1, θ_2 несоединимы, то для каждой прямой Ω, проходящей через θ_1, имеется в точности одна прямая, инцидентная θ_2 и пересекающая Ω; множество точек, соединимых с θ_1 и с θ_2, имеет размерность 17. Если, кроме того, точка θ соединима с обеими точками θ_1, θ_2, то множество всех точек θ', соединимых с $\theta, \theta_1, \theta_2$, образует конус (одномерную совокупность прямых) с вершиной θ. Г. Б. Гуревич

7621. О гомологиях $h-l$-транзитивных плоскостей и плоскостей над почти телами. Цаппа (Sulle omologie dei piani h—l-transitivi e dei piani su quasicorpi. Zappa Guido), Ricerche mat., 1954, **3**, № 1, 35—39 (итал.)

Пусть π — конечная $h-l$-транзитивная плоскость (РЖМат, 1955, 4893). Тогда: 1) π будет $l-h$-транзитивной; 2) если точка $V\in h\cap l$, а прямая k проходит через V, то π $V-k$-транзитивна. С помощью результатов из РЖМат, 1956, 1614 эти результаты доказываются для конечных проективных плоскостей над почти телами. Л. А. Скорняков

7622. О координатизационной теореме Неймана. Фрайер, Гальперин (On the coordinatization theorem of J. von Neumann. Fryer K. D., Halperin Israel), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 4, 432—444 (англ.)

Показывается, что структура модулей конечного происхождения в пространстве n-мерных правых векторов над регулярным кольцом $\mathfrak{R}$, которое авторы связали с данной дедекиндовой структурой с дополнениями (РЖМат, 1956, 1150), изоморфна исходной структуре. Нейманом этот результат был получен несколько более сложным путем. Л. А. Скорняков

7623. Конечные проективные плоскости с координатами из веблен-веддербарнова тела. Ломбардо-Радиче (Piani grafici finiti a coordinate di Veblen-Wedderburn. Lombardo-Radice Lucio), Ricerche mat., 1953, **2**, № 2, 266—273 (итал.)

Пусть G — прямая сумма t циклических групп порядка p, где p — простое число. Доказывается, что всякое конечное веблен-веддербарново тело содержит p^t элементов, а его аддитивная группа есть G. Пусть, наоборот, задана группа G. Чтобы обозреть все веблен-веддербарновы тела с группой G в качестве аддитивной группы, достаточно обозреть всевозможные системы автоморфизмов группы, которые состоят из p^t-1 элемента, один раз транзитивны и содержат тождественный автоморфизм. Л. А. Скорняков

7624. Конечные проективные плоскости. Уэссон (Finite plane projective geometries. Wesson J. R.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 7. 32—40 (англ.)

Предлагается новый способ координатизации конечной проективной плоскости с n точками на каждой прямой. Все точки плоскости нумеруются натуральными числами от 1 до n^2-n+1 так, чтобы строки нижеследующей матрицы состояли из инцидентных точек:

$$A = \left(\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & n \\
1 & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \\
1 & 2n & 2n+1 & \dots & 3n-2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
1 & n^2-2n+3 & & & n^2-n+1 \\
2 & n+1 & \multicolumn{3}{|c}{\multirow{3}{*}{$\begin{array}{ccc} 2n & 3n-1 \dots & n^2-2n+3 \\ 2n+1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$}} \\
2 & n+2 & & & \\
\dots & \dots & & & \\
2 & 2n-1 & \multicolumn{3}{|c}{$\begin{array}{ccc} 3n-2 & \dots & n^2-n+1 \end{array}$}
\end{array}\right)$$

Теперь из точек прямых $[k, i]$, $i = n+1, \dots, 2n-1$, отличных от k и i, составим матрицы A_{k-2} порядка $n-1$. Проделав это для $k = 3, \dots, n$ и обозначив через A_0 правую нижнюю клетку матрицы A, получим систему матриц $A_0, A_1, \dots, A_{n-2}$, обладающих свойствами: 1) j-й столбец матрицы A_i состоит из тех же чисел, что и j-й столбец матрицы A_0; 2) каждое число в различных таблицах встречается в различных столбцах; 3) для каждой пары чисел из матрицы A_0 существует матрица, в которой эти числа располагаются на одной строке. Каждой конечной проективной плоскости отвечает описанная система матриц и наоборот. Результат тернарной операции $a\cdot m\circ b$, где a, m, b — целые числа, для которых $0\leqslant a_1 m_1 b\leqslant n-2$, определяется как $c - 2n - (a-1)(n-1)$, где c — число, стоящее на пересечении $(b+1)$-й строки и $(a+1)$-го столбца матрицы A_m. Оказывается, что эта тернарная операция обладает теми же самыми свойствами, что и обычная тернарная операция Холла.

Пусть $x_0 = 0$ и $x_i = (1\cdot x_{i-1}\circ x)$. Тогда A-порядком элемента x называется наименьшее положительное число r, для которого $x_r = 0$. Оказывается, что каждый элемент обладает A-порядком. Вводятся операции $a+b = 1a\circ b$ и $ab = ab\circ 0$. Для того чтобы тернар с простым числом элементов был полем относительно операций $+$ и $\cdot$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие свойства: $a\cdot x_i\circ 0 = (a\cdot x\circ 0)_i$ и $1(1\cdot x\circ y)\circ z = 1\cdot x\circ(1\cdot y\circ z)$.

Примечание референта. В оригинале в матрице A в двух местах вместо $n+2$ напечатано $n+3$. Л. А. Скорняков

7625. Конечные транзитивные и квазитранзитивные проективные плоскости. Цаппа (Sui piani grafici finiti transitivi e quasitransitivi. Zappa Guido), Ricerche mat., 1953, **2**, № 2, 274—287 (итал.)

Конечная проективная плоскость π называется транзитивной (квазитранзитивной), если существует группа G, состоящая из коллинеаций плоскости π и транзитивная относительно всех (кроме точек, лежащих на фиксированной прямой u и фиксированной точки U) точек плоскости π и всех ее прямых (кроме прямой u и прямых, проходящих через U). Транзитивная плоскость описывается с помощью группы G. Обобщение этого описания дано Бруком (РЖМат, 1956, 4070). Аналогичный результат получается для квазитранзитивных плоскостей. Транзитивная плоскость π, содержащая на каждой прямой $n+1$ точку, называется регулярной, если группа G нециклическая и имеет порядок $N = n^2 + n + 1$. Если π дезаргова, $n \equiv 1 \pmod 3$ и $N = 3k$, где k — простое число, то она регулярна. Л. А. Скорняков

7626. Плоскости преломления. Ломбардо-Радиче (I piani di rifrazione. Lombardo-Radice Lucio), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 130—139 (итал.)

Предлагается обобщение (алгебраическое), данного Моултоном (Moulton, Trans. Amer. Math. Soc., 1902, **3**, 192—195), построения недезарговых плоскостей, называемых автором плоскостями преломления (см. также Скорняков, Успехи матем. наук, 1951, 6, 6(46)). Именно, плоскости Моултона соответствует система F с двойной композицией: 1. F является группой вещественных чисел по сложению. 2. Второй закон композиции определен в F так: А. Если хотя бы одно из чисел a, b не отрицательно, то $a \circ b = ab$. Б. Если a и b оба отрицательны, то $a \circ b = kab$, где k — положительная константа. Обобщение состоит в замене 2. В. условием: если a и b оба отрицательны, то $a \circ b = f(a)b$, где $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрицательной полуоси и монотонно изменяющаяся от $-\infty$ до 0 вместе с x. Случай плоскости Моултона получается при $f(k) = kx$, $x \leqslant 0$. В качестве следующего примера рассмотрен случай кусочно-линейной функции $f(x)$.
В. В. Рыжков

7627. О предыдущей заметке: «Изучение некоторых метрических пространств». Титс (Sur un article précédent: «Étude de certains espaces métriques». Tits J.), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), **6**, 126—127 (франц.)

Вносятся поправки к статье автора (РЖМат, 1956, 6127). Исправления даны к результатам пунктов 4 и 6.
Н. Н. Яненко

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

7628. О наименьшем шаре, содержащем любую фигуру заданного диаметра. Зюсс (Über die kleinste Kugel die jede Figur gegebenen Durchmessers einschließt. Süss Wilhelm), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1955, **20**, № 1—2, 115—116 (нем.)

Юнгом (Joung H. E. W., J. reine und angew. Math., 1901, **123**, 241—257) было доказано, что наименьшим шаром, содержащим любую фигуру диаметра 1, является шар, описанный вокруг правильного симплекса с ребром 1 (радиус этого шара равен $\sqrt{n/2(n+1)}$, где n — размерность пространства).

Приводится новое, весьма краткое и элементарное доказательство этого утверждения.
Г. Я. Поплавская

7629. О множествах постоянной ширины, содержащихся в множестве данной минимальной ширины. Эглстон (Sets of constant width contained in a set of given minimal width. Eggleston H. G.), Mathematika, 1955, **2**, № 1, 48—55 (англ.)

Шириной плоского выпуклого множества в данном направлении называется ширина наименьшей полосы между параллельными прямыми этого направления, содержащей множество. Если ширина выпуклого множества одинакова по всем направлениям, то оно называется множеством постоянной ширины.

Доказывается, что: 1. Существует выпуклое множество с минимальной шириной λ (равносторонний треугольник), в котором не содержится выпуклого множества постоянной, большей $\lambda/(3-\sqrt{3})$ ширины. 2. В любом выпуклом множестве минимальной ширины λ содержится выпуклое множество постоянной, равной $\lambda/(3-\sqrt{3})$ ширины. А. В. Погорелов

7630. Интегральные задачи о точечных преобразованиях. Вилла (Problemi integrali sulle trasformazioni puntuali. Villa Mario), Compositio math., 1954, **12**, № 2, 137—146 (итал.)

Вводится понятие линеаризирующего соответствия двух точечных преобразований плоскости (имеющих в данной точке касание того или иного порядка). Для случая, когда одно из этих преобразований — касательное проективное преобразование для другого, получается известное K-линеаризирующее соответствие (Čech E., Čas. pěst. mat. a fys., 1950, **74**, 32—48; **75**, 123—158), разбирается случай, когда одно преобразование — какое-либо из соприкасающихся квадратичных преобразований для второго. В последнем случае говорится о «линеаризирующих соответствиях третьего порядка». Далее от рассмотрений, относящихся к фиксированной точке, автор переходит к изучению точечных соответствий между двумя плоскостями методом подвижного репера и внешних форм Картана; видимо, в связи с этим в названии работы говорится о «задачах в целом». При этих рассмотрениях используются линеаризирующие соответствия третьего порядка. В. В. Рыжков

7631. Об изгибаемости поверхности положительной гауссовой кривизны. Хельвиг (Über die Verbiegbarkeit von Flächenstücken mit positiver Gauszscher Krümmung. Hellwig Günter), Arch. Math., 1955, **6**, № 3, 243—249 (нем.)

Приводятся доказательства следующих двух теорем:

I. Пусть F — поверхность положительной гауссовой кривизны, которая отнесена к некоторой системе координат x,y, причем радиус-вектор $r(x,y)$ имеет производные четвертого порядка, удовлетворяющие условию Гёльдера. Пусть $|r_x \times r_y| > 0$ всюду. Если поверхности F на плоскости $z = x + iy$ соответствует область, ограниченная простой замкнутой кривой с непрерывной кривизной, то F допускает непрерывное конечное изгибание.

II. Пусть выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда, если линии кривизны поверхности составляют изотермическую сеть линий, то всякое бесконечно малое изгибание поверхности F, оставляющее без изменения среднюю кривизну H вдоль края, оставляет ее (кривизну H) без изменения всюду. Если же сферическое изображение линий кривизны составляет изотермическую сеть, то всякое бесконечно малое изгибание поверхности F, оставляющее без изменения сеть линий кривизны вдоль края, оставляет ее без изменения всюду.

Как замечает автор, первая теорема представляет собой подтверждение высказанного еще в 1920 г. Либманном предположения, что всякий овалоид изгибаем, если из него вырезано сколь угодно малое отверстие. Вторая же теорема является уточнением известных теорем Вейнгартена о бесконечно малых изгибаниях, сохраняющих без изменения среднюю кривизну или линии кривизны поверхности.

При доказательстве проведенных теорем автор пользуется известными признаками разрешимости краевой

задачи для системы уравнений

$$u_x - v_y + au + bv = 0, \quad u_y + v_x + cu + dv = 0$$

с граничными условиями вида $\alpha u + \beta v = \gamma$. И. Н. Векуа

7632. Исследование сферического образа поверхности отрицательной кривизны. Ефимов Н. В., Докл. АН СССР, 1955, **105**, № 4, 628—630

Рассматривается сферическое изображение Σ' поверхности Σ отрицательной кривизны, удовлетворяющей условиям: 1) поверхность Σ односвязна; 2) поверхность Σ полная; 3) если кривая γ на поверхности Σ простирается в бесконечность в смысле внутренней метрики и если направление нормали поверхности вдоль кривой γ имеет предел, то γ простирается в бесконечность, как кривая в пространстве.

Результаты содержатся в теоремах:

1. Если граница Σ' имеет изолированную точку (с конечным или бесконечным ветвлением Σ' вокруг нее), то точная верхняя грань гауссовой кривизны поверхности Σ равна нулю.

2. Пусть граница Σ' имеет связную часть k'. Если на Σ верхняя грань гауссовой кривизны меньше нуля, то k' является дугой большого круга.

3. Если граница Σ' состоит из конечного или счетного множества связных компонент, то на поверхности Σ точная верхняя грань гауссовой кривизны равна нулю.

Приведено доказательство вспомогательного предложения, на котором в существенной части основаны доказательства теорем 1, 2, 3. А. В. Погорелов

7633. О некоторых экстремальных задачах геометрии плоских кривых. Турковский В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. политехн. ин-т, Киев, 1956

См. также: 7158, 7188, 7216 Д, 7373

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

7634. О численном интегрировании дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$. Урабе, Янагихара (On numerical integration of the differential equation $y^{(n)} = f(x, y)$. Urabe Minoru, Yanagihara Hiroki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A18**, № 1, 55—76 (англ.)

Метод численного интегрирования, разработанный Урабе и Цусимой для дифференциальных уравнений первого и второго порядка (РЖМат, 1956, 4084), применяется к уравнению $y^{(n)} = f(x, y)$, для которого устанавливаются конечно-разностные аппроксимации вида

$$y_{r+1} = \sum_{s=0}^{N} l_s y_{r\ s} + h^n \sum_{\rho=0}^{p} \left(\alpha_{n\rho} - \sum_{s=1}^{N} l_s \gamma_{n\rho}^{s}\right) \nabla^{\rho} f_r,$$

где коэффициенты l_s должны удовлетворять условиям

$$\sum_{s=0}^{N} l_s = 1, \quad 1 + (-1)^{\nu-1} \sum_{s=1}^{N} s^{\nu} l_s = 0, \nu = 1,2,\ldots,n-1.$$

Для коэффициентов $\alpha_{n\rho}$ и $\gamma_{n\rho}^{s}$ указан общий метод их расчета и приведены таблицы значений этих коэффициентов для $n = 1, 2, 3$, $\rho = 0, 1, \ldots, 6$, $s = 1,2, \ldots, 5$. Вопрос о рациональном выборе коэффициентов l_s подробно проанализирован для дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. И. М. Рапопорт

7635. Приближенное решение уравнения $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Кухта Г. П., Уч. Зап. Кишиневск. ун-та, 1955, **17**, 45—52

Метод Чаплыгина распространяется на уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, т. е. на уравнения вида $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, в предположении, что в некоторой области D переменных $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$

$$\partial F / \partial y^{(n)} \geqslant q > 0, \quad \partial F / \partial y^{(k)} < 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

и квадратичная форма $\sum_{k,l=0}^{n} (\partial^2 F / \partial y^{(k)} \partial y^{(l)}) \xi_k \xi_l$ неотрицательна. Имеются описки (вместо $\tilde{q}$ в знаменателях дробей k' / q и L / q должно быть N), в результате чего доказательство § 2 (построение двусторонних приближений) ошибочно, но результат при некотором видоизменении алгоритма можно сохранить. Б. Н. Бабкин

7636. О неустойчивости в методе центральных разностей для дифференциальных уравнений второго порядка. Коллац (Über die Instabilität beim Verfahren der zentralen Differenzen für Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Collatz Lothar), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 2, 153—154 (нем.)

Результат Рутисхаузера (Rutishauser H., Z. angew. Math. und Phys., 1952, **3**, 65—74) применяется к исследованию устойчивости (по отношению к накоплению ошибок вычисления) при решении уравнения $y'' = f(x, y, y')$ с соответствующими начальными условиями методом центральных разностей. В плоскости $(h^2 f_y, h f_{y'})$ устанавливаются области устойчивости и неустойчивости.

Из Zbl, Math., 1954, **50**, № 6/10, 349

7637. О видоизменении метода Чаплыгина для дифференциальных уравнений. Воронovская (Asupra modificării metodei lui Ceaplighin pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul intîi. Voronovskaia E. V.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fis., 1956, **10**, № 1, 36—43 (рум.)

7638. Скорость сходимости при численном решении уравнения диффузии. Старк (Rates on convergence in numerical solution of the diffusion equation. Stark R. H.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 1, 29—40 (англ.)

Возрастное диффузионное уравнение для потока нейтронов $\Phi(r, u)$ в реакторе вида $-D(u) \nabla^2 \Phi(r, u) + A(u) \Phi(r, u) = G(r, u)$, где $G(r, u) = -\frac{\partial}{\partial u} [q(r,u) + \eta(r, u)] + \chi(u) P(r)$ $(u < u_T)$,

$$G(r, u_T) = \lim_{u \to u_T} [q(r, u) + \eta(r, u)] + \chi(u_T) P(r),$$

P, q и η — известные функции Φ; D, A и χ — экспериментально заданные функции, ∇^2 — двумерный лапласиан, r — пространственная вектор-координата, u — логарифмическая энергия нейтрона (u_T — соответствует минимальной — тепловой — энергии нейтронов, $u = 0$ — энергии деления) с начальным условием $\Phi(r, 0) = 0$, краевым условием (обращение в нуль потока Φ на границе данной, вообще говоря, прямоугольной области) и так называемым условием сшивки, заключающимся в непрерывности Φ и $D \nabla_n \Phi$ (∇_n — проекция градиента на нормаль к границе) на границе между двумя различными средами (например, уран-графит), решается методом сеток как по r, так и по u. При этом по u используется «перевернутая» разностная схема, что обеспечивает устойчивость по отношению к погрешностям

округлений при любом шаге по энергии. Главная трудность, по мнению автора, заключается в необходимости решения для каждого дискретного значения u большой, доходящей до 3000 и больше, системы линейных алгебраических уравнений. В силу специфичности матрицы этой системы (в каждой строке отлично от нуля не более пяти элементов), автор применяет так называемый ускоряющий итеративный метод Либмана (Frankel S., Math. Tables and Other Aids Comput., 1950, **4**, 65—75). Подробно проанализирован выбор множителей α и δ (имея в виду использование электронных вычислительных машин), от которых существенно зависит ускорение сходимости. Приведено время, в зависимости от числа узлов по пространственным координатам и по энергии, необходимое для решения отдельных этапов задачи на машине УНИВАК, и много других практических советов. В. К. Саульев

7639. Наклонные пластины. Метод арифметического расчета. Константинеску-Кэтунешти (Plăci oblice o metodă de calcul numeric. Constantinescu-Cătunești S.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 913—922 (рум.; рез. русс., франц.)

Уравнение $\Delta\Delta\xi = p(x, y)/N$, где $\Delta = (\partial^2/\partial x^2 - 2\cos\alpha\partial^2/\partial x\partial y + \partial^2/\partial y^2)/\sin^2\alpha$, приводится к двум: $\Delta M = -p(x, y)$, $\Delta\xi = -M/N$. Определение M и ξ сводится к определению функций w и z из $M = ws_1$, $\xi = zs_1s_2/N$, где s_1, s_2 — поверхностные напряжения. Для определения w и z применяется метод сеток.

Решение полученных систем уравнений заменяется арифметическим расчетом последовательных приближений путем последовательного уточнения выбранных каким-либо способом начальных значений деформации. Уточнение проводится применением одного из двух конечных косых гармонических операторов, вводимых автором. Метод применяется как к концентрированным нагрузкам, так и к несимметричным. Д. Ф. Давиденко

7640. Приближенное решение уравнения Лапласа. Пань Цзя-чжэн (拉普拉斯方程式之近似解法 · 潘家錚), 新科學, Синь кэсюэ, 1955, №1, 12—17 (кит.)

Предлагается метод приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа на плоскости. Решение φ_0 задачи Дирихле в точке P_0 сначала представляется в виде

$$\varphi_0 = \frac{p_a\varphi_a + p_b\varphi_b + \dots}{p_a + p_b + \dots} = \frac{\Sigma p\varphi}{\Sigma p},$$

где φ_x — заданное граничное значение в точке P_x, p_a — функция расстояния r_a между точками P_0 и P_x. Полагая приближенно $p_1 = r_a^{-2}$, автор получает искомое решение в виде $\varphi_0 = (\oint \varphi ds/r^2)/(\oint ds/r^2)$, где $\oint$ означает интегрирование по контуру области. Автор считает, что данный метод с точки зрения практики иногда дает хорошее решение задачи, которое может быть принято за первое приближение в методе итераций. Оценка погрешности метода не приводится. Юань Чжао-дин

7641. О численном интегрировании уравнений в частных производных. Дюнген (Sur l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles. Dungen F. H. van den), Mém. mécanique fluides offerts à M. Dimitri P. Riabouchinsky. Paris, Publ. Sci. Techn. Ministère Air, 1954, 61—70 (франц.)

Дифференциальную задачу с частными производными

$$\partial^2u/\partial t^2 = c^2\partial^2u/\partial x^2 \quad (-\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0);$$
$$u(x, 0) = F(x),\ \partial u(x, 0)/\partial t = G(x)$$

автор заменяет на дифференциально-разностную задачу $d^2v_h/dt^2 = (v_{h+1} - 2v_h + v_{h-1})(c/\Delta x)^2$ ($|h| = 0, 1, 2, \dots$; $t \geqslant 0$); $v_h(0) = F(x_h)$, $dv_h(0)/dt = G(x_h)$, где $v_h(t) \equiv v(x_h, t)$, $x_h \equiv h\Delta x$. Отмечается, что это позволит использовать электрические сетки (в частности, дифференциальный анализатор) для получения решения, аппроксимирующего u. (Аналогичные идеи см. Crank, Nicolson, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1947, **43**, 50—67). Для простых F и G автор решает дифференциально-разностную систему, явно используя преобразования Фурье. Кроме того, он получил некоторые хорошо известные тождества для сумм функций Бесселя четного порядка и сумму, аппроксимирующую определенный интеграл. M. A. Hyman

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, №5, 525.

7642. Вертикальное экстраполирование компонент геомагнитного поля. Змуда, Мак-Кланг (Vertical extrapolation of geomagnetic field components. Zmuda Alfred, McClung Lowell), Trans. Amer. Geophys. Union, 1955, **36**, № 6, 939—942 (англ.)

Автор предлагает метод непрерывного экстраполирования компонент магнитного поля в вертикальном направлении в предположении, что их значения известны на поверхности, окружающей источники магнетизма. Решение дается в виде ряда Тейлора, причем производные в вертикальном направлении каждой компоненты поля выражаются через значения компонент и их производных на указанной поверхности. Быстрота сходимости ряда зависит от структуры поля на поверхности и от расстояния рассчитываемой точки от поверхности. Метод позволяет учитывать эффекты магнитных аномалий, имеющихся в локальных областях поверхности, расположенных ниже рассматриваемой точки. Дается сравнение данного метода с методом сферических гармоник. А. Е. Божанова

7643. Некоторые численные методы релаксационной техники. Штифель (Some special methods of relaxation technique. Stiefel Eduard), Nat. Bur. Standards, Appl. Math. ser., 1953, № 29, 43—48 (англ.)

Релаксационный принцип сводит решение системы $Du + l = 0$ с положительно определенной матрицей D к задаче минимизации функционала $F(u) = \frac{1}{2}(u, Du) + (l, u)$. Известные релаксационные методы (Саусвелла, метод наискорейшего спуска, градиентный метод с постоянным множителем) дополняются методом сопряженных направлений и, в частности, методом сопряженных градиентов (Stiefel E., Z. angew. Math. und Phys., 1952, **3**, 1—33; Lanczos C., Proc. Sympos. Spectral theory and differenf probl., Stielwater, Oklahoma, 1951, 301—316; реф. 7645), дающими решение системы n уравнений точно в n шагов. Приводятся результаты решения конечно-разностных уравнений для уравнений $\Delta u = 0$ и $\Delta^2 u = 0$ (при некоторых граничных условиях) по n-шаговому методу. Последняя задача сводилась к решению системы 139 линейных уравнений. В. Н. Фаддеева

7644. Релаксационные методы наилучшей стратегии для решения линейных систем уравнений. Штифель (Relaxationsmethoden bester Strategie zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Stiefel E.), Comment. math. helv., 1955, **29**, № 2, 157—176; № 3, 177—179 (нем).

Развивается общая точка зрения на градиентные методы для решения систем линейных уравнений $Ax = b$, где A — положительно определенная матрица, собственные значения которой лежат в интервале (0,1). Градиентные методы заключаются в построении последовательных приближений по формуле $x_{i+1} = x_i + r_i/q_i$, где $r_i = b - Ax_i$, q_i — некоторые коэффициенты. Ставится вопрос о наилучшем выборе последовательности коэффициентов $q_0, \dots, q_{n-1}$ так, чтобы результат применения n шагов был бы наилучшим в том или другом смысле («стратегический» выбор коэффициентов). Так как результат n шагов процесса дает $x_k = [E - R_k(A)]\,b/A$

(при $x_0 = 0$, что не нарушает общности), где $R_n(\lambda) = (1-\lambda/q_0)\ \ldots\ (1-\lambda/q_{n-1})$, то задача о наилучшем выборе q_i становится эквивалентной задаче наилучшего (в выбранном смысле) выбора полиномов $R_i(\lambda)$, подчиненных условию $R_i(0) = 1$. При этом $r_{kj} = R_k(\lambda_j)\, b_j$, где r_{kj} — j-я компонента невязки r_k в базисе из собственных векторов матрицы A, b_j — то же для b. Если взять за меру точности $\psi_n = \int_0^1 R_n(\lambda)^2 \rho(\lambda)\, d\lambda/\lambda$, где $\rho(\lambda)$ — некоторая произвольная положительная на (0,1) функция плотности такая, что $\int_0^1 \rho(\lambda)\, d\lambda/\lambda$ существует, то наилучшие q_i будут корнями ортогональных с весом $\rho(\lambda)$ полиномов. Отмечается, что дискретному весу $\rho(\lambda) = \sum_j b_j^2 \delta(\lambda-\lambda_j)$, где $\delta(\lambda-\lambda_j)$ — функция Дирака, соответствует $\psi_n = (Ay_n, y_n) = (y_n, r_n)$, где y_n — вектор ошибки. Используя рекуррентные соотношения между ортогональными полиномами, можно получить результат k шагов непосредственно через коэффициенты этих формул, минуя вычисления корней. При $\rho(\lambda) = \sum_j b_j^2 \delta(\lambda-\lambda_j)$ и $k = n$ получается метод, эквивалентный методу минимальных итераций Ланцоша (Lanczos C., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, 49, 33—53), при $k < n$ — шаговому варианту метода наискорейшего спуска (Karush W., Pacif. J. Math., 1951, 1, 233—248).

Исследуя использование непрерывного веса $\rho(\lambda)$, автор доказывает сходимость процесса при $\rho(\lambda) = \lambda^\alpha (1-\lambda)^\beta f(\lambda)$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant -1/2$, где $f(\lambda)$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая в интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, и $f(\lambda) > 0$ в том же интервале. Подробно исследуется случай $f(\lambda) = 1$ (гипергеометрическая релаксация). В частности изучается влияние выбора α и β на затухание компонент невязок по отношению к собственным значениям, расположенным в той или другой части интервала (0,1).

Приведены результаты применения методов к задаче кручения балки квадратного сечения. В. Н. Фаддеева

7645. Методы сопряженных градиентов для решения систем линейных уравнений. Хестенес, Штифель (Methods of conjugate gradients for solving linear systems. Hestenes Magnus R., Stiefel Eduard), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952 (1953), 49, 409—436 (англ.)

Пусть A — положительно определенная матрица и $Ah = k$; P_m — $n \times m$-матрица такая, что $P_m^T A P_m = D_m^2$ — диагональная, неособенная матрица. Образуем $x_m = x_0 + P_m a_m$ при помощи некоторых a_m, где x_0 — произвольный вектор. Если $r_i = k - Ax_i$ ($i = 0, 1, \ldots, m$), то можно выбрать a_m так, чтобы $P_m^T r_m = 0$. Это будет при $a_m = D_m^{-2} P_m^T r_0$. Более того, для некоторых $m \leqslant n$ $x_m = h$. Любой процесс получения последовательности столбцов $p_1, p_2, \ldots$ матриц P_m представляет собой метод сопряженных направлений. Например, если U_m есть $n \times m$-матрица ранга m, то в результате ортогонализации столбцов по Шмидту получается единственная единичная верхнетреугольная матрица V_m такая, что $P_m = U_m V_m^{-1}$ обладает требуемыми свойствами. Если при $m = n$, $U_n = I$, то $P_n = V_n^{-1}$ и рассматриваемый метод эквивалентен алгоритму Гаусса с извлечением квадратного корня по Холесскому. Если $U_m = R_m = (r_0, r_1, \ldots, r_{m-1})$, то мы имеем метод сопряженных градиентов. При помощи этого метода очень просто получается, что для некоторого скаляра β_m, $p_{m+1} = r_m + \beta_m p_m$, и что матрица $R_m^T R_m$ — диагональная. При этом $(h-x_m)^T A (h-x_m)$ уменьшается монотонно, как $(h-x_m)^T (h-x_m)$, но $r_m^T r_m$ может осциллировать.

Эта статья содержит наиболее полное из всех опубликованных изложений рассматриваемого метода. Последовательность итераций x_m охарактеризована геометрически; получены оценки разностей r_m; введено видоизменение метода, в результате которого векторы r_m уменьшаются по модулю; обсужден метод окаймления; сделано обобщение для несимметрических матриц; выяснена связь данного метода с методом Ланцоша вычисления характеристических чисел (тот же журнал, 1950, 45, 255—282), а также с ортогональными полиномами и цепными дробями. Рассмотрен короткий числовой пример. A. S. Householder

Перевод из Math. Revs. 1954, 15, № 7, 651.

7646. О скорости сходимости итеративного процесса. Грегори (On the convergence rate of an iterative process. Gregory Robert T.), Math. Mag., 1955, 29, № 2, 63—68 (англ.)

Излагаются некоторые известные факты о скорости сходимости итеративных процессов. Если процесс имеет вид $x_{n+1} = Ax_n$ и все собственные значения матрицы A меньше единицы, то скорость сходимости в конечном счете определяется наибольшим из них, причем если меньшим собственным значениям соответствуют жордановы ящики выше первого порядка, это не влияет на скорость сходимости.

7647. Применение метода итераций к решению численных уравнений, встречающихся в строительстве. Кремер (The method of iteration. Solving numerical equations in theory of structures. Graemer Habil Herm.), Indian Concrete J., 1955, 29, № 11, 362—364 (англ.)

Для численного решения систем линейных уравнений, решаемых в строительной технике, может быть с успехом использован известный метод итерации Зейделя. Даны примеры на применение метода итераций к численному решению кубических уравнений, систем уравнений высших степеней и трансцендентных уравнений. Я. Я. Даубе

7648. Дискретные формы, линейные и билинейные. Операторы над формами, сопряженные формы. Миньо (Formes discrètes linéaires et bilinéaires. Opérateurs sur ces formes, formes adjointes. Mignot Noël), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 8, 837—839 (франц.)

Вводятся с целью использования в теории численных методов дискретные аналоги линейной и билинейной формы для функций, заданных на сетке $A(j) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} a_k(j) f(j+k)$; $A(j) = \sum_{k,r} a_{k,r}(j) f(j+k) g(j+r)$. Дается определение сопряженности двух линейных форм. Указываются различные условия сопряженности двух форм. В частности, необходимое и достаточное условие самосопряженности линейной формы есть представимость ее в виде $\sum_k \Delta^k [a_k(j) \Delta^k f(j-k)]$, где Δ — разностный оператор. Л. В. Канторович

7649. Оценка быстроты сходимости некоторых итерационных процессов. Калиновская (Оцінка швидкості збіжності деяких ітераційних процесів. Калиновська С. С.), Наук. зап. Луцьк. держ. пед. ін-ту, 1955, 3, № 2, 11—17 (укр.)

Применительно к уравнению $Bx = b$, где B — симметричная положительно определенная матрица и b — за-

данный n-мерный вектор, исследуется итерационный процесс, предложенный Л. В. Канторовичем (Успехи матем. наук, 1948, 3), при котором

$$x_n = x_{n-1} + \sum_{k=0}^{p-1} c_k^{(n)} B^k \Delta_{n-1};\ p > 1;$$

здесь x_0 задается произвольно, $\Delta_{n-1} = Bx_{n-1} - b$, а коэффициенты $c_k^{(n)}$ определяются из условия минимизации длины вектора невязки. Э. А. Чернышенко

7650. Практическое приложение теории математических спектров М. Петровича к вычислениям. Орлов (Application pratique de la théorie des spectres matémathiques de Michel Petrovitch au calcul numérique. Orloff Constantin), Rev. scient., 1953, 91, № 4, 243—247 (франц.)

Если дана последовательность целых неотрипательных чисел, то приписав к каждому из них слева то или иное число нулей, можно получить одинаковое число цифр (h) во всех числах. Написав полученные числа в том же порядке, получим многозначное число S — простой спектр последовательности. Например, для последовательности 15, 23, 148, 5,12 при $h = 3$ простым спектром будет $S = 15023148005012$, а при $h = 4$ — $S = 150023014800050012$. Если в последовательности есть отрицательные числа, то простой спектр её равен разности между простыми спектрами последовательностей, которые получаются из данной сначала заменой отрицательных чисел нулями, а затем заменой положительных чисел нулями, а отрицательных — их абсолютными величинами; при этом $10^h/2$ должно быть больше абсолютной величины любого члена последовательности. Например, для последовательности 12, —27, 78,—11 простым спектром будет 11973077989 ($h = 3$). Дается правило определения «действительных значений» граней спектра, т. е. чисел исходной последовательности. Вводится обратный спектр Σ последовательности (являющийся простым спектром последовательности данных чисел, написанных в обратном порядке) и некоторые другие вспомогательные спектры. Даны способы решения с помощью спектров ряда простых задач. Например, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = M_h\ (S_a \Sigma_b)$, где S_a — простой спектр последовательности $\{a_i\}$, Σ_b — обратный спектр последовательности $\{b_i\}$, $10^h > 2h \cdot \mathrm{Max}\,|a_i| \cdot \mathrm{Max}\,|b_i|$, $M_h\ (S_a\ \Sigma_b)$ — действительное значение n-й грани числа $S_a \Sigma_b$. Аналогичные задачи могут быть решены и для последовательностей многочленов, спектры которых образуются «объединением» спектров последовательностей коэффициентов этих многочленов (коэффициенты всегда можно приближенно заменить десятичными дробями, что позволяет свести дело к операциям над целыми числами). Пользуясь спектрами, можно решать и более сложные задачи (линейное преобразование координат точек n-мерного пространства, вычисление определителей, решение систем линейных уравнений). А. П. Доморяд

7651. Практический спектральный метод вычисления определителей и решения систем линейных уравнений. Орлов (Méthode spectrale pratique d'évaluation numérique des déterminants et de résolution du système d'équations linéaires. Orloff Constantin), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1953, 5, № 1—2, 17—30 (франц.; рез. макед.)

Если над последовательностью, заданной только спектром (см. реф. 7650), требуется произвести некоторые преобразования, то для этого надо выполнить некоторые преобразования над спектром, не переходя от спектра к последовательности. Пользуясь этими преобразованиями, автор предлагает методы вычисления скалярного произведения векторов, а также вычисления определителей и решения систем линейных уравнений. В предлагаемых методах решения систем линейных уравнений автор отмечает следующие преимущества по сравнению с другими методами: 1) меньшее число операций; 2) все операции можно выполнить на арифмометре; 3) легкая и мало утомительная схема вычислений. Эти преимущества возрастают с ростом числа уравнений. Л. М. Голубева

7652. Формулы механической кубатуры с минимальным числом членов. Георгиев (Wzory kubatury mechanicznej z najmniejsza liczba wyrazów. Georgev Georg), Rozpr. mat., 1955, № 8, 1—71, (польск.; рез. англ.)

Подробные доказательства формул механической кубатуры вида

$$\iint \dots \int_R P(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$$

и

$$\iint \dots \int_R P(x_1, x_2, \dots, x_m)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m = \lambda \sum_{i=1}^{N} P(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)})$$

в предположении, что существуют моменты области R степени до n включительно, и P обозначает полином степени не выше n. Рассмотрены случаи $n = 1, 2$, $m = 2, 3$, а также, в предположении, что область R симметрична относительно одной точки, случаи $n = 3$, $m = 2, 3$. Эти формулы были опубликованы в Докл. АН СССР, 1952, 83, № 4. См. также РЖМат, 1953, 1411. S. Drobot

7653. Оскулаторная квадратурная формула. Сользер (Osculatory quadrature formulas. Salzer Herbert E.), J. Math. and Phys., 1955, 34, № 2, 103—112 (англ.)

Автор называет «оскулаторной квадратурной формулой» всякую формулу механических квадратур, полученную интегрированием n-точечной эрмитовой интерполяционной формулы, в которой используются значения подинтегральной функции и ее первой производной в n фиксированных точках. «Оскулаторная квадратурная формула» строится следующим образом. Введя равноотстоящие абсциссы с шагом h, автор полагает $x = x_0 + ph$ (p — новое переменное); $f(x) = f(x_0 + ph) \equiv f_p \equiv f$; $x_i = x_0 + ih$; $f(x_i) \equiv f_i$; $f'(x_i) = f_i'$, где индекс i меняется от $-[(n-1)/2]$ до $[n/2]$. Далее автор исходит из следующей интерполяционной формулы:

$$f(x_0 + ph) = \sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \{L_i^{(n)}(p)\}^2 \{1 - 2L_i^{(n)\prime}(i)(p-i)\}\, f_i + \sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} \{L_i^{(n)}(p)\}^2 (p-i)\, hf_i' + R_{2n}(p), \quad (1)$$

где

$$L_i^{(n)}(p) = \prod_{j=-[(n-1)/2],\, j\neq i}^{[n/2]} \{(p-j)/(i-j)\}$$

и

$$R_{2n}(p) = f^{(2n)}(\xi) h^{2n} \left\{\prod_{j=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} (p-j)\right\}^2 / (2n)!,$$

$$x_{-[(n-1)/2]} \leqslant \xi \leqslant x_{[n/2]}.$$

Очевидно, что $\int_{x_0+rh}^{x_0+sh} f(x)\, dx$ или $h \int_r^s f(x_0 + ph)\, dp$ может быть вычислен интегрированием (1) по p от r

до s. Таким образом, получается «оскулаторная квадратурная формула» вида

$$\int_{x_0+rh}^{x_0+sh} f(x)\,dx = h\sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} A_i f_i + h^2 \sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} B_i f_i' + R.$$

Остаточный член R аппроксимируется выражением $h\Delta^{2n}\int_r^s M^{(n)}(p)\,dp$, где Δ^{2n} — $2n$-я разность функции $f(x)$ при шаге, равном h,

$$M^{(n)}(p) \equiv \left\{\prod_{j=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} (p-j)\right\}^2 \Big/ (2n)!$$

Доказывается, что некоторые из коэффициентов A_i и B_i равны. Даны таблицы значений A_i и B_i.

Хр. Караниколов

7654. Исследования советских математиков над точностью приближенных методов интегрирования. Мосингевич (Badania matematyków radzieckich nad dokładnością przybliżonych metod całkowania. Mosingiewicz K.), Techn. i gospod. morska, 1953, 3, № 11, 374—376 (польск.)

Излагается содержание книги Ветчинкина В. П. и Когана Ф. М., Новые формулы численных квадратур, 1949. Предлагается уточнить квадратурные формулы, исходя из приближенного равенства $I - S_n \cong \cong 2^k(I - S_{2n})$, где I — точное значение интеграла, S_n — приближенное значение, полученное при применении квадратурной формулы, n — число частей, на которое разбивается промежуток интегрирования, k — порядок погрешности. При этом порядок формулы повышается, в частности правило трапеций для S_n приводит к правилу Симпсона для I. М. Л. Бродский

7655. Построение формул приближенного вычисления тройных интегралов по области (D), представляющей сферу. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 43—55

Построение формул приближенного вычисления тройных интегралов по области, представляющей эллипсоид. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, вып. 13, 57—69

Строятся кубатурные формулы вида

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{\mu} A_i f(x_i, y_i, z_i) + R_\mu,$$

где область (D) есть сфера и эллипсоид соответственно. Применяется метод, основанный на рассмотрении многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в данной области, коэффициенты которых связаны одной линейной зависимостью $\omega(g(x,y,z)) = 1$. Метод подробно исследован автором ранее (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1951, 8). Строятся формулы для $n = 1, 2, 3, 4$.

А. Н. Иванова

7656. Эффективное видоизменение формулы Эйлера—Маклорена. Танимото (An efficient modification of Euler-Maclaurin's formula. Tanimoto Bennosuke), Trans. Japan Soc. Civil Engrs, 1955, № 24, 1—5 (англ.)

Известная формула Эйлера — Маклорена для приближенного вычисления определенного интеграла преобразуется в формулу, не содержащую производных 3-го порядка

$$\int_a^{a+2nh} f(x)\,dx = (h/15)(7f_0 + 16f_1 + 14f_2 + \ldots + 14f_{2n-2} + 16f_{2n-1} + 7f_{2n}) - (h^2/15)(f_{2n}' - f_0') - (h^6/6300)(f_{2n}^{V} - f_0^{V}) - \ldots$$

Дается преобразование этой формулы применительно к вычислению интеграла $\int_0^\infty f(x)\,dx$, когда $f(x)$ стремится к нулю при больших значениях x, а также для вычисления интеграла $\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$. В качестве примера вычислен интеграл

$$\int_0^\infty\int_0^\infty [(1+z)/xy]\sin x \sin y e^{-z}\,dx\,dy,$$

где $z^2 = x^2 + y^2$.

Ф. С. Чуриков

7657. Об одном уточненном методе практического гармонического анализа. Юшков П. П., Сб. тр. общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-та холодильн. пром-сти, 1955, 8, 20—29

Приводится новое доказательство формулы Умова, применяемой в практическом гармоническом анализе:

$$\frac{a_m}{\alpha_m} = \frac{b_m}{\beta_m} = \left(\frac{\sin(m\pi/n)}{m\pi/n}\right)^2, \qquad (1)$$

где $n = 2p$ — число равных частей, на которые поделен период 2π, α_m и β_m — обычные приближенные значения коэффициентов Фурье; a_m и b_m — другие более точные значения коэффициентов Фурье, получаемые разложением аппроксимирующей ломаной линии. Доказательство приведено для случая $n = 12$. Другие доказательства формулы (1) для более общего случая даны Дэлленбахом и Иглем. Указывается, что, несмотря на то, что α_m и β_m можно определить только для $m \leqslant p$, коэффициенты a_m и b_m могут быть определены также и для значений $m > p$ по вычисленным значениям α_m и β_m для $m \leqslant p$. Приводится система шаблонов для облегчения практического вычисления a_m и b_m для $n = 12$, $m = 0, 1, \ldots, 6$, на основе предварительных вычислений α_m и β_m. Имеется числовой пример.

М. Г. Серебренников

7658. Гармонический анализатор с подвижными полосами. Грэнвилл-Уэлс (Moving-strip Fourier analyzer. Grenville-Wells H. J.), Rev. Scient. Instrum., 1954, 25, № 12, 1156—1161 (англ.)

Прибор аналогичен синтезатору Робертсона, применяющемуся для тех же целей (Robertson J., J. Scient. Instrum., 1948, 25, 28), и приспособлен для определения сумм вида

$$\sum_{-H}^{+H}\sum_{0}^{K} F_{h,k} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\pi(hX + kY)$$

для значений $F_{h,k}$ от —99 до +99, h от —15 до +15 и k от 0 до 15 включительно. Прибор в основном состоит из комплекта полос-линеек и набора досок с проделанными в них горизонтальными пазовыми канавками, в которые могут вставляться указанные линейки. На каждой доске с левой стороны имеются расположенные вертикально сверху вниз числовые значения индексов h от —15 до +15, причем каждому отдельному индексу соответствует своя канавка. Каждому значению k соответствует своя доска, что отмечено в ее правом верхнем углу. Каждая доска разделена вертикальной полосой M на две части. Наверху в левой части имеется указатель 0, 1, 2, 3, 4 ..., указывающий места установок левых концов линеек в соответствии с фиксированным значением X. Наверху в правой части имеется строка целых значений Y. Заполнение линейками одной какой-либо доски ведет к возможности получения суммы вида $\sum_{-15}^{+15} F_{h,k}\cos 2\pi(hX + kY)$, где X и k оставляются постоянными. Прибор содержит

16 досок (k от 0 до 15). Приводится конкретный пример синтеза при помощи указанного прибора. Для облегчения суммирования подсумм применяется особая серия шаблонов с отверстиями. Вкратце указывается на возможность применения прибора для определения сумм вида

$$\sum_H \sum_K \sum_L F_{h,k,l} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\pi hX \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\pi kY \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2\pi lZ.$$

М. Г. Серебренников

7659. Приближенное вычисление определенных интегралов по сумматорной формуле Пуассона. Феттис (Numerical calculation of certain definite integrals by Poisson's summation formula. Fettis Henry E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 51, 85—92 (англ.)

Дается трапецоидальное правило с поправкой для численного интегрирования периодических (с периодом a) или непрерывных вместе с производными функций:

$$\int_0^a f(t)\,dt = h\left\{[f(0)+f(a)]/2 + \sum_{k=1}^{n-1} f(kh)\right\} - 2\sum_{k=1}^{\infty} g(2k\pi/h),$$

где $h = a/n$, $g(x) = \int_0^a f(t)\cos(xt)\,dt$. Эти квадратуры можно применять для функций с коэффициентами Фурье, уменьшающимися с увеличением x, для интегралов по промежутку $[0, \infty)$. Рассмотрены примеры, для которых трапецоидальное правило с поправками дает любую степень точности. Оцениваются квадратуры интегралов, представляющих функцию Бесселя $I_p(z)$, функции второго рода $K_n(z)$, интегралы ошибок. Библ. 12 назв. А. А. Красилов

7660. Простые приемы интерполяции посредством гиперболической функции. Капекки (Semplici procedimenti di interpolazione di una funzione esponenziale doppia (Catenaria). Capecchi Walfredo), Statistica, 1955, **15**, № 4, 567—582 (итал.)

Описаны упрощенные приемы определения констант в эмпирических формулах вида $y = a\,\mathrm{ch}\,bx$, $y = 1/a\,\mathrm{ch}\,bx$ при равноотстоящих значениях аргумента. Изложение рассчитано на лиц со слабой математической подготовкой, главным образом на медиков и биологов, но знакомых с основными понятиями математической статистики, в частности с критерием χ^2. Ход вычислений детально показан на числовом примере.

Н. А. Ростовцев

7661. Интерполяция второго порядка. Рансом (Second order interpolation. Ransom William R.), School Sci. and Math., 1955, **55**, № 6, 460—461 (англ.)

В популярной форме дан вывод интерполяционной формулы Ньютона, содержащей первые две разности. Даны рекомендации для ее использования (вторая разность не должна превосходить 4 единиц последнего знака). Указано, что следующая разность не даст эффекта при интерполяции, если она не превосходит 8 единиц последнего знака. Е. Н. Деканосидзе

7662. Интерполяция и экстраполяция на основе способа наименьших квадратов. Аран (Interpolation et extrapolation basées sur la méthode des moindres carrés. Arend S.), Communs Observ. roy. Belgique, 1955, № 77, 1—8 (франц.)

На основе способа наименьших квадратов и с помощью краковян выводятся формулы для интерполяции и экстраполяции при линейной и параболической аппроксимации. Излагаются правила действий над краковянами, весьма сходные с соответствующими операциями над матрицами. Статья представляет интерес для лиц, занимающихся вопросами теории обработки наблюдений. Ю. Ф. Харкеевич

7663. Новый метод вычисления в теории наименьших квадратов. Цветков (A new method of computation in the theory of least squares. Cvetkov B.), Austral. J. Appl. Sci., 1955, **6**, № 3, 274—280 (англ.)

Ищется минимум суммы квадратов $u_p = p_1x_1^2 + \ldots + p_nx_n^2$, где p_i — заданные положительные числа при условиях

$$a_ix_1 + b_ix_2 + \ldots + n_ix_n = u_i \quad (i = 1, \ldots, m < n). \qquad (1)$$

Указывается способ ортогонализации системы (1) (что упрощает решение задачи) и приводятся примеры решения некоторых задач геодезии с указанием подробной схемы расчетов. П. В. Николаев

7664. Построение полиномов для гравитационной функции по методу наименьших квадратов и их изображение с помощью вычислительного устройства. Симпсон (Least squares polynomial fitting to gravitational data and density plotting by digital-computers. Simpson Stephen M.), Geophysics, 1954, **19**, № 2, 255—269 (англ.)

Указано построение полиномов порядка n от x, y вида

$$G(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} c_{ij}x^j y^j,$$

аппроксимирующих экспериментальную гравитационную функцию $g(x, y)$. Для определения коэффициентов c_i получены нормальные уравнения

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} c_{kl} \sum_P x^{k+i} y^{l+j} = \sum_P g x^i y^j.$$

где $j = 0, 1, 2, \ldots, n-i$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Указаны свойства нормальных уравнений для точек с целочисленными координатами прямоугольного участка, симметричного относительно осей координат. В качестве примера дано построение полиномов второго, третьего и четвертого порядков и построены разностные кривые. Кратко рассказано о вычислительной машине, позволяющей с высокой степенью быстроты и точности определять разности между $g(x, y)$ и $G(x, y)$ и вычерчивать разностные кривые. Е. К. Нечаев

7665. Обобщение метода Ньютона. Альтман М., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1955, **3**, № 4, 187—191

Обобщение метода Ньютона. Альтман (A generalization of Newton's method. Altman M.), Bull. Acad. polon sci., 1955, cl. 3. **3**, № 4, 189—193 (англ.)

Л. В. Канторович и другие авторы применили итерационной метод Ньютона к решению функционального уравнения

$$P(x) = 0, \qquad (1)$$

определенного в абстрактном пространстве X. Они предполагали, что дифференциал Фреше $P'(x)$ является взаимно однозначным линейным преобразованием, имеющим непрерывное обратное преобразование.

Автор рассматривает функциональное уравнение (1) при более общих предположениях. Оператор $y = P(x)$ есть непрерывный оператор, отображающий пространство X типа B на пространство Y типа B. Оператор $P(x)$ дифференцируем в смысле Фреше и $P'(x)$ отображает X на Y. При некоторых дополнительных предположениях относительно $P(x)$ и $P'(x)$ оказывается возможным определить некоторый итерационный процесс. Если $P'(x)$ есть линейное преобразование, обладающее непрерывным обратным, то, в частности, получим метод Ньютона, модифицированный Канторо-

вичем, который определяется формулой $x_{n+1} = x_n - [P'(x_0)]^{-1}P(x_n)$.

Автор в своих исследованиях использует фактор-пространство пространства X по классу θ всех решений уравнения $P'(x) = 0$. В этом фактор-пространстве существует оператор, соответствующий $P'(x)$, который обратим. L. Włodarski

7666. Заметка о методе Ньютона для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$. Сен (A note on Newton's method for evaluating roots of $f(x) = 0$. Sen D. K.), Math. Student, 1955, **23**, № 3, 109—112 (англ.)

В заметке содержится ряд замечаний о применении метода Ньютона, проиллюстрированных на числовом примере. Основное утверждение: Если на интервале, содержащем корень уравнения $f(x) = 0$ и два последовательных к нему приближения, произведение $f'(x)f''(x)$ сохраняет знак, нигде не обращаясь в нуль или в бесконечность, то процесс итераций сходится. Я. М. Каждан

7667. Исследования по численному решению уравнений 3-й, 4-й и 5-й степеней. Кальво-Карбонель (Estudios sobre la resolución numerica de ecuaciones de 3°., 4°. y 5°. grado. Calvo Carbonell Carlos), Gac. mat., 1955, **7**, № 1-2, 14—26 (исп.)

Посредством элементарных преобразований вопрос о вычислении корней кубического уравнения $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ сводится к вопросу о нахождении корней одного из уравнений $X^3 + X + k = 0$; $X^3 - X + k = 0$. Для определения корней этих уравнений предлагается составить таблицу значений функций $y = -X - X^3$ и $y = X - X^3$ при некоторых выбранных значениях X. Интерполируя составленную таблицу, можно всегда определить приближенные значения корней заданного уравнения. Э. Апарисио

7668. Исследования по численному решению уравнений 3-й, 4-й и 5-й степеней. Кальво-Карбонель (Estudios sobre la resolución numerica de ecuaciones de 3°., 4°. y 5°. grado. Calvo Carbonell Carlos), Gac. mat., 1955, **7**, № 3-4, 60—78 (исп.)

Продолжение статьи автора того же названия (реф. 7667). Устанавливается, что если в таблице функций $y = -X - X^3$ и $y = X - X^3$ значения X заданы с двумя или большим числом десятичных знаков, то линейная интерполяция позволяет определить корни уравнений $X^3 + X + k = 0$ и $X^3 - X + k = 0$ с удвоенным числом верных десятичных цифр при всех k, за исключением значений k из интервала $0{,}34877\ldots < k < 0{,}3849\ldots$ в случае второго уравнения. В последнем случае для получения нужной точности этот интервал должен быть табулирован с бо́льшим числом десятичных знаков. Статья будет продолжена. Э. Апарисио

7669. О решении численных алгебраических уравнений. Никулин Н. А., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1955, **21**, 157—169

Описан численный способ приближенного нахождения действительных корней алгебраического уравнения n-й степени, причем предполагается, что корни отделены. Некоторые этапы решения интерпретированы геометрически. Соответствующие построения, по мнению автора, могут найти применение в качестве самостоятельного численно-графического метода решения алгебраических уравнений. А. Б. Штыкан

7670. Об алгоритме Эйлера для извлечения корней. Эскин Л. Д., Уч. Зап. Казанск. ун-та, 1955, **115**, № 14, 139—143

Доказывается, что при некоторых условиях имеет место

$$\lim_{n\to\infty} x_m^{(n)} / x_1^{(n)} = \sqrt[k]{r^{m-1}} \qquad (m = 2, 3, \ldots, k);$$

$$\lambda_j = (r-1)\ (\varepsilon_j \sqrt[k]{r-1}) \qquad (j = 0, \ldots, k-1),$$

где $x^{(n)} = A^n x^{(0)}$; A — матрица k-го порядка, все элементы которой ниже главной диагонали равны r, остальные — единице. $r > 0$; λ_j — собственные значения матрицы A; $\varepsilon_j = \cos 2\pi j/k + i \sin 2\pi j/k$. Опираясь на эту теорему, автор дает простое доказательство сходимости процесса Эйлера для извлечения корней. Указывается на возможность применения способа Эйлера для извлечения корней из комплексных чисел.

7671. О методе Грэффе. Фидлер (Über das Gräffesche Verfahren. Fiedler Miroslav), Чехосл. матем. ж., 1955, **5**, № 4, 506—516 (нем.; рез. русс.)

Видоизменение метода Бродетского и Смила для решения алгебраических уравнений по методу Лобачевского — Грэффе. Приводятся приближенные и точные формулы, определяющие корни исходного уравнения в виде рациональных функций соответственно приближенных и точных вторых степеней этих корней, которые можно получить по методу Лобачевского — Грэффе. Метод применяется к вычислению наибольших по модулю собственных чисел матриц (даже в том случае, когда эти собственные числа мнимы).

Из резюме автора

7672. Метод решения линейных алгебраических уравнений на электронноламповом интеграторе. Гутенмахер Л. И., Кузьминок Г. К., Клабукова Л. С., Вычисл. матем. и вычисл. техника, сб. 2, 1955, 230—246

Для данной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

составляется квадратная матрица порядка $m + n$:

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & -A^* \\ A & E \end{Vmatrix},$$

где $A = \| a_{ij} \|$ — матрица системы (1), а $A^* = \| a_{ji} \|$. На электронноламповом интеграторе решается система дифференциальных уравнений

$$b\,dy/dt + By = C, \qquad (2)$$

где C — вектор $(\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{m}, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $b > 0$—постоянная. Все собственные числа матриц B имеют отрицательные действительные части, в силу чего система (2) описывает процессы, которые устанавливаются за относительно короткое время (для небольших численных значений b). Первые m функций из этих установленных решений системы (2) дают решения алгебраической системы (1) по методу наименьших квадратов, а последние n функций y — значения невязок этих же уравнений. Если в (1) $m = n$, то первые n функций y дают решение системы (1) в обычном смысле, а последние n — равны нулю. В решенных авторами примерах погрешность не превосходит 2% от максимального значения искомых неизвестных. Т. И. Маруашвили

7673. Приближенные решения алгебраических уравнений. Ким Сон Лён (조수 방정식의 근사 해법에 관하여. 김 성 렵), 과학과 기술 (Квахак ка кисуль), 1955, № 9, 69—74 (кор.)

7674. Квадратичная сходимость метода Бернулли. Бауер (Quadratische Konvergenz der Bernoullischen Methode. Bauer F. L.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 8/9. 283 (нем.)

7675. Оценка интегралов, содержащих параметр. Дингл (The evaluation of integrals containing a parameter. Dingle R. B.), Appl. Scient. Res., 1955, B4, № 6, 401—410 (англ.)

На примере интеграла $\mathrm{Ei}_n(x)=\int_1^\infty u^{-n}e^{-xu}du$ рассматриваются методы получения удобных приближений интегралов, зависящих от параметров, при различных значениях последних. Так, для больших значений $x \gg n$ приводится асимптотический ряд. Для больших n, имеющих порядок, близкий к порядку x, выводится следующая формула:

$$\mathrm{Ei}_n(x)=\frac{e^{-x}}{n+x}\left(1+\frac{n}{(n+x)^2}+\frac{n(n-2x)}{(n+x)^4}+\ldots\right).$$

Основным методом, применяемым в работе, является использование преобразования Меллина, определяемого для функции $\xi(x)$ следующим образом: $M(y)=\int_0^\infty \xi(x)x^{y-1}dx$. Применяя это преобразование к функции $\xi(x)=e^x\mathrm{Ei}_n(x)$, получаем, что ее образ выражается через Г-функцию. Обратное преобразование дает $\xi(x)$ в виде: $\xi(x)=(1/2\pi i)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}M(y)x^{-y}dy$. Интересующее нас разложение $\mathrm{Ei}_n(x)$, удобное для малых x и больших n, получается подсчетом суммы соответствующих вычетов. Окончательно получается формула

$$\mathrm{Ei}_n(x)=e^{-x}\left[\sum_{r=0}^{n-2}\frac{(-x)^r}{(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{x^t[\Psi(t)-\ln x]}{t!}\right],$$

где $\Psi(t)$ — некоторая известная функция. Формула удобна для расчетов; например, пяти членов ряда достаточно для вычисления $\mathrm{Ei}_n(x)$ с пятью десятичными знаками. Наконец, некоторые формулы получаются, если искать $\mathrm{Ei}_n(x)$ в виде решения дифференциального уравнения. А. Л. Дышко

7676. О приближенном представлении производных. Кунцман (Représentation approchée de dérivées. Kuntzmann Jean), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 357 (франц.)

Краткое сообщение. Для выражения $f^{(\mu)}(p)$ через $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(n)$ ($\mu=1,2,\ldots,n$; $p=0,1,\ldots,n$) формулы для $f'(p)$ записываются в виде квадратной матрицы, и тогда формулы для следующих производных получают, образуя последовательные степени этой матрицы. А. П. Лавут

7677. Численное определение обращений действительного преобразования Лапласа. Мерсман (Numerical calculation of certain inverse Laplace transforms. Mersman William A.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2. Amsterdam, 1954, 362 (англ.)

Краткое сообщение. При расчете давлений, возникающих от взаимодействия крыла и корпуса самолета, посредством линеаризованной сверхзвуковой теории ищутся обращения действительного преобразования Лапласа, примененного к отношениям модифицированных функций Бесселя второго рода и их производных. Задача обращения сводится к уравнению Вольтерра второго рода. Для малых значений аргумента решение получают в виде степенного ряда, для больших значений уравнение решают численными методами. А. П. Лавут

7678. О разложении в ряд выражения $\alpha^n+\beta^n$. Шульце (Über die Reihenentwicklung des Ausdruckes $\alpha^n+\beta^n$. Schulze Herbert), Z. angew. Math. und Mech., 1955, 35, № 12, 462—463 (нем.)

Если $\alpha+\beta=1$,

то $\alpha^n+\beta^n=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k[C_{n-k-1}^{k}+2C_{n-k-1}^{k-1}]\alpha^k\beta^k$,

где $r=[n/2]$.

7679. Замечание об алгоритме получения логарифма. Островский (Note on a logarithm algorithm. Ostrowski A. M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 50, 65—68 (англ.)

Рассматривается известный алгоритм разложения $\log a$, $a_1(a_0>a_1>1)$ в непрерывную дробь, приспособленный Шанксом (РЖМат, 1955, 3996) для быстродействующих вычислительных машин. Показано, что введением в вычисления числа $\mu=\ln a_0$ число операций, указанное Шанксом, может быть значительно сокращено путем замены примерно одной трети всех операций лишь двумя операциями (одно деление и одно сложение). Делаются замечания о быстроте сходимости метода и о чувствительности его по отношению к округлениям. Н. И. Польский

7680. Комплексные нули функции ошибок. Солзер (Complex zeros of the error function. Salzer Herbert E.), J. Franklin Inst., 1955, **260**, № 3, 209—211 (англ.)

Приводятся первые 10 нулей функции $f(z)=\int_0^z e^{-u^2}du$ (помимо корня $z=0$), расположенные в 1-м квадранте. z_1 дан с 12, а z_2, ..., z_{10} — с 9 знаками после запятой. Корни расположены над биссектрисой и при $n\to\infty$ асимптотически к ней приближаются. Л. В. Курочкина

7681. Теорема эквивалентности для уравнений $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\mu\nu}\times x_{\mu+\nu}=c_\mu$. Паша (Ein Aequivalenzsatz für Summengleichungen. Paasche I.), Z. angew. Math. und Mech., 1955, **35**, № 9-10, 333 (нем.)

Обобщение результатов автора (РЖМат, 1956, 519). М. А. Дмитриева

7682. Подсчеты количества простых чисел — «близнецов», меньших 100 000. Секстон (Counts of twin primes less than 100 000. Sexton C. R.), Math. Tables. and Other Aides Comput., 1954, 8, № 45, 47-49 (англ.)

На основании таблицы, составленной автором, подсчитаны количество пар «близнецов» от 1 до 10 000, от 10 000 до 20 000,..., от 90 000 до 100 000, распределение «близнецов» по парам цифр единиц (1 и 3, 7 и 9, 9 и 1) в каждом десятке тысяч, количество «двойных пар» типа (191, 193; 197, 199), а также простых чисел вида $6n-1$ и $6n+1$ в каждом десятке тысяч. М. Л. Бродский

7683. О вычислении экспоненциальных и гиперболических функций с использованием непрерывных дробей. Мейкон (On the computation of exponential and hyperbolic functions using continued fractions. Macon Nathaniel), J. Assoc Comput., Machinery. 1955, 2, № 4, 262—266 (англ.)

Функции e^x, $\mathrm{sh}\,x$, $\mathrm{ch}\,x$ целесообразно вычислять, пользуясь следующими их представлениями в виде непрерывных дробей:

$$e^x=1+x/(1-(x/2)+F),\ \mathrm{sh}\,x=x(1+F)/[(1+F)^2-x^2/4],$$
$$\mathrm{ch}\,x=1+(x^2/2)/[(1+F)^2-x^2/4],$$

где $F=[a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots]$ и $a_n=x^2/4(4n^2-1)$. Если $F_n=[a_1,a_2,\ldots,a_n]$, то

$$|F-F_n|\leqslant(x/2)^{2(n+1)}/B_nB_{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}(4i^2-1),$$

где значения B_n получаются из следующего рекуррентного соотношения: $B_{-1}=0$, $B_0=1$, $B_n=B_{n-1}+a_nB_{n-2}$ $(n\geqslant 1)$. Хотя $\mathrm{th}\,x$ может быть получен

SCANNED 23 of 38

делением $\mathrm{sh}\,x$ на $\mathrm{ch}\,x$, однако лучшую сходимость дает представление $\mathrm{th}\,x$ в виде непрерывной дроби: $\mathrm{th}\,x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, где $a_1 = x$, $a_n = x^2/[4\,(n-1)^2-1]$ $(n \geqslant 2)$.

Приводятся также эквивалентные виды непрерывных дробей, удобные для счетных машин с двоичным исчислением, оперирующих лишь с величинами по модулю меньшими единицы, при этом оказывается, что при $|x| < 1$ для вычисления e^x с 12 десятичными знаками достаточно заменить непрерывную дробь F ее отрезком F_6. Если считать e^x при этих же условиях степенным рядом, то потребуется 17 членов, число элементарных операций увеличится при этом в 6 раз, а ошибка от округлений увеличится примерно в 25 раз.

Я. М. Каждан

7684. Изучение прямых, характеризующих либо функциональную связь, либо статистическую зависимость между двумя переменными. Доммаже (Étude des droites caractérisant soit une liaison fonctionnelle, soit une dépendance statistique entre deux variables. Dommanget J.), Communs Observ. roy. Belgique, 1955, № 77, 29—39 (франц.)

Рассматривается вопрос о наилучшей линейной аппроксимации множества точек, доставленных экспериментом, в двух случаях: когда по тем или иным соображениям можно допустить наличие линейной функциональной зависимости между координатами точек и когда такого допущения сделать заранее нельзя. Автор вводит понятие оси инерции множества точек, которая обладает тем свойством, что сумма квадратов расстояний точек до этой оси есть минимум. Эта ось принимается за прямую наилучшего приближения. Приводятся формулы для вычисления параметров уравнения оси инерции.

Ю. Ф. Харкеевич

7685. Быстрые эмпирические приемы математического представления экспериментальных явлений. Аран (Procédés empiriques rapides de représentation mathématique de phénomènes expérimentaux. Arend S.), Ciel et terre, 1955, **71**, № 5-6, 133—150 (франц.)

Автор указывает приемы математического представления результатов экспериментальных измерений, заданных N точками:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + \Delta,\ \ldots,\ x_{N-1} = x_0 + (N-1)\,\Delta,$$

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_{N-1}$$

при помощи функций вида $y = ab^x$, $y = ae^{\alpha x}$, $y = a + bc^x$, $y = a + be^{\alpha x}$, $y = [c/(x+a)] - b$ и им подобных, где a, b, c, α — параметры, подлежащие определению. Для отыскания параметров автор поступает следующим образом: значения ординат y_i $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ разбиваются на 2 (иногда на 3) группы $(N = 2M + r$ или $N = 3M' + r')$ и суммируются в каждой из групп. Из полученных соотношений исключаются все параметры, за исключением одного, который и определяется в первую очередь. Затем соответствующим для каждой функции образом определяются и остальные параметры. Например, в случае функций $y = ab^x$ или $y = ae^{\alpha x}$ для определения b или α служат соотношения $b^{M\Delta}$ или $e^{M\alpha\Delta} = y_{\mathrm{II}}/y_{\mathrm{I}}$, где y_{I}, y_{II} — суммы ординат в первой и второй группах соответственно. Параметр a определяется по формулам

$$a = \frac{(b^{\Delta}-1)\sum_{i=0}^{N-1} y_i}{b^{x_0}(b^{N\Delta}-1)} \quad \text{или} \quad \frac{(e^{\alpha\Delta}-1)\sum_{i=0}^{N-1} y_i}{e^{\alpha x_0}(e^{\alpha N\Delta}-1)}$$

соответственно. При разбивке на 2 группы в случае $r = 1$ средняя ордината входит в обе группы. При разбивке на 3 группы, если $r' \neq 0$, автор рекомендует недостающие ординаты находить экстраполированием. Эти методы особенно выгодны, когда число точек N велико и дуга кривой достаточно вытянута.

Выбор представляющих функций неоднозначен, однако автор дает примерные критерии их целесообразного выбора. Например, если постоянны первые разности $y_{i+1} - y_i = \Delta y_i$, то пользуются линейной функцией, если постоянны $\Delta^n y_i$, — пользуются параболой n-го порядка. Однако, эти критерии ненадежны в случае, когда экспериментальные данные получены с большой ошибкой.

Если точки $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ находятся на произвольных расстояниях друг от друга, автор использует для определения параметров a, b, c и α три точки, абсциссы которых расположены примерно на одинаковом расстоянии и ординаты лежат на кривой, проходящей наилучшим образом через все заданные точки. Найденные таким образом параметры могут быть улучшены применением метода наименьших квадратов.

Д. Ф. Давиденко

7686. Определение параметров функции $y=a+bf(x,\alpha,\beta,\ldots)$ с помощью способа наименьших квадратов. Приложение к случаю экспоненциальной функции. Доммаже (Détermination des paramètres de la fonction: $y=a+bf(x,\alpha,\beta,\ldots)$ sur la base du principe des moindres carrés. Application au cas de la fonction exponentielle. Dommanget J.), Communs Observ. roy. Belgique, 1955, № 77, 41—60 (франц.)

Рассматривается вопрос о наилучшей аппроксимации множества точек, доставленных наблюдением, с помощью функции

$$y = a + bf(x,\ \alpha,\ \beta,\ \ldots), \qquad (1)$$

где все или некоторые из параметров a, b, α, β, ... подлежат определению. Дается удобный и достаточно простой способ вычисления этих параметров с помощью краковян. Теория проиллюстрирована примером, когда в качестве уравнения (1) взяты функции $y = a + be^{\alpha x}$, $x = \beta + \gamma\ln(y-a)$, $\beta = -\gamma\ln b$, $\gamma = 1/\alpha$. Приводится таблица уравнений кривых, которые простыми преобразованиями приводятся к форме (1). Ю. Ф. Харкеевич

7687. Представление экспериментального ряда функцией вида $y=a+be^{\alpha x}$. Шмитт (Représentation d'une série expérimentale par une fonction de la forme $y=a+be^{\alpha x}$. Schmitt A.), Communs Observ. roy. Belgique, 1955, № 77, 23—27 (франц.)

Пусть $(x_k y_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где $x_k = x_0 + k\Delta x$, суть заданные экспериментальные данные. Определяются постоянные a, b и α кривой $y = a + be^{\alpha x}$, проходящей через данные точки. Постоянная α находится из условия

$$e^{p\alpha} = [\Sigma_{i=0}^{i=p+q-1}(y_{i+2p} - y_{i+p})]/[\Sigma_{i=0}^{i=p+q-1}(y_{i+p} - y_i)],$$

где p и q — частное и остаток от деления n на 3. Аналогично определяются b и a.

7688. Определение гомографической функции по многочисленным экспериментальным данным с абсциссами, образующими арифметическую прогрессию. Шмитт (Détermination de la fonction homographique à partir de données expérimentales en surnombre les abscisses étant en progression arithmétique. Schmitt A.), Communs Observ. roy. Belgique, 1955, № 77, 9—21 (франц.)

Пусть $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, где $x_k = x_0 + k\Delta x$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$,—заданные экспериментальные данные. Ставится и решается задача определения постоянных a, b и c гомографической кривой $y = [c/(x+a)] - b$, проходящей через заданные точки. Для нахождения a, b и c используется аппарат краковян.

После вычисления a, b и c дается без доказательства критерий для решения вопроса о том, представляет ли найденная гомографическая функция заданный ряд экспериментальных данных. Этот критерий заключается в следующем: вычисляются числа b_k по формуле

$$b_k = (y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k-2})/(y_{k-2} - 2y_{k-1} + y_k) - y_k$$
$$(k = 3,4, \ldots, n-1).$$

Если числа $|b_{k_1} - b_{k_2}|$ для всякой пары чисел (k_1, k_2), взятых из последовательности $3,4, \ldots, n-1$, достаточно малы, то поставленный выше вопрос решается утвердительно.

7689. Уточнение по методу наименьших квадратов с высокой скоростью. Фридлендер, Лав, Сэр (Least-squares refinement at high speed. Friedlander P. H., Love W., Sayre D.), Acta crystallogr., 1955, 8, № 11, 732 (англ.)

Описывается программа для машины ИБМ-701, по которой уточнение структуры кристалла может быть выполнено с большой скоростью. Программа использует два ввода: 1) магнитная лента с таблицами h, k, l, $|F_0(hkl)|$ и атомными факторами f_i и 2) таблица исходных координат, пробитых на перфокартах. В конце уточнения машина печатает поправки к координатам, новые координаты, фактор расхождения R, новый фактор приведения шкалы K и останавливается. Нажатие пусковой кнопки вызывает повторение цикла уточнения. Приводятся формулы, по которым ведутся вычисления. В качестве иллюстрации приводится таблица результатов отдельных этапов уточнений исследуемых веществ. В итоге делается вывод, что метод применим и в случае довольно грубого исходного приближения, что экономит большой объем ручных вычислений, и что, если требуется точная окончательная структура, необходимо последовательное повторение циклов уточнения. Каждый цикл длится около 10 мин. Вообще, для одного цикла уточнения структуры без центра симметрии требуется примерно $0{,}001 \cdot RN$ мин., где R — количество используемых отражений и N — количество атомов. Н. П. Трифонов

7690. Основы номографии. Лю Чхун Хо (계산도표의 원리. III. 류 총 호), 학과과술 (Квахак ка кисуль), 1955, № 11, 68—73 (кор.)

7691 К. Руководство по прикладной математике. Янссон, Харпер, Агнью (Handbook of applied mathematics. Jansson Martin E., Harper Herbert D., Agnew Peter L. 3rd ed. by Edward E. Grazda, Morris Brenner. New York, Van Nostrand; London, Macmillan, 1955, vii, 1044 pp., ill., 56 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 286, 11 (англ.)

7692 К. Прикладная математика. Кито (應用數學(上)鬼頭史域. 日本翻械學會, 4月, 364頁900圓, Нихон кикай гаккай, 1955, 364 стр., 900 иен) (япон.)

7693 К. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Бекеши (Közönséges differenciál — egyenletek numerikus integralasa. Békéssy András. Budapest, 1954, (1955), 106 str., 19 Ft), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 1, 6 (венг.)

7694 К. Руководство по счетной логарифмической линейке. Иванов (Ръководство по сметачна линийка логаритмическа. Иванов Светослав. К. 2. прераб. и доп. изд. София, Наука и изкуство, 1954, 123 стр., 3. 10 лв.) (болг.)

7695 К. Справочник по работе с логарифмической линейкой. Фейгин И. М., Ростов н/Д., Книгоиздат, 1955, 43 стр. с черт. 1 р. 10 к.

7696 К. Метод последовательных приближений. Применения в проблемах статики и других подобных проблемах. Аджент (Metoda aproximaţiilor succesive. Aplicată in probleme de statică şi in alte probleme similare. I. Agent Radu, Bucureşti, Ed. stat pentru arhitectura şi constructii, 1955, 336 p., il., 20, 35 lei), Bul. bibliogr., 1955, А4, № 16, 9 (рум.)

7697 К. Теория ошибок измерений и сведения из способа наименьших квадратов (Краткий курс для землеустроит. фак. с.-х. вузов). Грушецкий А. В. (Одесск. с.-х. ин-т), Одесса, 1955, 64 стр., илл. Беспл.

7698 К. Практическая математика для студентов. Бейкер (Practical mathematics (for students sci. and engng). Vol. 2. Baker Cyril Clarence Thomas. English univs., 1955, 255 pp., 7 sh. 6 d.), Cumul. Book Index, 1955, 58, № 6, 9 (англ.)

7699 К. Очерки по практической математике. Негоро (實用數學汎論. 根來祥三郎等. フタバ書店, 4月, 532頁, 850圓. Футаба-сётен, 1954, 532 стр., 850 иен) (япон.)

7700 К. Аппроксимации для цифровых вычислительных машин. Хастингс (Approximations for digital computers. Hastings Cecil Jr. Princeton N. Y. Univ. Press, London, Oxford Univ. Press., 1955, viii, 201 pp., ill., 31 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 312, 8 (англ.)

7701 К. Численный анализ с ударением на применение численного метода в проблемах исчисления бесконечно малых с одной переменной. Копал (Numerical analysis: with emphasis on the application of numerical techniques to problems of infinitesimal calculus in single variable. Kopal Zdenek. London, Chapman & Hall., 1955, xiv, 556 pp., ill., 63 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 310, 8 (англ.)

7702 Д. Об итерационных методах решения уравнений. Выханду Л. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1955

7703 Д. Применение номографических методов к решению некоторых задач на максимум и минимум и к решению алгебраических уравнений. Денисюк А. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1956

См. также: 7101, 7109, 7110, 7119, 7298, 7321, 7322, 7365, 7368, 7508, 7648

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

7704. Проблема составления большой отчетности и ИБМ-702. Макдональд (A big inventory problem and the IBM 702. Macdonald Neil), Computers and Automat., 1955, 4, № 9, 6—12, 28 (англ.)

Приводятся основные характеристики ИБМ-702 (РЖМат, 1955, 1990), включающей в свой комплект арифметический и логический узел ИБМ-702, устройство считывания с перфокарт ИБМ 712, быстродействующее печатающее устройство ИБМ 717, перфоратор для карт ИБМ 722, блок магнитных лент (8 шт.) ИБМ-727, магнитный барабан (1 или 2 шт.) ИБМ 732, пульт управления.

ИБМ-702 является последовательной машиной, использующей импульсы с частотой 1 *Мгц*. Длина кода в машине не определена и может быть выбрана по желанию программиста. Каждый знак состоит из 7 двоичных разрядов. Оперативное запоминающее устрой-

ство использует электростатические трубки, выпускаемые фирмой ИБМ, и имеет емкость 10 000 знаков. Для кратковременного хранения кода используются 2 накопительных регистра емкостью 512 знаков. Чтение и расшифровка инструкции занимает 138 μсек. Время выборки одного знака из запоминающего устройства составляет 23 μсек.

Магнитный барабан может хранить 60 000 знаков; знак считывается с барабана за 40 μсек. Скорость считывания с магнитной ленты и записи на нее составляет 15 000 знаков в 1 сек. Время, требуемое на разгон или остановку ленты, занимает 5 μсек.

Машина выполняет 32 различные операции. Система инструкций — одноадресная. В машине имеется контроль за правильностью хранения информации. В 1 сек. ИБМ 702 производит 3950 сложений или 833 умножения 5-разрядных чисел. Число делений за 1 сек. не превышает 400, а число логических операций составляет 7233.

Скорость ввода составляет 250 перфокарт в 1 мин., скорость вывода 100 перфокарт в 1 мин., 150 строк на обычном печатающем устройстве или 1000 строк на быстродействующем печатающем устройстве.

Первый образец ИБМ-702 был установлен в марте 1955 г. в г. Сант-Луисе (St Louis) на предприятиях химической фирмы «Монсанто» (Monsanto Chemical Co.). Второй экземпляр ИБМ-702 эксплуатируется фирмой ИБМ на заводе в Поукипси (Poughkeepsie). Начисление зарплаты 8000 рабочим занимает 24 мин. Экземпляр ИБМ 702, установленный на атомном заводе компании «Дженерал Электрик» в Ганфорде, используется для начисления зарплаты, составления отчетности и решения научных задач. Большая задача по составлению отчетности охватывает 40 000 названий деталей и планирует необходимое наличие деталей для сборки 2400 главных узлов. В числе данных, поступающих ежемесячно,— новый план продукции, технические изменения и информация, показывающая, где используется данная деталь. В числе данных, поступающих ежедневно,— прежний баланс и дневной ход производства (9000 сведений за день). Сообщаются основные данные о планировании и оценке качества экономики производства. А. Б. Залкинд

7705. Вычислительные машины УНИВАК и УНИВАК САЙНТИФИК (ИРА 1103). **Аллен, Смит** (The UNIVAC and UNIVAC scientific. Allen William, Smith Graham E.), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 6. 960—969 (англ.)

В общих чертах описаны отдельные узлы вычислительной машины УНИВАК (UNIVAC), выпускаемой фирмой «Ремингтон Ранд».

Приводятся также некоторые данные машин ИРА-1103 и УНИВАК-II. ИРА 1103 параллельного действия, двухадресная с количеством разрядов в числе 36, емкость внутреннего запоминающего устройства на ферритовых тороидах 1024 числа, емкость внешнего запоминающего устройства на магнитном барабане 16 384 числа. Другая машина, УНИВАК-II имеет запоминающее устройство на ферритах емкостью в 120 000 цифр и скорость 8000 операций в 1 сек.

Б. И. Шитиков

7706. Скорость машины УНИВАК увеличена в 2 раза (Doubling UNIVAC's speed!), Computers and Automat., 1955, 4 № 10, 43 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) о выпуске новой вычислительной машины УНИВАК-II (UNIVAC II). В качестве внутреннего запоминающего устройства машины используется матричное устройство на магнитных сердечниках емкостью 24 000 двоичных цифр. Если потребуется, эта емкость может быть увеличена до 120 000 двоичных цифр. Такое запоминающее устройство эксплуатируется фирмой в течение года, проходя всевозможные испытания.

Внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте в новой машине при большей емкости имеет скорость ввода и вывода данных 20 000 знаков в 1 сек.

А. Б. Залкинд

7707. Могут ли европейские электронные машины помочь американским учреждениям? **Брейер** (Can european electronic machines help american offices? Brayer Herbert O.), Amer. Business, 1954, **24**, № 6, 10—13, 39 (англ.)

Обзорная статья, посвященная производству вычислительных машин в Европе. Приводятся сведения о ряде фирм Англии, Франции и Западной Германии и упоминаются выпускаемые ими машины.

И. В. Соловьев

7708. Цифровая вычислительная машина (Digital computer «ALWAC III»), Instrum. and Automat., 1955, **28**, № 6, 910 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research Inc.) о новой цифровой вычислительной машине АЛЬВАК III.

7709. Самолетное вычислительное устройство ТРАДИК (Tradic for aircraft), Ordnance, 1955, **39**, № 210, 946 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 5807, 5808.

7710. Промышленная электронная вычислительная машина ЭЛЛИОТ-402 (La calculatrice électronique industrielle ELLIOTT 402), Mesures et contrôle industr., 1955, **20**, № 213, 138 (франц.)

См. РЖМат, 1956, 2504.

711. Фирма «Белл» разрабатывает вычислительные машины на полупроводниковых триодах для военно-воздушных сил (Bell Telephone Laboratories develops all-transistor computer for Aire Force), Electr. Engng, 1955, **74**, № 5, 447 (англ.)

Сообщение о лабораторных испытаниях универсальной вычислительной машины ТРАДИК (TRADIC) на полупроводниковых триодах (РЖМат, 1954, 5807, 5808).

А. А. Красилов

7712. Логика составления программ. **Керри** (The logic of program composition. Curry H. B.), Collect. logique math., 1952. Paris, 1954, A5, 97—102 (англ.)

Излагается методика программирования сложных вычислений путем комбинирования простых стандартных программ. Эта методика, аналогичная методике «комбинаторной логики» того же автора (J. Symbolic Logic, 1942, **7**, 49—64), разрабатывалась применительно к машине ИАС, но имеет общий характер и формулируется в статье для идеализированной машины с неограниченным запоминающим устройством. Типичная команда содержит код операции, адрес ячейки с данными для операции и адрес следующей команды. Содержимое первых $n + 1$ ячеек образует программу; программа вместе с номером исполняемой команды и содержанием арифметического устройства называется конфигурацией. Рассматриваются только регулярные программы, т. е. такие, где каждый код не является одновременно и командой, и числом. Команды комбинируются с помощью операций преобразования и замены. Преобразование состоит в перестановке кодов программы (с возможными повторениями и пропусками) и соответствующем исправлении адресов в командах; а при замене делают программу из двух программ, помещая в некоторых ячейках одной программы коды из соответствующих ячеек другой программы. Обе операции гомоморфны в том смысле, что та же операция, которая переводит старую программу в новую, переводит старые конфигурации в новые. К этим операциям сводятся подстановки программы Y в программу X. Различаются два вида подстановок:

в подстановке $X \to Y$ программа Y следует за X, а в подстановке $X \Rightarrow Y$ она вклинивается в X. Равносильности между комбинациями операций $\to$ и $\Rightarrow$ могут дать исчисление составления программ (например, $\to$ ассоциативна). Программа на 3 ячейки называется основной (basic); она минимальна и содержит главную команду, стоп-команду и одно число. Программы синтезируются из основных программ путем комбинирования. Перечисляются преимущества такой методики, в частности ее механизируемость. Подробнее рассматривается составление арифметических и некоторых других программ. Арифметической называется программа, содержащая только арифметические операции и переносы, без разветвлений. Если арифметические операции выполняются только над числами, команда первична, а если и над командами, то вторична. Функция φ некоторого числа кодов называется элементарной, если она является содержимым одной ячейки запоминающего устройства или одним из выражений: Ψ, $\pm|\Psi|$, $\Psi \pm x$, $\Psi \pm |x|$. $x\Psi$, Ψ / x, где Ψ — элементарная функция, а x хранится в одной ячейке запоминающего устройства. Элементарные функции программируются автоматически по их алгебраическим выражениям без занятия дополнительных ячеек сверх ячеек с аргументами. Однако арифметическая программа, получаемая при этом, не всегда самая короткая. Рассматривается также построение итерационных петель в программах и простейших вторичных программ. По этой методике была построена программа для обращения матриц.

Г. Н. Поваров

7713. Применение автоматических вычислительных машин для моделирования испытаний. Токер (The application of automatic computers to sampling experiments. Tocher K. D.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **16**, № 1, 39—61 (англ.)

С появлением методов Монте Карло (Monte Karlo methods) большое значение приобрело моделирование испытаний (РЖМат, 1954, 5188).

После краткого описания основных характеристик автоматических вычислительных машин автор описывает три способа выработки случайных элементов:

1) внешний способ: придание уже имеющимся таблицам случайных цифр вида, удобного для ввода их в машину; этот способ существенно замедляет скорость работы машины;

2) внутренний способ образования последовательности случайных цифр с помощью случайных физических процессов, что требует дополнительных устройств, которые смогли бы записывать результаты некоторых случайных процессов и превращать эти результаты в последовательности цифр. (Распад радиоактивных веществ, тепловые шумы в ламповых схемах). Этим способом решается задача выработки случайных цифр, но остается главная трудность: ввод и проверка результатов;

3) не имеющим недостатки первых двух способов является внутренний способ образования последовательности случайных цифр с помощью рекуррентных соотношений, выработка псевдослучайных цифр путем непрерывного преобразования ряда произвольно выбранных чисел.

Оптимальный способ получения случайных цифр состоит из четырех этапов: 1) физический или математический процесс, вырабатывающий «приблизительно случайные» цифры; 2) процесс улучшения случайности полученной последовательности; 3) испытание цифр на случайность; 4) использование метода накопления, который дает возможность вводить в вычислительную машину большое количество этих данных со скоростью, соответствующей скорости работы этой вычислительной машины.

Далее автор останавливается на получении случайных последовательностей из неслучайных способом спаривания, т. е. разбиения последовательности нулей и единиц на пары с отбрасыванием пар 00 и 11 и обозначением равновероятных пар 01 через 0, а 10 через 1. Это сопряжено с потерей большого количества информаций. Потеря частично устраняется при более сложном условном обозначении цифр (взятой четверке соответствует пара).

Описываются уже известные методы выработки случайных величин: метод «середины квадрата», многократный метод, авторегрессивная схема и ее вариант.

Рассматриваются способы получения случайных переменных с равномерным, нормальным и экспоненциальным распределением, с распределением Пуассона, и бинормальным распределением. В качестве примера применения детерминистского правила рассматривается вычисление кратных интегралов. А. А. Красилов

7714. Как простая задача программируется на цифровой вычислительной машине (How GAS' sample problem was programmed on a digital computer), Gas (Los Angeles), 1955, **31**, № 5, 57—58 (англ.)

Описывается процесс подготовки программы для вычислительной машины E101 фирмы «Берроус». На специальном программном бланке пишется программа (рассмотрено уравнение: $y = ax^2 + b$), что требует 10 мин. По программе делается (1—2 мин.) перфорированный шаблон, который накладывается на съемную коммутационную доску для удобства коммутации штырьками. Коммутационная доска, вставленная в машину, задает программу вычислений. А. А. Красилов

7715. Микропрограммное устройство управления. Биллинг, Хопман (Mikroprogramm-Steuerwerk. Billing H., Hopmann W.), Elektron. Rundschau, 1955, **9**, № 10, 349—353 (нем.; рез. англ., русс.)

Описывается один из принципов логического построения устройства управления вычислительной машины. Устройство управления вырабатывает последовательность импульсов, осуществляющих элементарные «микрооперации» (передача информации, сдвиг и т. п.). Арифметические и логические «макрооперации» состоят в выполнении определенной последовательности «микроопераций». При конструировании подобного устройства могут быть использованы матричные и цепочечные схемы на ферритовых сердечниках.

В. С. Чунаев

7716. Производящие функции числовых языков. Фэрторн (Generating functions of number languages. Fairthorne Robert Arthur), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, v. 2, Amsterdam, 1954, 336—337 (англ.)

Под числовым языком (ч. я.) понимается система счисления в широком смысле. Если набор цифр, изображающий число n в данном ч. я., записать в виде коэффициента при x^n в степенном ряде и определить умножение (не обязательно коммутативное) таких коэффициентов как последовательное выписывание их цифр, то можно найти производящую функцию этого ряда. Так, ч. я., где n изображается n значащими единицами a_1, за которыми следуют $N - n - 1$ нулей a_0 ($0 \leqslant n < N$), производится функцией $W_G(a_0, a_1, N, x) = (a_0^N - a_1^N x^N)/(a_0 - a_1 x)$. «Цена» ч. я. в разных операциях вычисляется подстановкой u^{α_n} вместо цифр в производящую функцию, где α_n — «цена» цифры. Средняя «цена» слова есть $[\partial \ln W/\partial u]_{u=x=1}$; средняя информация в цифре есть

$$\log_2 r = (\log_2 N)/[\partial \ln W/\partial u]_{u=x=a_0=a_1=\ldots=1}.$$

Число r может рассматриваться как обобщенное основание системы счисления. В указанном выше ч. я. $r = \sqrt[N-1]{N}$. Такой подход позволяет исследовать статистические свойства ч. я., важные при проектировании вычислительных и бухгалтерских машин. Г. Н. Поваров

7717. Моделирующее вычислительное устройство (Analog computer), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 6, 626, 628 (англ.)

Сообщение фирмы «Ривс Инструмент» (Reeves Instrument Corp.) о выпуске нового моделирующего устройства РЕАК 400. Это устройство по сравнению с предыдущими моделями имеет лучшие характеристики сервомножителей, выходных устройств, усилителей, функциональных устройств и т. п. Набор задачи производится на съемных наборных панелях. Приводится метод контроля правильности решения.

Г. К. Кузьминок

7718. Моделирующее устройство для определения корней алгебраических уравнений. Л ё ф г р е н (Analog computer for the roots of algebraic equations. L ö f g r e n L a r s), Proc. I. R. E., 1953, 41, № 7, 907—913 (англ.)

Описан принцип построения моделирующего устройства для отыскания корней алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами до 8-й степени. Устройство содержит около 200 электронных ламп.

Уравнение вида $\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu z^\nu = 0$ представляется как система двух уравнений

$$u \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r^\nu \cos[\nu(\omega t) + \alpha_\nu] = 0$$

$$v \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu r^\nu \sin[\nu(\omega t) + \alpha_\nu] = 0$$

В таком виде система моделируется. Для получения членов вида $\cos\nu(\omega t)$ используется принцип деления частоты с помощью двоичного счетчика с последующей фильтрацией полученных колебаний. Введение сдвига фаз α_ν осуществляется специальными фазовращателями. Умножение на $r^\nu = e^{-k\nu t}$ выполняется с помощью модуляторов и генератора, дающего на выходе функции вида $e^{-k\nu t}$. Члены с различными номерами ν суммируются в сумматорах. Когда обе функции u, v обращаются в нуль, то срабатывают нуль-индикаторы, которые подсвечивают электроннолучевую трубку с послесвечением. На отклоняющие пластины трубки подаются напряжения, пропорциональные $r\sin\omega t$ и $r\cos\omega t$. Таким образом на экране трубки в момент подсветки появляется точка, определяющая координаты корня. Для уменьшения погрешности из-за нестабильности параметров трубки применены дополнительные нуль-индикаторы, подсвечивающие трубку при достижении величинами r и $\varphi = \omega t$ значений, равных наперед заданным от руки с помощью потенциометров. Сравнение положения этих известных точек с получаемыми при решении позволяет исключить грубые ошибки за счет нелинейности развертки трубки.

Перед набором на устройстве уравнение предварительно нормализуется так, чтобы ни один из коэффициентов не превышал единицы, а модуль наибольшего корня не превышал двух. Для повышения точности определения корней используется специальное потенциометрическое устройство, с помощью которого последовательно изменяется масштаб коэффициентов так, что модули корней увеличиваются в 2^k раз, а на осциллографе каждый раз находят лишь корни, модули которых лежат в пределах от $^1/_2$ до 1. Точность определения корней около 1% от найденного значения. Если корни кратные, то погрешность больше.

Приводится блок-схема устройства без описания схем отдельных его элементов. Довольно много места отведено общим принципам построения индикатора нуля и вопросам нормализации и ренормализации.

Н. В. Корольков

7719. Моделирующая вычислительная машина для определения корней алгебраических уравнений. Л ё ф г р е н Л. (в подл. Лофгрин Л.), Машиностроение. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1955, № 2, 16—26 См. реф. 7718.

7720. Моделирующая установка для решения задач шахтной вентиляции (Analogue computer for mine ventilation problems), Minig Mag., 1955, 92, № 2, 123—125 (англ.)

Моделирующая установка является нелинейным, низковольтным анализатором цепей, предназначенным для изучения сложных задач шахтной вентиляции. В моделирующей установке квадратичная зависимость перепада давления H воздушного потока в воздухопроводе от расхода воздуха Q имеет вид: $H = RQ^2$ и воспроизводится низковольтными лампами с вольфрамовой нитью накала. Так как вольтамперная характеристика лампы ($V = KI^{1,85}$) не точно воспроизводит требуемую квадратичную зависимость, в установку вводится поправка:

$$K = \frac{H^{0,075} \cdot B \cdot R^{0,925}}{G^{1,85}},$$

где K — коэффициент лампы, R — коэффициент сопротивления воздушному потоку, H — перепад давления воздушного потока, B и G — масштабные коэффициенты (вольт на единицу перепада давления и ампер на единицу скорости потока). П. В. Тихонов

7721. Моделирующие устройства для упругих пластичных систем. Шенкер, Мартин (Analog computers applied to elastic-plastic systems. S c h e n k e r L e o, M a r t i n G u n t h e r), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1954, 80, № 528, 1—13 (англ.)

Рассматривается моделирование динамики системы с уравнением движения типа $m\ddot{x} + R(x) = F(t)$, где $R(x)$ — нелинейная и неоднозначная функция x, относящаяся к классу кусочно-линейных функций. Описывается схема, содержащая электронные усилители, диоды, конденсаторы и реле, в которой реализуется зависимость $R(x)$. Приведены результаты решения уравнений типа: $\ddot{x} + R(x) = at - bt^2$ при $0 < t < t_{\max}$; a, $b > 0$ на моделирующем устройстве. Указывается на возможность применения разработанного нелинейного преобразования для решения задач более общего типа для систем с несколькими степенями свободы.

А. А. Фельдбаум

7722. Некоторые применения электроинтегратора ЭЛИ-14. К р у ш е в с к и й А. Е., Сб. студ. работ Белорус. политехн. ин-та, 1955, № 2, 10—16

Сообщается о решении на электроинтеграторе ЭЛИ-14 системы из шести обыкновенных дифференциальных уравнений.

7723. Расчетный стол фирмы «Детройт-Эдисон» (Looking ahead and building with Detroit Edison), Purdue Engr, 1955, 50, № 5, 3; Cornell Engr, 1955, 20, № 5 (англ.)

Сообщение фирмы «Детройт-Эдисон» (Detroit Edison Co.) о сооружении уникального расчетного стола для моделирования электрической системы фирмы. Расчетный стол можно использовать также для моделирования других систем. П. В. Тихонов

7724. Расчетный стол для исследования гидравлических или газовых систем. М у р (The McIlroy fluid network analyzer. M o o r e R o b e r t C.), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 3, 428—429 (англ.)

Кратко описывается расчетный стол, предназначенный для исследования гидравлических, тепловых или

газовых систем, построенный фирмой «Стандарт Электрик Тайм» (Standard Electric Time Co.). В устройстве потоки жидкостей или газа имитируются токами, падения давления — разностью потенциалов между различными точками рассматриваемой схемы, а трубопроводы — нелинейными сопротивлениями (флюисторами), вольтамперная характеристика которых выражается уравнением $V = kI^{1,85}$. Нагрузки имитируются электронными блоками, которые в каждом отдельном случае настраиваются на определенный, постоянный по величине ток. Измерения производятся специальными приборами, градуированными в единицах, соответствующих искомым величинам.

Расчетный стол состоит из двух блоков электронных нагрузочных элементов (всего 180 элементов), блока питания, четырех блоков для составления схемы исследуемой системы, общая емкость которых составляет 568 флюисторов, и панели управления. Главные измерительные приборы и другое испытательное оборудование установлены на передвижном пульте.

А. А. Крюков

7725. Расчетный стол с нелинейными сопротивлениями для расчетов газовых сетей (Fluid analogue serves gas lines), Heat and Ventilat., 1953, 50, № 8, 128 (англ.)

Фирмой «Стандарт Электрик» (Standard Electric Co.) построен расчетный стол постоянного тока, в котором использованы нелинейные сопротивления. Применение нелинейных сопротивлений позволяет создать электрический аналог газовой системы, в котором прямым измерением токов в ветвях схемы и напряжений между узлами можно получить пропорциональные им расходы в трубопроводах и падения давления. Измерительные приборы градуируются непосредственно в «$м^3$/час» и «*мм* вод. ст.» (или для сетей среднего и высокого давления в «$кг/см^2$»). Расчетный стол дает возможность моделировать газовые сети произвольной конфигурации. См. также реф. 7724.

А. А. Крюков

7726. Применение расчетного стола для проектных расчетов распределительных газовых сетей. Транк (Laclede applies McIlroy network analyze to design calculations for distribution system. Trunk E. F.), Amer. Gas. J., 1953, 179, № 3, 14—15, 34 (англ.)

Описан расчетный стол фирмы «Стандарт Электрик» для расчета газовых сетей (см. реф. 7724, 7725). Расчетный стол имеет 490 линейных элементов, 26 источников питания и 180 нагрузочных элементов. Для замещения нагрузок применены электронные элементы, имеющие характеристику $I = \text{const}$, т. е. на них может быть установлен заданный расход.

Расчетный стол имеет около 1000 нелинейных сопротивлений — флюисторов, разбитых на 200 размеров, причем один отличается от другого на 5%. Сопротивления могут соединяться параллельно или последовательно. Расчетный стол обслуживают два человека.

А. А. Крюков

7727. Роль вычислительных машин в проектировании газовых распределительных сетей. Крогер (Role of the computer in distribution design. Kroeger Carroll V.), Amer. Gas. J., 1955, 182, № 3, 14—16, 34 (англ.)

Применение вычислительных машин в практике проектирования газовых распределительных сетей значительно ускоряет и облегчает расчет различных вариантов системы. Специальные расчетные столы используются главным образом для определения распределения потоков газа в трубопроводах и падений давления на отдельных участках сети в различных режимах, а также влияния присоединения новых элементов распределительной сети и потребителей на существующую систему.

Цифровые вычислительные машины используются для численного решения систем уравнений, описывающих законы изменения давления и расхода газа в рассматриваемой системе.

А. А. Крюков

7728. Потенциальные возможности вычислительных машин при решении задач газораспределения (Potentialities of computers in solving gas engineering problems), Gas (Los Angeles), 1955, 31, № 5, 45—50 (англ.)

В 1955 г. в Чикаго проводилась конференция по вопросу применения электронных вычислительных машин в системах газового распределения. Обсуждались вопросы: применение вычислительных машин для решения задач газораспределения, выбор типа вычислительных машин и решение нелинейных задач. Отмечено, что в настоящее время более широкое распространение имеют моделирующие установки, приспособленные к решению задач газового распределения и снабженные нелинейными блоками для воспроизведения компрессоров и регуляторов давления.

П. В. Тихонов

7729. Расчетный стол «ТАБЛЕЛЕК» (La table de calcul electrique TABLELEC), Energie (Bruxelles), 1953, № 117, 1871, 1872 (франц.)

В январе 1952 г. в Бельгии пущен в эксплуатацию расчетный стол переменного тока «ТАБЛЕЛЕК». За время его работы на нем произведен анализ работы различных электрических сетей, электрифицированного транспорта, внутризаводских сетей, а также газовых сетей. Приводится фотография.

А. А. Крюков

7730. Работы, выполненные посредством расчетного стола «ТАБЛЕЛЕК» (Travaux réalisés au moyen de la Table à Calcul Électrique), Bull. bimestr. Union exploit. électr. Belgique, 1954, 25, № 1, 56—59 (франц.)

Перечисляются задачи, в основном из электротехники, решенные с помощью расчетного стола «ТАБЛЕЛЕК».

Р. Д. Бачелис

7731. Новые измерительные приборы для расчетных столов переменного тока. Фаунтин, Скуайрс, Гопкинс (New instrumentation of A—C network calculator with automatic features. Fountain L. L., Squires R. B., Hopkins W. A.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, 72, part 3. 368—375 (англ.)

Описание ряда приборов, облегчающих эксплуатацию расчетного стола, в том числе передвижная колонка для подбора величин элементов в схеме, измерительные приборы с автоматическим изменением пределов и т. п.

А. А. Крюков

7732. Думающие машины помогают раздвинуть границы техники (Machines that think help push back frontiers of engineering), Electrical World, 1955, 144, № 1, 35 (англ.)

Сообщение фирмы «Вестингауз» о новом расчетном столе переменного тока, определяющем наиболее рентабельную работу системы станций при недогрузке. Машина имеет 36 генераторных единиц и 580 контуров. Два пульта управления позволяют работать параллельно с 24 и 12 генераторными единицами.

Упоминается о моделирующем устройстве АНАКОМ. Сообщается также о создании диспетчерской машины, которая даст экономию 50 тыс. долл. в год на 1 млн. *квт*.

И. В. Лебедев

7733. Электронная вычислительная машина Амстердамской лаборатории (Electronic «Brain» for B. P. M. Research), Shell Mag., 1955, 35, № 581, 151 (англ.)

Сообщение об электронной вычислительной машине МИРАКЛЕ (РЖМат, 1956, 2501).

7734. АЛЬВАК III (Alwac III ... ready to serve you now!), Computers and Automat., 1955, 4, № 6, 137 (англ.)

Сообщается, что вычислительная машина АЛЬВАК III установлена в Морском ведомстве США, в Институте технологии газа и в Бюро погоды. Д. А. К.

7735. **Фирма «Вестингауз» использует машину ИБМ-701** (Westinghouse uses IBM computer), Electr. World, 1955, **143**, № 21, 56 (англ.)

В процессе проектирования фирмой «Вестингауз» серии силовых трансформаторов мощностью от 500 до 10 000 *ква* для расчетов была использована вычислительная машина ИБМ-701. А. А. Крюков

7736. **Обоснование использования автоматической вычислительной машины. Чейпин** (Justifying the use of an automatic computer. Chapin Ned), Computers and Automat., 1955, **4**, № 8, 17—19 (англ.)

При рассмотрении вопроса о полезности применения вычислительных машин принимаются во внимание два вида издержек и прибылей — прямые и косвенные. Прямые издержки и прибыли связаны с оплатой обслуживающего персонала, расходами на материалы и оборудование и имеют денежное выражение. К косвенным прибылям можно отнести улучшение конкурентоспособности компании за счет более быстрого и полного обслуживания потребителей, улучшение управления фирмой, получение более полных данных в короткие сроки. К издержкам относится зависимость управления от работы вычислительной машины, необходимость в значительной перестройке всех внутренних операций фирмы.

Обоснование полезности автомтической вычислительной машины сводится к определению разности издержек в системе обработки данных до применения вычислительной машины и издержек в предполагаемой новой системе с вычислительной машиной. Вторым этапом является сравнение разности издержек (если применение вычислительной машины дает экономию) с расходами на покупку вычислительной машины, причем автор определяет срок службы машины в 7 лет. В. Д. Князев

7737. **Электронные вычислительные машины и газовая промышленность** (Electronic computers and the gas industry), Gas World, 1955, **141**, № 3682, 705—706 (англ.)

Дается краткая история развития цифровых машин. Отмечается, что в комплект цифровой вычислительной машины «402» фирмы «Эллиотт» стоимостью 25.000 фунтов стерлингов входят десятипроцентный запас сменных субблоков, главный генератор переменного тока, перфоратор для набивки перфоленты, осциллограф и набор программ для решения ряда общих задач. В. Д. Князев

7738. **Автоматизация — настоящее и будущее промышленных исследовательских работ. Брадберн** (Automation — product and promise of industrial research operations. Bradburn James R.), Industr. Labs, 1955, **6**, № 1, 5—7 (англ.)

Сообщается, что в США в 1953 г. в область промышленных исследований было вложено 4 млрд. долларов, из которых 2,5 млрд. долларов вложено правительством, а 1,5 млрд. долларов — частными компаниями. Поскольку широкий размах исследовательских работ приводит к увеличению массы обрабатываемых данных, то возникает потребность в быстрых вычислительных устройствах. Приводится ряд технических задач. Разбирается вопрос о вычислительном оборудовании, необходимом для их разрешения. В. Д. Князев

7739. **Дальнейшее совершенствование турбин** (Perfecting tomorrow's turbines), Computers and Automat., 1955, **4**, № 4, 51 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о вычислительной машине УНИВАК Сайнтифик. Машина позволяет решать сложные задачи, возникающие при конструировании турбин. В. М. Тарасевич

7740. **Канадская тихоокеанская железнодорожная компания применяет машинную обработку служебных бумаг** (C. P. R. machine processes paper work), Canad. Transp., 1955, sept., 475—476 (англ.)

Сообщение Канадской Тихоокеанской железнодорожной компании о применении вычислительных машин для учета и обработки служебных бумаг на железной дороге.

Сообщается, что Канадская Тихоокеанская железнодорожная компания использует для этих целей вычислительные машины 405, 407 и 604 фирмы ИБМ. Б. И. Стрелков

7741. **Разработка миниатюрного «мозга» для самолета** (Develop miniature brain for aircraft), Industr. Labs, 1955, **6**, № 8, 85 (англ.)

Сообщение о самолетной цифровой вычислительной машине ТРАДИК (РЖМат, 1954, 5807—5808).

7742. **Альпийская конференция по вычислительной технике и возможности электронных вычислительных машин** (Les journées alpines de calcul numérique et les possibilités des calculatrices électroniques), Electronique, 1955, № 106, 40—43 (франц.)

Информационное сообщение о конференции по вычислительной технике, состоявшейся в Гренобле в мае 1955 г. Описываются возможности цифровых вычислительных машин (в основном, фирмы ИБМ). А. А. Крупский

7743. **Вычислительная машина управляет инвентаризацией** (Computer controls parts inventory), Electronics, 1955, **28**, № 8, 20, 22 (англ.)

Сообщается, что в 1956 г. фирмой «Ньюклеар Девелопмент» (Nuclear Development Associates) будет построена для фирмы «Отис Элевейтор» (Otis Elevator) вычислительная машина для обработки данных о продаже и закупке изделий и т. п. Приводятся краткие данные машины. Д. А. Абдуллаев

7744. **Вычислительный центр открыт** (Data processing center opened), Chem. and Engng News, 1955, **33**, № 31, 3158—3159 (англ.)

Сообщается, что в главной конторе фирмы ИБМ в Нью-Йорке открыт вычислительный центр (РЖМат, 1956, 3398).

7745. **Новый вычислительный центр фирмы ИБМ** (New processing center for electronic data opened by IBM), Electr. Engng, 1955, **74**, № 9, 855—856 (англ.) См. РЖМат, 1956, 3398.

7746. **Теория информации как инструмент инженера связи. Фрюауф** (Die Informationstheorie als Werkzeug des Nachrichten-Ingenieurs. Frühauf Hans), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1953/54, **3**, № 4, 571—580 (нем.)

Подробное изложение основных достижений современной теории связи в применении к технике передачи сообщений на расстояние. Библ. 47 назв. Т. А. Ш.

7747. **Цифровая машина ДИСЕАК. Бострём** (Siffermaskinen Dyseac. Boström Lennart), Tekn. tidskr., 1955, 85, № 23, 549—551 (швед.)

Описание электронной вычислительной машины ДИСЕАК (РЖМат, 1955, 987, 4737, 5358). Приводятся основные данные машины и ее блок-схема. Г. Н. Поваров

7748. **Национальная физическая лаборатория** (National Physical Laboratory), Engineer, 1955, **199**, № 5183, 736—737 (англ.)

Сообщается, что в мае 1955 г. Национальная физическая лаборатория демонстрировала свои разработки. В отделении «Управляющих механизмов и электроники» демонстрировался магнитный барабан электронной цифровой вычислительной машины АКЕ. Он имеет 128 рабочих дорожек, на каждой из которых записывается 1024 знака. Барабан вращается со скоростью 6250 об/мин. Имеются 16 записывающих и 16 читающих

головок, расположенных в 2 ряда. Специальным электромагнитным устройством головки могут быть сдвинуты вдоль образующей барабана в нужное положение.

«Математическое отделение» демонстрировало цифровую электронную универсальную вычислительную машину ДЭЮКЕ (РЖМат, 1955, 4740). Этим же отделением представлен электронный вычислительный перфоратор, выполняющий операции с 20-значными числами за $^1/_{20}$ сек. Содержимое арифметического узла можно прочесть на панели неоновых ламп. На каждую цифру отведены 4 неоновые лампочки. В. Д. Князев

7749. Вычислительная машина, фирмы «Паурс-Сеймас» управляемая программой (Powers-Samas programme controlled computer), Machinery (London), 1955, 87, № 2228, 279 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине PCC фирмы «Паурс-Сеймас» (РЖМат, 1956, 5558).

Конструктивно машина выполнена в виде 2 шкафов, соединенных шлангами. Габариты каждого шкафа: длина 1,70 *м*, ширина 0,65 *м*, высота 1,80 *м*.

В машине применяются двухламповые субблоки на штепсельных разъемах с печатным монтажом соединений внутри субблока.

В качестве примеров коммерческих расчетов, производимых на этой машине, отмечается начисление премиальных, расчет почасовой оплаты, анализ затрат на труд и материалы, подсчет отходов и др. Из области научных вычислений на машине проводилось решение систем однородных уравнений, обращение матриц, спектральный анализ. А. Б. Залкинд

7750. Является ли это прообразом завтрашней конторы? Смит (Is this a blueprint for tomorrow's offices? Smith Robert M.), Office Manag., 1955, 16, № 8, 12—14 (англ.)

В городе Камиллус, США (Camillus N. Y.) строится вычислительный центр американской фирмы «Сильвания» (Sylvania Electric Products, Inc.). Назначение центра — обобщать, суммировать и анализировать информацию, получаемую с заводов, для лучшего управления фирмой. Заводы будут вести свой бухгалтерский учет и, кроме того, передавать требуемую информацию в вычислительный центр фирмы. В местных конторах информация пробивается на перфоленте, которая используется для передачи информации в вычислительный центр. В вычислительном центре будет применена автоматическая машина УНИВАК. Поскольку УНИВАК использует для ввода 7-канальную магнитную ленту, фирма «Ремингтон Ранд» разработала устройство, переносящее информацию с 5-канальной бумажной перфоленты на 7-канальную магнитную ленту. В дальнейшем фирма предусматривает конструирование специальной телеграфной аппаратуры, работающей с 7-канальной перфолентой. В. Д. Князев

7751. Что нового в запоминающих устройствах? (What's new in mnemonics?), Computers and Automat., 1955, 4, № 6, 153 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» (Remington Rand) о запоминающем устройстве на магнитных сердечниках, которое хранит 147'456 двоичных цифр. Устройство используется в машине УНИВАК Сайнтифик. В. В. Бочарова

7752. Большая плотность записи на магнитной ленте в цифровых вычислительных машинах (High-densitg tape recording for digital computers), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1955, 39, № 9, 121—124 (англ.)

Национальным бюро стандартов разработана новая система записи на магнитную ленту с большой плотностью. В системе используется видоизмененный метод записи по двум уровням, в котором полярность импульса записи при записи «0» остается такой же, какой она была при предыдущей цифре, и меняется на обратную при записи «1». При чтении записи, сделанной по такому принципу, в читающей головке сигналы возникают только от единиц. Место записи на ленте фиксируется маркерными импульсами, предварительно записанными на маркерной дорожке. На каждый код отводится на один маркерный импульс больше, чем цифр в коде. Лишний маркерный импульс служит для указания начала кода. Между группами маркеров, соответствующих одному коду, оставляется промежуток, необходимый для разгона и остановки ленты. Оказалось, что амплитуда читаемых сигналов растет с плотностью записи, достигает максимума при плотности 18 *имп/мм*, после чего медленно падает. При плотности около 30 *имп/мм* амплитуда сигнала была еще приемлемой для работы. Запись производилась током 60 *ма* при длительности импульса записи 2 мксек. При экспериментах возникли затруднения, вызванные наводкой в момент записи в маркерную головку паразитных сигналов из записывающих головок. Эти наводки удалось уменьшить, располагая маркерную головку между записывающими головками и ориентируя витки в последних навстречу один другому. Кроме того, наводки были сильно уменьшены подавлением высоких частот в усилителе маркерного канала. Описанный метод записи был опробован в лабораторных условиях. При плотности 20—24 *имп/мм* записывалось и считывалось без ошибок от 1 до 3 млн. двоичных цифр. Разработанное устройство будет опробовано в реальных условиях на машине СЕАК.

А. И. Щуров

7753. Большая плотность записи на магнитной ленте в цифровых вычислительных машинах (High density tape for digital computers), Metalwork. Product., 1955, 99, № 47, 1983 (англ.)

Сообщение о новом способе записи на магнитную ленту с плотностью 20—24 *имп/мм*, разработанном в Национальном бюро стандартов (см. реф. 7752).

А. И. Щуров

7754. Электрографический метод печати. Эпстейн (The electrographic recording technique. Epstein Herman), Proc. West. Joint Comput. Conf., 1955, 116—118 (англ.)

Автор считает, что наиболее перспективными являются электрографические устройства печати, основные преимущества которых заключаются в их большом быстродействии (свыше 5000 знаков в 1 сек.), небольшом потреблении мощности (всего 5 *вт* на 5000 знаков в 1 сек.) и малой стоимости. Одно из таких устройств разработано в лаборатории фирмы «Берроус» (Burroughs Labs). Изображение наносится на бумагу, покрытую термопластическим слоем, в виде точечных электрических зарядов, отображающих конфигурацию записываемого знака. Затем бумага протаскивается через красящий порошок, который прилипает только к тем участкам бумаги, которые были наэлектризованы. Закрепление порошка на бумаге производится термообработкой при протаскивании бумаги через горячую пластину с отверстием. Электризация бумаги производится специальной головкой, состоящей из 7 проволочек диаметром 0,125 *мм*, установленных в ряд перпендикулярно направлению движения бумаги без касания с ней. Бумага двигается непрерывно. После дешифрирования печатаемый знак запоминается в матрице из магнитных сердечников 5×7 и развертывается пятью последовательными импульсами, которые подаются на каждую из 7 проволочек. Кроме импульсного питания, к иголочкам подводится постоянное смещение. Это понижает амплитудный порог записи, что дает возможность уменьшить размеры изображения. Каждая иголочка питается от нормально запертой лампы, через повышающий (1 : 5) трансформатор. Управляющие лампой импульсы имеют

амплитуду около 20 *в* и длительность порядка 40 *мксек*.
А. И. Щуров

7755. Лентопротяжный механизм (Tape transport), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 8, 790 (англ.)

Фирмой «Браш Электроникс» (Brush Electronics Co.) выпущен лентопротяжный механизм, названный «Датакорд» (Datacord). Скорость протяжки в прямом и обратном направлениях ~1,9 *м/сек*. Может использоваться магнитная лента шириной от 6,3 до 50 *мм*. Направление движения зависит от того, к какому из двух непрерывно вращающихся ведущих роликов прижата лента. Ход прижимных роликов не превышает 0,08 *мм*. Время остановки ленты ~4 мсек. На ленте шириной 50 *мм* может быть размещено до 22 дорожек.
А. И. Щуров

7756. Исследование качества ферритов с прямоугольной петлей для электронных вычислительных машин. Эккерт, Вейдес, Валленфанг (Gütebeurteilung von Rechteckferriten für electronische Rechenmaschinen. Eckert O., Weides E., Wallenfang K.), Elektron. Rundschau, 1955, 9, № 10, 371—374 (нем.)

Сформулированы основные требования, предъявляемые к магнитным сердечникам как элементам электронных счетных машин. Кратко описаны способы снятия петли гистерезиса: баллистический, осциллографический (на частотах 50 *гц* и 100 *кгц*) и по методу огибающей. Рассмотрены серийные испытания сердечников, основанные на оценке отношения амплитуды «1», деформированной половинными импульсами считывания, к амплитуде «0», деформированной половинными импульсами записи. Приведены схемы, осциллограммы и графики.
Г. В. Шустарева

7757. Импульсные схемы переключателей на магнитных сердечниках. Карнау (Pulse-switching circuits using magnetic cores. Karnaugh M.), Proc. I. R. E., 1955, **43**, № 5, 570—584 (англ.)

Излагаются принципы построения схем переключателей на магнитных сердечниках, применяемых в вычислительной технике. В первой части рассматривается процесс перемагничивания сердечников с прямоугольной петлей гистерезиса. Приводится зависимость времени переключения от числа ампер-витков.

Вторая часть посвящена схемам, работающим по замкнутому циклу следующим образом. До начала работы все сердечники намагничены в одном определенном направлении, названном «нормальным». Во время первой фазы Φ_1 каждый сердечник может быть перемагничен («возбужден») или нет в зависимости от того, на какие входные обмотки данного сердечника поданы импульсы, а на какие нет. Во время второй фазы Φ_2 подается импульс возврата и все «возбужденные» сердечники возвращаются в нормальное состояние, в результате чего на их выходных обмотках появляются импульсы. Выходные обмотки комбинируются нужным образом в зависимости от общей схемы. Теоретически разбирается вопрос, каким образом выбрать направление обмоток каждого сердечника, чтобы он «возбуждался» и обеспечивал выходной сигнал только при определенной комбинации входных импульсов, выполняя ту или иную логическую операцию. Выводится формула для оценки допустимого разброса амплитуд токов в обмотках в зависимости от их числа. Для иллюстрации изложенного метода приводится 15 схем и дается их классификация по принципу работы.

Принцип работы схем класса Т основан на трансформаторном действии сердечника. Простейшая схема этого класса, осуществляющая логическую операцию «или», имеет m сердечников. Каждый сердечник имеет отдельную входную обмотку для возбуждения, последовательно соединенные обмотки, на которые подается импульс возврата во время фазы Φ_2, и последовательно соединенные выходные обмотки. Если, по крайней мере, один сердечник был возбужден во время фазы Φ_1, то при подаче импульса возврата на выходе схемы появляется импульс, который через диод подается к нагрузке. Диод разрешает протекание тока по нагрузке во время возврата сердечника и запрещает при возбуждении, так как в первом и во втором случае в выходной обмотке наводятся э. д. с. разного знака. В схемах класса А один конец выходной обмотки каждого сердечника подключается к концу цепочки из последовательно соединенных обмоток возврата. Схема работает так, что импульс возврата, являющийся выходным импульсом, проходит по выходной обмотке только одного из нескольких сердечников. Схемы класса А подразделяются на 2 подкласса АВ и АF. В схемах подкласса АF при возврате сердечника в его выходной обмотке наводится э. д. с. в таком направлении, что она способствует протеканию тока импульса возврата через эту обмотку, и, следовательно, почти весь ток протекает через обмотку этого сердечника и не течет через обмотки остальных сердечников, которые не были возбуждены. В схемах подкласса АВ, наоборот, при возврате возбужденных сердечников в их выходные обмотки индуцируется э. д. с., препятствующая протеканию тока импульса возврата, и, следовательно, почти весь ток течет через обмотку невозбужденного сердечника. Если схему подкласса АВ, имеющую один выход, подключить параллельно нагрузке, то получается схема, названная ABS. Схема АВ в данном случае в зависимости от состояния своего сердечника может или шунтировать нагрузку или нет.

Автор считает возможным в настоящее время строить вычислительные машины почти целиком на магнитных сердечниках с рабочей частотой выше 100 *кгц*. Двумя важными проблемами в этой области автор считает использование генераторов импульсов на кристаллических триодах для питания сердечников импульсами тока и разработку методов быстрой намотки и монтажа тороидальных сердечников малых размеров. Библ. 31 назв.
В. В. Карибский

7758. Электромагнитные линии задержки (Electromagnetic time-delay lines), ISA Journal, 1955, 2, № 8, 17А (англ.)

Сообщение фирмы «Хелипот» (Helipot Corp.) о выпуске электромагнитных линий задержки с переменной и постоянной величиной времени задержки. Время задержки нарастает ступенями по 0,02 *мксек*. в диапазоне от 0—0,2 до 0 — 0,3 *мксек*. для линий с 10 и 15 витками соответственно. Точность задержки 5% от максимальной величины. Время нарастания импульса не более 0,0175 *мксек*. Предназначенная для использования в триггерах линия с переменной задержкой имеет частотный диапазон 20 *Мгц* при незначительных фазовых искажениях. Линия с постоянной задержкой имеет частотный диапазон 25 *Мгц* при затухании 3 *дб*. Приведено фото.
А. П. Щуров

7759. Преобразователь данных из непрерывной формы в цифровую (Analog to digital converter), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 6, 626 (англ.)

Фирма «Эпско» (Epsco, Inc.) выпустила преобразователь данных из непрерывной формы в цифровую. Напряжение, подаваемое на вход устройства, преобразуется в числа со скоростью до 100 000 чисел в 1 сек. При непрерывно меняющемся входном напряжении числа выдаются через каждые 10 *мксек*. Точность преобразования $\pm 0{,}05\%$. Диапазон преобразуемых величин 20 *мв* ÷ 10 000 *в*.
А. И. Щуров

7760. Преобразователь из цифровой формы в непрерывную (Digital to analog converter), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 8, 788, 790 (англ.)

Сообщение фирмы «Мозли» (F. L. Moseley Co.)

о выпуске устройства «30А», преобразующего информацию с перфокарт в напряжения, которые могут использоваться для управления самописцем, вычерчивающим графики в координатах X, Y. Данные могут приниматься от перфоратора ИБМ-523 или вручную. Максимальная скорость преобразования 50 перфокарт в 1 мин. Прибор имеет 5 различных масштабов и точность $\pm 0{,}1\%$ от полной шкалы. Приведена фотография. А. И. Щуров

7761. Преобразователь из цифровой формы в непрерывную (Digital to analog converter), Rev. Scient. Instrum., 1955, 26, № 8, 790 (англ.)

Сообщение фирмы «Либраскоп» (Librascope, Inc.) о выпуске нового преобразователя цифровых данных в непрерывную форму. Устройство преобразует данные с перфоленты в напряжения, управляющие самописцем, вычерчивающим графики в координатах X, Y. Скорость чтения перфоленты 10 знаков в 1 сек. Скорость вычерчивания графика составляет от 1 до 2 сек. на точку в зависимости от расстояния между точками. Потребляемая мощность 75 *вт*. Размеры блока $26 \times 48 \times 30$ *см*; вес около 15 *кг*. А. И. Щуров

7762. Сверхвысокочастотный передатчик с частотной модуляцией на точечно-контактном полупроводниковом триоде. Томас (A point-contact transistor VHF FM transmitter. Thomas D. E.), I. R. E. Trans., 1954, **ED-1**, № 2, 43—52 (англ.)

Приведены результаты исследований генератора незатухающих колебаний на одном точечно-контактном полупроводниковом триоде М 1832, проведенных в лаборатории фирмы «Белл». Условия генерации в схеме выполняются за счет положительной обратной связи, создаваемой сопротивлением объема германия, и фазового сдвига в зоне граничной частоты. Описаны идея работы и образец передатчика, в котором модуляция частоты генератора звуковой частотой достигается за счет изменения граничной частоты при изменении режима работы схемы. Требования к триоду в такой схеме сводятся к обеспечению надлежащей частотной зависимости α и достаточной величины сопротивления обратной связи. К смене деталей схема не критична. Габариты передатчика вместе с батареей около $4{,}5 \times 5 \times 2{,}5$ *см*. В. К. Зейденберг

7763. Граничные решения в точке сжатия канала в полевом кристаллическом триоде. Прим, Шокли (Joining solutions at the pinch-off point in «field-effect» transistor. Prim R. C., Shockley W.), I. R. E. Trans., 1953, **PGED-4**, 1—14 (англ.)

Дано приближенное аналитическое рассмотрение условий сшивания двух решений для продольного поля в канале полевого триода, полученных из рассмотрения носителей зарядов или разности потенциалов, приложенной к внешним электродам, вблизи точки сжатия канала. Показано, что степень приближения достаточна для большинства практически важных случаев. А. Р.

7764. Фотодиоды и фототриоды (Photodioden und Phototransistoren), Elektro-Technik, 1954, **86**, № 4, 11 (нем.)

Описываются германиевые фотодиоды типа GP2 длиной 8 *мм* и сечением 5 *мм*. Луч света концентрируется лупой на полоску 0,5 *мм* через окно в 2 *мм*². Выходное напряжение меняется от —1 до —20 *в*. Темновой ток около 20 *мка*, фототок около 1 *ма*. Больший ток приводит к перегреву и разрушению фотодиода при 80°. Чувствительность достигает 30 *мка* на миллилюмен.

В германиевых фототриодах GPT на коллектор подается —5 *в*, на эмиттер напряжение не подается. Эмиттерная часть может работать как фотодиод. Ток фототриода в 10 раз больше тока фотодиода при том же освещении. В. З.

7765. К теории германиевых выпрямителей и полупроводниковых триодов. Кремер (Zur Theorie des Germaniumgleichrichters und des Transistors. Krömer Herbert), Z. Physik, 1953, **134**, № 4, 435—450 (нем.)

Освещаются вопросы подвижности носителей зарядов в полупроводниковых приборах. Подсчитывается плотность «поднятых» носителей при сильных полях. Утверждается, что для точечно-контактных триодов приведенный расчет позволяет объяснить большие значения коэффициента усиления по току α. Для этих же триодов предлагается новый механизм появления области отрицательного сопротивления. Рассматриваются тепловые процессы в точечно-контактных триодах.

См. также РЖФиз, 1955, 9578. А. Р.

7766. Вопросы механизации графических работ. Малахов Н. А., Мирошниченко Б. Я. В сб.: Методы начертательной геометрии и ее приложения. М., Гостехтеоретиздат, 1955, 403—411

Описываются приборы, позволяющие механизировать графические построения, разметку, измерение различных геометрических элементов.

Прибор для построения линий пересечения цилиндрической поверхности с другой заданной поверхностью представляет собой группу стержней, расположенных вдоль образующих цилиндра и имеющих возможность перемещаться вдоль оси. Несложным механизмом ось цилиндра может быть установлена в заданное положение по отношению к поверхности, с которой цилиндр будет пересекаться; придвинув затем к поверхности стержни-образующие, мы получим ряд точек, принадлежащих линии пересечения. По этому же принципу могут быть выполнены приборы для определения линий пересечения конических поверхностей, поверхностей с ребром возврата, косых плоскостей, коноидов, цилиндроидов, косых цилиндров, поверхностей вращения и кольцевых поверхностей с любой поверхностью.

Описывается ряд приборов для разметки плоских деталей: прибор на базе обычного слесарного угломера с нониусом для точного отсчета углов, приспособление для разметки дуг с центрами вне детали, приспособление для разметки плоских кулачков к станкам автоматам, повышающее производительность труда в 8—16 раз, приборы для нахождения центра окружности.

Ряд приборов служит для исключения некоторых математических расчетов в процессе разметки. Таковы приборы для определения длины хорд, для деления отрезка на равные части, для вычисления элементов прямоугольного треугольника. Опытная эксплуатация партии таких приборов показала, что на некоторых операциях время разметки сокращается в 5—8 раз. В. Д. Князев

7767. Вычислительные механизмы. Биллингс (Computer mechanisms. Billings J. Earl and), Mach. Design, 1955, **27**, № 3, 213—216 (англ.)

Рассматриваются механические решающие устройства, выполняющие простейшие математические действия: сложение, вычитание, умножение, деление, интегрирование тригонометрических функций, извлечение квадратного корня. В. М. Тарасевич

7768. Устройство связывает перфоратор с бухгалтерской машиной (Device connects card punch to accounting machine), Amer. Business, 1955, **25**, № 9, 46 (англ.)

Сообщение фирмы «Систематикс» (Systematics, Inc.) о выпуске нового устройства «Систематикс Интеркуплер» (Systematics Intercoupler), которое соединяет бухгалтерскую машину с перфоратором. Это позволяет при работе на бухгалтерской машине автомати-

чески получать результаты на перфокарте или перфоленте. Таким образом исключаются ошибки, которые обычно встречаются при перенесении информации с таблиц на перфокарты. В. Д. Князев

7769. Упрощенная клавиатура облегчает вычисления (Simplified keyboard makes adding easy), Amer. Business, 1955, 25, № 9, 47 (англ.)

Кратко описываются эксплуатационные возможности настольной десятиклавишной счетно-записывающей машины с узкой кареткой и ручным приводом фирмы «Виктор Эддинг Машин» (Victor Adding Machine Co.). Машина складывает, вычитает, автоматически множит. Возможно умножение на постоянный множитель, перенос чисел из счетчика в установочный механизм. Установка всех исходных данных производится с помощью одной и той же цифровой клавиатуры. Приводится фото машины.

Примечание референта. Согласно рекламам фирмы «Виктор Эддинг Машин» (США) 1954—1955 гг., она выпускает 33 модели десятиклавишных и 31 модель многоклавишных счетно-записывающих машин с узкой кареткой, с ручным и с моторным приводом. На снимке изображена машина «Виктор Мульт-О-Матик» серии 74. Н. Н. Парусникова

7770. Насколько распространены машины-животные? (Приборы, которые подражают функциям живых организмов и обучаются). Земанек (Wie weit ist das Tier Maschine? Geräte, die Lebensfunktionen nachahmen und lernen. Zemanek Heinz), Wiss. und Weltbild, 1954, 7, № 3-4, 146—153 (нем.)

Описывается несколько моделей машин-животных, вырабатывающих «рефлексы».

Модель Уолтера «Черепаха» (РЖМат, 1954, 4950, 5881) осуществляет функцию реагирования на свет или на обход препятствий. Усложнением конструкции можно достичь «обучения» модели. Если установить микрофоны на модели и при столкновении «Черепахи» с препятствием давать свисток или стучать по оболочке, то «Черепаха» выработает рефлекс.

Приводится краткое описание гомеостата Ашби (РЖМат, 1955, 539). Усовершенствование гомеостата лампами и реле дало бы неплохую модель приспособляемости животного. Гомеостат имеет способность приспособляться и искать цель, а также утомляться. В последнем случае гомеостат ведет себя так же, как улитка, которая перестает прятаться, если ее долго пугать.

Как пример запоминания и ориентировки приводится модель Шеннона «Мышь в лабиринте» (РЖМат, 1954, 2389, 2390, 2391). Д. А. Кузьмичев

7771. Электронная лиса. Дюкрок (Le renard électronique. Ducrocq Albert), Industrie, 1954, 8, № 2, 69—73 (франц.)

Популярное описание принципов устройства и схемы автоматического механизма, выполняющего некоторые простейшие функции животного. Т. А. Ш.

7772. Кибернетическая лиса. Дюкрок (Le renard cybernétique. Ducrocq A.), Electronique, 1954, № 88, 30—31 (франц.)

Приведена принципиальная схема устройства (см. реф. 7771). Т. А. Ш.

7773. Проблемы применения электронных цифровых вычислительных машин для коммерческих расчетов. Брин (Problems involved in the application of electronic digital computers to business operations. Breen John M.), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 16—21, 34 (англ.)

Оценивается экономическая целесообразность применения вычислительных машин для коммерческих расчетов. Приводятся различные статьи расходов при эксплуатации вычислительных машин. В. Д. Князев

7774. Электронные вычислительные машины и их применение. Уилкинсон (Electronic computing machines and their uses. Wilkinson J. H.), J. Scient. Instrum., 1955, 32, № 11, 409—415 (англ.)

В популярной форме дается исторический обзор вычислительной техники. Упоминаются некоторые английские и американские вычислительные машины. В. М. Т.

7775 П. Многопозиционное запоминающее устройство. Мей (Multiple-stable state-storage devices. May Michael) [Hughes Aircraft Co.]. Пат. США 2707591, кл. 235—61, 3.05.55

Схема для хранения комбинационного кода. Устройство, состоящее из двух элементов с двумя возможными состояниями (электронные лампы, транзисторы, магнитные сердечники и т. д.). В каждой комбинации r элементов находятся в определенном состоянии ($r < n$). Последнее достигается тем, что выходы каждой группы элементов, находящихся в открытом состоянии, управляют с помощью логических схем остальными элементами, удерживая их в закрытом состоянии. Предлагаемая схема дает значительную экономию числа используемых элементов для представления данного числа комбинаций. Например, 7 элементов в такой схеме дают представление любой из 35 различных комбинаций, в то время как в обычных схемах для их представления требуется 6 триггеров, т. е. 12 отдельных элементов. Приводится схема на 10 состояний, требующая всего 5 ламп. Кроме того, указанные схемы весьма просто позволяют осуществлять контроль за правильностью их работы. А. Б. Залкинд

7776 П. Конструкция запоминающего устройства на магнитных сердечниках. Розенберг, Станавидж (Magnetic memory construction. Rosenberg Milton, Stanavige Benedict) [International Telemeter Corp.]. Пат. США 2712126, кл. 340—166, 28.06.55

Улучшенная конструкция платы (матрицы) запоминающего устройства на магнитных сердечниках. Основанием платы служит латунный лист. По краям листа укреплены колодки из диэлектрического материала, образующие раму, на которую по обе стороны листа натягиваются провода, прошивающие сердечники. Лист оказывается расположенным между двумя сетками сердечников и используется в качестве общего провода, отводящего токи, которые пронизывают сердечники по рядам. Достоинствами конструкции являются: механическая прочность, некоторое облегчение трудоемкого процесса прошивки сердечников проводами, малая индуктивность рассеяния и уменьшенное активное сопротивление цепей, питающих сердечники. Н. П. Брусенцов

7777 П. Механизация сборки запоминающих устройств на ферритовых сердечниках. Уэйлс (Means for manufacturing magnetic memory arrays. Wales Nathaniel B., Jr) [Industrial Patent Corp.]. Пат. США 2700150, кл. 340—174, 18.01.55

Предложен способ механизации монтажа плат запоминающих устройств на ферритовых сердечниках. Автор предлагает изготовлять такие платы, используя технологию печатных схем. Процесс изготовления платы состоит из автоматизированного производства заготовок, изготовления собственно плат с нужным расположением проводов, сборки и пайки готовой платы. Заготовка представляет собой магнитный сердечник, надетый плотно на цилиндрик из изолирующего пластического материала, через который проходят плотно запрессованные в него три П-образно изогнутых проводника. В плате, на месте каждого сердечника, имеется система из шести отверстий, в которые с небольшим зазором входят концы этих проводников на всю тол-

щину платы. Необходимые соединительные провода между отверстиями напечатаны на той стороне платы, которая обращена к сердечникам. Пайка всех сердечников платы производится одновременно путем погружения платы на половину ее толщины в ванну с жидким припоем. При этом припой поднимается по капиллярным каналам, образованным проводниками и стенками отверстий, через которые они проходят, выходит на верхнюю поверхность платы, где и спаивает провода, проходящие через сердечник, с проводами, напечатанными на плате. Ю. И. Визун

7778 П. Магнитные записывающие устройства. Флеминг (Magnetic recording systems. Fleming Howard M., Jr) [Monroe Calculating Machine Co.]. Пат. США 2713676, кл. 340—174, 19.07.55

Предлагается два метода уничтожения наводок из записывающей головки в головки чтения в таких магнитных запоминающих устройствах на барабане или диске, где запись и чтение могут идти одновременно.

Первый метод состоит в том, что рядом с основной читающей головкой располагается идентичная балластная головка, витки которой включаются встречно с витками основной читающей головки. Таким образом, наводимые в головках паразитные сигналы взаимно уничтожаются. В другом методе для уничтожения этих наводок на вход усилителя чтения подается из цепи записи напряжение, амплитуда и фаза которого могут регулироваться и подбираются таким образом, чтобы полностью компенсировать паразитный сигнал на входе усилителя. А. И. Щуров

7779 П. Электронное устройство для выполнения двоичного умножения. Кросман (Electronic binary multiplying computer. Crosman Loring P.) [Remington Rand Inc.]. Пат. США 2700503, кл. 235—61, 25.01.55

Двоичное умножение двух чисел, имеющих каждое по n разрядов, можно производить на суммирующем регистре, имеющем $2n + 1$ разрядов. Для этого множитель помещают в младшие разряды регистра и сдвигают влево, пока в старшем разряде не появится код. Наличие кода в старшем разряде является признаком того, что в младшие разряды регистра нужно передать множимое. При каждом прибавлении последнего из старшего разряда регистра вычитается единица. Наличие кода нуля в этом же разряде является признаком необходимости сдвига влево.

Таким образом, по мере получения произведения множитель сдвигается влево и освобождает старшие разряды регистра. После выполнения умножения произведение займет $2n$ разрядов регистра. Для действия устройства необходим счетчик сдвигов, считающий до $2n + 1$.

Приводятся скелетная схема устройства для умножения трехзначных десятичных чисел и принципиальные схемы отдельных его элементов. В. Н. Лаут

7780 П. Многочастотный электронный умножитель. Диккинсон (Multifrequency electronic multiplier. Dickinson Arthur H.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2702666, кл. 235—61, 22.02.55

Предложена схема электронного умножителя с регистрами для множимого, множителя и произведения и с набором вентилей, обеспечивающих логическую схему прохождения вырабатываемой специальным генератором определенной последовательности импульсов. В. К. Зейденберг

7781 П. Электронный делитель. Вудс-Хилл, Дейвис (Electronic divider. Woods-Hill William, Davis David T.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2703201, кл. 235—61, 1.03.55

Описывается электронный цифровой делитель. Имеются регистры делимого, делителя и частного. Деление осуществляется путем вычитания делителя из делимого. С. Е. Жорно

7782 П. Вычислительное устройство. Бишоп (Computer. Bishop Amasa S.) [United States of America as represented by the Secretary of the Navy]. Пат. США 2703203, кл. 235—61, 1.03.55

Описывается электронное моделирующее устройство для решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Решение в виде кривой вычерчивается самописцем. С. Е. Жорно

7783 П. Устройство для контроля кодов чисел. Хобс (Parity check system. Hobbs Linder C. [Radio Corp. of America]. Пат. США 2719959, кл. 340—147, 4.10.55

Устройство для контроля четности кодов. Первая из предлагаемых схем устройства имеет по сравнению с ранее известными схемами меньшее количество элементов. Контролируемый код принимается в триггерный регистр, после чего триггеры регистра поочередно гасятся импульсами генератора. В тех триггерах, где была принята «1», образуется отрицательный перепад напряжения, который дифференцируется. Образующиеся для дифференцировании короткие импульсы повторяются катодными повторителями и через диоды воздействуют на индикаторный триггер, работающий в режиме счета. Кроме того, индикаторный триггер имеет вход при установки на «0». На этот вход по окончании последнего временного импульса подается через линию задержки импульс гашения. Уровень индикаторного триггера подается на один из входов клапана, на другой вход которого заводится незадержанный импульс гашения. При нечетном числе единиц в коде на выходе клапана появляется импульс.

Другая предлагаемая схема отличается тем, что в качестве контрольного триггера используется последний триггер регистра, гасящийся через линию задержки последним временным импульсом.

Приводится схема триггера на двух пентодах, использующегося в устройстве с установкой на «0» и «1» положительными импульсами и счетом от отрицательных импульсов. А. И. Щуров

7784 П. Электронный считающий прибор (Circuits for stabilizing cathode beams in alternative positions. Electronic counting apparatus) [Philips Electrical Industries, Ltd]. Англ. пат. 695584, 12.08.53. [Abridgms Specifics. of Invents. Group XIX, 297 (англ.)]

Пересчетная схема с электроннолучевой трубкой с четырьмя коллекторами. Луч проходит через отверстия в первом коллекторе и попадает на второй. Под действием отрицательных импульсов луч занимает ряд последовательных положений, в которых удерживается за счет связи второго коллектора с отклоняющими пластинами. На 7-м импульсе луч попадает на электрод, эмиттирующий вторичные электроны, которые попадают на третий коллектор. Вторичные электроны будут разряжать конденсатор, соединенный с отклоняющей пластиной, при этом луч сойдет с электрода со вторичной эмиссией, и потенциал третьего коллектора резко возрастет. Этот положительный импульс передается на отклоняющие пластины и отклоняет луч в начальное положение, а отрицательный импульс от электрода со вторичной эмиссией запирает ток на время обратного хода. И. В. Соловьев

7785 П. Вычислитель квадратного корня. Бердже р, Аллен (Square root computer. Berger France B., Allen James S.) [United States of America as represented by the Secretary of the Navy]. Пат. США 2702857, кл. 250—27, 22.02.55

Электронная схема для извлечения квадратного корня. У двух пентодов запараллелены все электроды,

кроме управляющих сеток, из которых одна находится под постоянным напряжением смещения, а вторая питается от задающего усилителя. Управление током через получающуюся «двухтактную» схему осуществляется с помощью третьего пентода, включенного последовательно в цепь катодов, на управляющую сетку этого пентода подается сигнал. Выходное напряжение на объединенном катоде двух пентодов приблизительно пропорционально квадратному корню из величины напряжения входного сигнала.

В. К. Зейденберг

7786 П. Устройства для приема кода (Code following devices) [McKenzie and Holland (Australia) Pty. Ltd]. Австрал. пат. 158601, кл. 99.2; 05.5; 04.7, 16.09.54

Спусковая схема на двух магнитных усилителях. Усилители блокируются через двухполупериодные выпрямители. Схема снабжена выходным трансформатором и может использоваться как приемник кода, в частности в системах кодовой автоблокировки на железных дорогах. Г. Н. Поваров

7787 П. Импульсно-чувствительная схема. Уингер, Феммер (Peak sensing circuit. Winger Wayne D., Femmer Max E.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2695992, кл. 340—174, 30.11.54

Схема, формирующая короткие импульсы синхронно с положительными и отрицательными пиками колебаний, записанных на магнитной ленте. А. И. Щуров

7788 П. Электрическое переключательное устройство для накопления информаций. Райт, Оделл (Elektrisk kopplingsanordning för ackumulering av informationer. Wright E. P. G., Odell A. D.) [Standard Telephones and Cables Ltd]. Швед. пат. 148783, кл. 42 m: 14, 8.02.55

Запоминающее устройство, хранящее вместе с текущей двоичной информацией несколько ее предшествующих состояний. Каждое состояние хранится в особой ступени устройства, и при каждом поступлении новой информации в начальную ступень каждая ступень передает свою прежнюю информацию следующей ступени. Приводимая схема содержит трохотрон и ламповые каскады. Г. Н. Поваров

7789 П. Перфоратор, управляемый от перфоленты. Гертман (Tape controlled column by column card punch. Ghertman Ioino) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2711794, кл. 164—115, 28.06.55

Приспособление к перфоратору, позволяющее вести перфорацию автоматически с помощью телетайпной перфорированной ленты. Механизмы перфоратора (подача карт, транспорта и перфорации) аналогичны соответствующим механизмам репродуктора. Пробивки в ленте воспринимаются щетками и передаются в виде электрических сигналов на магниты механизма перфорации перфоратора. Механизм перфорации пробивает в карте отверстия, соответствующие цифрам, пробитым в ленте. Е. Н. Маквецов

7790 П. Статистическая машина, управляемая перфокартами. Гатридж (Medelst registerkort styrbar statistikmaskin. Guttridge E. J.) [Powers-Samas Accounting Machines Ltd]. Швед. пат. 148177, кл. 43 a: 41/03, 21.12.54

Устройство, автоматически прерывающее работу счетно-аналитической машины на время выемки перфокарт из магазина. Рука оператора, попадая в магазин, сдвигает особый орган, управляющий выключением машины; после выемки пружина возвращает орган в исходное положение и машина автоматически включается. Г. Н. Поваров

7791 П. Механизм отделения запятой дестичных знаков в произведении. Реппперт (Decimal point mechanism. Reppert Richard V.). Пат. США 2673684, кл. 235—63, 30.03.54

Механическая счетная машина имеет в каждом разряде счетчика указатель. В зависимости от количества десятичных знаков во множимом и множителе поднимается один из указателей в счетчике результатов, показывая количество десятичных знаков в произведении. Е. Н. Маквецов

7792 П. Устройство сравнения чисел для вычислительных или подобных машин. Эстран (Number comparing device for accounting or similar machines. Estrems Eugeni) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2700756, кл. 340—149, 25.01.55

Устройство предназначено для сравнения десятичных чисел, набранных на двух регистрах клавишной или другой электромеханической машины, с целью выявления ошибки в наборе в случае несовпадения набранных чисел. В. К. Лаут

7793 П. Электронное арифметическое устройство для приема и суммирования чисел в двоичной системе счисления, предназначенное для бухгалтерских или вычислительных машин. Кнутсен (För bokförings-eller räknemaskiner avsett elektroniskt räkneverk för mottagning och summering av tal i det binära talsystemet. Knutsen K. A.) [Co. des Machines Bull]. Швед. пат. 148873, кл. 42 m: 14, 15.02.55

Электронный двоичный сумматор параллельного типа с двумя триггерами в каждом разряде. Один триггер осуществляет суммирование импульсов слагаемых и импульса переноса из предыдущего разряда, другой посылает импульс переноса в следующий разряд. Сумма считывается с первых триггеров разрядов. Г. Н. Поваров

7794 П. Вычислительная машина (Regnemaskine) [Bell Punckh Co. Ltd]. Датск. пат. 78431, кл. 42 m—26, 15.11.54

Клавишная суммирующая машина с механизмом, запирающим клавиатуру при неполном нажатии клавиши. Г. Н. Поваров

7795 П. Шаговый механизм для перемещения наборной каретки в десятиклавишной суммирующей машине. Фриберг, Дейл (Cycle initiating mechanism for ten key machines. Frieberg Nelson R., Dale Paul A.) [The National Cash Register Co.]. Пат. США 2675960, кл. 235—60, 20.04.54

Для перемещения наборной каретки в суммирующей машине служит ряд выдвижных упоров наборной каретки. При нажатии любой цифровой клавиши очередной упор опускается и пропускает наборную каретку на следующий разряд. Е. Н. Маквецов

7796 П. Механизм для умножения сокращенным методом. Людфош (Multiplier control mechanism for short cut multiplication. Lydfors John). Пат. США 2706082, кл. 235—79, 12.04.55

Оригинальный механизм множителя, управляющий умножением сокращенным методом. Установка множителя производится на барабанах, сидящих на общей оси. В каждом барабане прорезан фигурный паз, имеющий 4 площадки. Площадки соответствуют цифрам 0,1—5,6—8 и 9. В зависимости от установленной в каждом разряде цифры ролик в пазу встает в одно из 4 возможных положений и производит соответствующее включение реверса счетчика произведения и транспорта каретки. Механизм может быть применен в любой счетной машине. Е. Н. Маквецов

7797 П. Счетная машина с печатью буквенного текста. Шарп (Combined typewriting and accounting machine. Sharpe Arthur H.) [Underwood Corp.]. Пат. США 2707076, кл. 235—60.12,26.04.55

Счетная машина со встроенной текстовой клавиатурой. В машине очень компактно размещены механизмы

пишущей машинки, наборная каретка и счетные механизмы. Печать текста и набор чисел производится с помощью мотора посредством ребристого валика. Печать итогов автоматическая. Е. Н. Маквецов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

7798. Разработка фирмой Е. М. I. станков, управляемых вычислительными машинами (E. M. I. developments in computer-controlled machine tools), Machinery (London), 1955, 87, № 2226, 144—150 (англ.)

Описываются работы фирмы EMI по созданию станков, управляемых вычислительными машинами.

Первоначальные опыты проводились с вертикально-фрезерным копировальным станком № 2 фирмы «Цинциннати» для фрезерования плоских профилей и кулачков. Позднее фирма приспособила для управления при помощи вычислительной машины подобный же станок с электронной следящей системой фирмы «Рисёрч Энджинирс» (Research Engineers, Ltd). Главным изменением в станке является замена стола с копиром управляющим блоком с вычислительной машиной. При этом движение ощупывающего штифта, который раньше перемещался при помощи копира, задается механизмом, связанным с вычислительной машиной.

Вычислительная машина состоит из устройства, считывающего информацию с перфоленты, релейного запоминающего устройства для хранения информации до прохождения следующего ряда отверстий на ленте, устройства для преобразования полученной информации в соответствующее напряжение. Для правильного движения инструмента в течение времени между считыванием двух соседних рядов ленты может быть применена либо линейная интерполяция, либо параболическая (в этом случае релейное запоминающее устройство хранит информацию о трех точках). Параболическая интерполяция осуществляется при помощи параболического моста, схема которого приводится. В машине для ввода информации применяется бумажная лента шириной 70 *мм*, на которой в одном ряду располагаются 4 двоично-кодированных десятичных числа. Набивка ленты производится на перфораторе суммирующей машины, из которой удален суммирующий механизм, одновременно с набивкой ленты производится печатание исходных данных. Все устройство имеет размеры 60×60×180 *см*. Приведены фотографии различных узлов устройства и устройства в целом.

В. Д. Князев

7799. Применение вычислительной техники и электроники в производстве. Б у т (The computer — electronics'contribution to production. B o o t h R. H.), Engineer, 1955, 199, № 5187, 887 — 889 (англ.)

Рассматриваются простейшие случаи применения электроники в промышленности, например применение игнитронов для создания мощного кратковременного импульса тока при электросварке, регулирование температуры в печи и т. п. Приводится электромеханическая схема управления процессом производства плоских кулачков по шаблону на копировальном фрезерном станке. Описывается система программного управления тем же станком. Данные, задающие последовательность дискретных точек обрабатываемого контура кулачка, выбираются с перфоленты и преобразуются в напряжения для управления соответствующими моторами. Приведена блок-схема последнего улучшенного варианта системы управления. Данные, поступившие с ленты и относящиеся к трем последовательным точкам контура кулачка, запоминаются в 3 релейных запоминающих устройствах. На выходе каждого запоминающего устройства появляются напряжения, пропорциональные координатам точек. Напряжения подаются на параболический мост, движок которого приводится в движение от механизма протяжки перфоленты. Таким образом напряжение, снимаемое с движка, плавно изменяясь, проходит опорные значения, соответствующие координатам выбранных точек. В результате интерполяции 3 опорные точки обрабатываемого профиля соединяются плавной кривой. Дается краткое сравнение систем непрерывного и цифрового управления. Приводятся общие рассуждения об операциях, которые должна выполнять вычислительная машина в предполагаемой автоматической фабрике. См. также реф. 7798.

В. В. Карибский

7800. 200-тонный фрезерный станок управляется электроникой (Convair's 200-ton milling machine run by electronic control), ISA Journal, 1955, 2, № 7, 12A (англ.)

Сообщение отделения «Конвейер» фирмы «Дженерал Динамикс» (Convair Division of General Dynamics Corp.) о постройке 200-*т* фрезерного станка с электронным управлением. Станок будет построен за 18 месяцев. Электронная управляющая система основывается на разработках Массачусетского технологического института. Вычислительная машина будет преобразовывать информацию об изделии и записывать ее на магнитную ленту, которая через специальные устройства будет давать команды на механизмы движения 6-*м* постели, поворотного стола и 4 режущих головок. Магнитная лента может быть введена не только в общее устройство управления, но также и в любое из устройств, управляющих отдельными движениями машины.

В. Д. Князев

7801. Отверстия управляют станками (Holes control machine tools), Mach. Desing, 1955, 27, № 9, 27—28 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о разработке нового автоматического устройства для управления металлорежущими станками при помощи перфокарт. Устройство может быть применено для управления фрезерными, сверлильными, расточными и токарными станками, а также дыропробивными прессами и механическими ножницами.

Перфокарты приготавливаются на стандартном оборудовании. Информация пробивается в десятичной форме. Каждая карта содержит указания для одной операции.

При работе станка группа карт помещается в читающее устройство и прочитывается последовательно одна за другой. Станок в той же последовательности автоматически выполняет заданные операции.

В. Д. Князев

7802. Статистические вычислительные машины, применяемые для управления производством. Х а р г и н с (Statistical computers as applied to industrial control. H u g g i n s P.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, 14, № 7, 309—321 (англ.)

В современном массовом производстве широко применяется метод статистического контроля качества деталей и хода производственного процесса. Функции человека, наблюдающего за производственным процессом, заключаются в измерении в определенные промежутки времени ряда образцов изделий, изучении отклонений размеров деталей от номинала и внесении исправлений в производственный процесс. Машины для статистического контроля должны быть специально приспособлены для работы в производственной линии и выполнения тех же функций, которые выполняет обычно контролер. При измерениях ориентируются на среднее арифметическое значение измеряемой величины.

Приводится примерная блок-схема статистической вычислительной машины для производственного кон-

троля. Машина включает в себя измерительное устройство, определяющее физические размеры изделия; преобразователь, преобразующий механические величины измерений в электрические сигналы; устройство, отсчитывающее количество деталей, через которое производится считывание информации машиной; устройство, определяющее ошибку, которое выдает, в соответствии со входными данными, один из трех сигналов: положительная ошибка, отрицательная ошибка, отсутствие ошибки; вычисляющая часть машины, имеющая запоминающее устройство для запоминания ошибок и дающая их алгебраическую сумму, к ней относится так же схема компенсации люфта; устройство, останавливающее вычисления на некоторое время после внесения исправления в производственный процесс. Приводится схема и описание емкостных запоминающих устройств с использованием реле или ламп и запоминающего устройства, использующего декатрон. Подобная система может быть снабжена также самописцами, механизмом для удаления изделий с очень большими отклонениями и т. д.

Описывается устройство управления машиной для покрытия электрического кабеля пластическими материалами. Эта система разработана фирмой «Саргров Электроникс» (Sargrove Electronics, Ltd). Внешний диаметр кабеля, который должен удерживаться в узких пределах, зависит от различных факторов: скорости подачи пластического материала, температуры камеры сжатия, скорости тянущего кабестана и т. д. Для измерения диаметра кабеля имеется устройство со штифтом, связанным с кварцевым генератором. Перемещение штифта меняет частоту генератора. Частотный дискриминатор выдает напряжение, пропорциональное изменению частоты, а следовательно, и отклонению штифта от среднего положения. Измерительная головка устанавливается в таком месте, где уже не происходит изменений в диаметре кабеля. В одном из практических случаев она отстоит от выхода машины на 32 *м*. При скорости 325 *м/час* измерение производится через 6 мин. после покрытия кабеля пластическим материалом. Система имеет импульсный генератор, который выдает импульсы с частотой, пропорциональной скорости вытяжки. Любая ошибка на участке между двумя импульсами определяется статистическим анализатором как ошибка на участке длины. Если число участков с ошибками превысит допустимое, включается устройство коррекции производственного процесса. После введения исправления в процесс статистический анализатор устанавливается на «0» до тех пор, пока не пройдет участок, находящийся к моменту коррекции между выходом машины и измерительной головкой.

Этой же фирмой разработано устройство, контролирующее вес порций теста в крупных пекарнях. Устройство включает в себя быстродействующий весовой механизм, оптический преобразователь и статистическую вычислительную машину, управляющую размером формы. Вес каждого куска определяется как нормальный, легкий, тяжелый, очень легкий и очень тяжелый, причем куски с двумя последними характеристиками удаляются с конвейера.

В. Д. Князев

7803. Автоматическое управление станком (Automatic machine-tool control), Wireless World, 1956, 62, № 2, 66 (англ.)

Сообщение фирмы EMI о моделирующем устройстве, используемом для управления фрезерным станком.

А. Б. Залкинд

7804. Удивительные машины, которые упрощают полет. Уолс (The amazing machines that simplify flying. Waltz George H., Jr), Popul. Sci., 1955, **166**, № 1, 102—105, 256 (англ.)

Описываются некоторые типы автоматических счетно-решающих устройств, которые устанавливаются на самолетах транспортной авиации США.

Аэронавигационная система «Polar Path» фирмы «Бендикс» (Bendix Aviation) является примером системы с кнопочным управлением, которая дает возможность осуществлять самолетовождение в высоких широтах, где обычные компасы не работают.

На транспортных самолетах устанавливается также визуальное аэронавигационное счетно-решающее устройство. В этом устройстве маршрут полета отмечается стрелкой индикатора на карте.

Недавно опубликованы сведения об автоматическом программном селекторе AMSS (Automatic Master Sequence Selector), который дает возможность выполнить взлет, полет по маршруту, заход на посадку и приземление. Программа полета набивается на перфоленту. Когда лента пропускается через селектор, 430 штифтов в определенной последовательности входят в отверстия на ленте и замыкают электрические цепи, которые приводят в действие автопилот, аэронавигационное счетно-решающее устройство, систему управления дросселем, посадочные устройства. Хотя программный селектор обеспечивает управление без помощи человека, предусматривается, что летчик может в любой момент взять управление на себя. Ю. И. Кириленко

7805. Применение электронных моделирующих устройств при разработке систем управления полетом самолета. Монро (Application of electronic simulation techniques to the development of airplane flight control systems. Monroe W. R.), Preprints Ann. Meeting Inst. Aeronaut. Sci., 1955, № 538, 12 pp., 21 figs (англ.)

В настоящее время электронные моделирующие устройства широко применяются в авиационной промышленности США на всех этапах конструирования системы управления самолетом. Вначале на основе требований заказчика проводится предварительный анализ, имеющий целью определение структуры системы. После этого система исследуется на электронном моделирующем устройстве. В результате моделирования определяются параметры отдельных элементов системы. По окончании конструирования и производства система управления монтируется в лаборатории на специальной раме и соединяется с электронной моделью самолета. Отклонения органов управления преобразуются в электрические сигналы и вводятся в моделирующее устройство. С выхода этого устройства в систему управления подаются сигналы, характеризующие реакцию самолета на действие органов управления. Последний этап моделирования заключается в исследовании действия системы совместно с рулями реального самолета. Для этого рама с системой устанавливается рядом с самолетом, а органы управления соединяются с соответствующими рулями, которые подвержены действию имитируемых аэродинамических сил. Напряжения, пропорциональные отклонению рулей, подаются на вход моделирующего устройства, выход которого соединяется с реальными измерительными приборами. По окончании моделирования в лаборатории проводятся испытания системы управления в полете.

В качестве примера рассматривается синтез системы управления продольным движением самолета.

В процессе конструирования систем управления самолетом электронные моделирующие устройства применяются также и для воспроизведения возможных отказов отдельных звеньев (обрыв трубопроводов гидравлической системы, повреждения электрической сети и др.).

Моделирование ускоряет разработку и производство систем управления, сводит к минимуму ошибки во

время летных испытаний реальных конструкций. Ю. И. Кириленко

7806. **«Новый» Отдел усовершенствования аэронавигационных средств может быть ключом к прогрессу** («New» ANDB may be key to progress), Aviat. Week, 1954, 60, № 11, 125—132, 135 (англ.)

Сообщается о проблемах в области управления движением самолетов в воздухе, требующих скорого разрешения. В последнее время в США проводится работа по согласованию системы всенаправленных маяков и радиодальномерного оборудования (VOR/DME), используемой в гражданской авиации, с тактической аэронавигационной системой «Такан» (Tacan), применяемой в военной авиации. Система всенаправленных маяков и радиодальномерного оборудования имеет 100 каналов связи, разделенных интервалом в 2,5 *Мгц*. В системе «Такан» 126 каналов с интервалом в 1 *Мгц*. Сеть станций «Такан» на территории США по существу дублирует работу гражданской системы. Для того чтобы военные самолеты могли пользоваться обеими системами, на самолете необходима установка аппаратуры обеих систем. Осуществить это обычно бывает невозможно из-за ограниченности места на многих военных самолетах, например на истребителях-перехватчиках. Решением проблемы объединения радионавигационных систем занимается вновь созданный Отдел усовершенствования аэронавигационных средств (Air Navigation Development Board — ANDB).

Другая проблема состоит в создании радиолокатора для разведки погоды. В решении этой задачи конкурируют фирма RCA, которая конструирует радиолокатор с длиной волны 5,7 *см*, и фирма «Бендикс» (Bendix Radio), усовершенствующая радиолокатор с длиной волны 3,2 *см*.

Сообщается, что для облегчения связи с самолетами разработана селективная переговорная система «селкал» (selcal), которая дает возможность вызвать нужный самолет нажатием кнопки.

Ряд проблем связан с управлением движением самолетов в районе аэродрома. Наиболее удобно управлять самолетами на подходах к аэродрому при помощи обзорных радиолокаторов. Широкое применение радиолокаторов в Вашингтонском центре управления движением самолетов позволило сократить интервал между приземляющимися самолетами и уменьшить опоздание при выходе на аэродром. Радиолокаторами оборудованы центры в Нью-Йорке, Чикаго, Лос-Анжелосе. Однако все эти центры не имеют еще дальних обзорных радиолокаторов. Поэтому для управления движением самолетов на дальних подступах к аэродрому используются схемы с периферическими связями, при которых радиолокационные установки выносятся на 75—100 миль от соответствующих центров. Связь радиолокационной установки с центром осуществляется по телефонной линии. Применение схемы с периферическими связями увеличивает емкость центра на 18—25%. Ю. И. Кириленко

7807. **Моделирующие устройства полета — средства изучения для инженера и аппараты для тренировки летчиков. Тренажер для вертолета Саралек-Доран. Дюсайи** (Les simulateurs de vol—moyens d'étude pour l'ingénieur, appareils d'entraînement pour le pilote. Le simulateur pour hélicoptère Sirelec-Dorand. Dusailly J.-F.), Ingrs et techniciens, 1955, № 78, 3, 5 (франц.)

Описывается тренажер для вертолета DX50. Моделирующее устройство тренажера представляет собой вычислительное устройство непрерывного действия, содержащее 240 электронных ламп и электромагнитные исполнительные двигатели. Моделирующее устройство позволяет исследовать поведение вертолета при управлении летчиком и автопилотом. Тренажер DX50 был использован для выбора параметров системы управления и аэродинамических коэффициентов при конструировании нового вертолета типа 3130. Характер движения местности под вертолетом при различных воздействиях летчика на органы управления имитируется путем проектирования рисунка местности на экран, помещенный под кабиной тренажера. Проекция местности может смещаться как в продольном, так и в поперечном направлениях. Изменение высоты полета имитируется уменьшением масштаба изображения местности. Сообщается, что тренажер DX50 дает возможность при обучении одного летчика сократить на 30% количество летного времени. Ю. И. Кириленко

7808. **Уши для вычислительных машин. Дейвид** (Ears for computers. David Edward E., Jr), Scient. Amer., 1955, 192, № 2, 92—96, 98 (англ.)

В общих чертах описывается машина «Аудри» (Audrey), распознающая человеческую речь (РЖМат, 1953, 996). Машина довольно точно определяет слово, когда «слышит» своего конструктора, речь которого использовалась как эталонная, и ошибается на 10—30%, когда «слышит» другие мужские голоса. Машина плохо реагирует на оттенки речи и ошибается при распознавании слов, близких по звучанию. Указывается, что надежность распознавания может быть повышена при рассмотрении элементов в их фонетическом контексте. Подобная машина может быть использована для сжатия полосы речи при передаче и увеличения пропускной способности многоканальных линий связи. А. И. Щуров

7809. **Уши для вычислительных машин. Дейвид** (Ears for computers. David Edward E., Jr), Res. Engr, 1955, 10, № 3, 3—8 (англ.)

Описываются устройства, расшифровывающие человеческую речь, разработанные фирмой «Белл Телефон».

7810. **Описание и конструкция электронного тахометра. Дюжарден, Уайо, Мари, Симон** (Étude et réalisation d'un tachymètre électronique. Dujardin Ignace, HoyauxMax, MaryMarcel, Symon Emile), Rev. Gen. electr., 1953, 62, № 4, 191—197 (франц.)

Описывается электронный тахометр, применяемый для контроля небольших многосерийных электрических моторов, в случаях, когда механический тахометр неприменим ввиду незначительной мощности этих моторов и когда измерение должно быть произведено в очень короткое время. Этот тахометр автоматически показывает среднюю скорость в интервале измерения с точностью до 0,01. Описываются различные части тахометра: счетчик импульсов, считаемых в продолжение определенного промежутка времени, цепи генератора импульсов, электронный прерыватель и часовой механизм, цепь формирования импульсов, электронный счетчик, генератор управления и т. д.

7811. **Определение кратчайших расстояний при помощи счетной машины. Ланг** (Дискуссия) (Computation shortcuts by calculating machine. Lang J. Howard), Surveying and Mapping, 1954, 14, № 4, 497—498 (англ.)

Дискуссия по статье Вейссенстейна (РЖМат, 1956, 2613). Кратко описываются некоторые детали метода расчета траверсы шоссе. В. Д. Князев

7812 П. **Лампа для измерения излучения и метод ее изготовления. Вармольц, Ратенау** (Strålningsräknerör och förfarande vid tillverkning av sådant. Warmoltz N., Rathenau G. W.) [N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken]. Швед. пат. 147695, кл. 21 д: 18/01, 16.11.54

Счетчик Гейгера — Мюллера. Газ содержит примесь галогена. Поверхность металлических частей, соприкасающихся с газовой смесью, хромирована. Г. Н. Поваров

7813 П. Электронный регулятор температуры. Шанк, Браун (Electronic temperature regulator. Shank Clifford A., Brown Norman M., Jr), [The Garrett Corp.]. Пат. США 2703679, кл. 236—9, 8.03.55

Прибор состоит из мостика, сигнал от которого через усилитель действует на регулирующий орган.

И. В. Соловьев

См. также: 7164, 7563, 7672, 7679, 7689

НОВЫЕ КНИГИ, ПОЛУЧЕННЫЕ РЕДАКЦИЕЙ

Теория связности в целом и групп голономии. Лихнерович (Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie. Lichnerowicz Audré. Paris, Dunod, 282 p.) (франц.)

Иррациональные числа. Нивен (Irrational numbers. Niven Ivan. Math. Assoc. America, 1956, 164 p., 3 doll.) (англ.)

Лекции о топологических основах теории аналитических функций 2-е дополн. изд. Стоилов (Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. 2e ed. augm. Stoilow S. Paris, Gauthier-Villars, 1956, 17, 194 p.) (франц.)

Техническое приложение логики. Туше (Les applications techniques de la logique. Touchais. Paris, Dunod, 1956, 82 p., ill.) (франц.)

Умственная работа. Шпейзер (Die geistige Arbeit. Speiser Andreas, Basel-Stuttgart Birkhäuser, 1955, 208 S., ill., 19.25 DM) (нем.)

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Адян С. И. 7169
Альпер С. Я. 7278
Альтман М. 7665
Андреев А. Ф. 7329
Аржаных И. С. 7350
Артюховская А. Г. 7562
Ашневиц И. Я. 7272

Б

Бајшански Б. 7427
Башкиров Д. А. 7378
Беднягин Ф. В. 7346 Д
Берикашвили Н. А. 7246 Д
Берман С. Д. 7133, 7136
Беспамятных Н. Д. 7053, 7061
Бојанић Р. 7427
Борисов Ю. Ф. 7586
Борок В. М. 7355
Борсук К. 7234
Будак Б. М. 7374
Быкова Т. А. 7062 К
Бюлер Г. А. 7381

В

Важевский Т. 7044
Выгодский М. Я. 7539
Выханду Л. К. 7702 Д

Г

Гейдельман Р. М. 7599
Глускин Л. М. 7161
Гоми 7423 К
Гончаров В. Л. 7308 К
Горшков Д. С. 7079
Гохберг И. Ц. 7386
Гребенюк Д. Г. 7655
Грушецкий А. В. 7697 К
Гудков Д. А. 7571
Гуль И. М. 7354
Гуревич М. М. 7062 К
Гутенмахер Л. И. 7672
Гэн Цзи 7100

Д

Денисюк А. И. 7703 Д
Джрбашян М. М. 7277
Дикий Л. А. 7339
Добрушин Р. Л. 7478

Е

Еремин С. А. 7297
Ефимов Н. В. 7632

З

Зельцман В. Б. 7540
Земба А. 7529

И

Ивакири 7418 К
Иванов С. 7694 К
Ильин А. М. 7358
Иноуэ 7416 К

К

Кавано 7244 К
Каган Б. М. 7376
Каган В. Ф. 7561 К
Казачков Б. В. 7148
Каліновська С. С. 7649
Карабанов В. А. 7375
Кармишин А. В. 7101
Кардивадзе 7407 К
Ким Сон Лён 7673
Кито 7692 К
Киш О. 7314 Д
Клабукова Л. С. 7672
Коган Б. М. 7376
Кононенко В. О. 7325, 7326
Коровин В. И. 7592
Косинский А. 7234
Костюченко А. Г. 7356
Коубек Л. 7373
Круг Е. К. 7377
Крушевский А. Е. 7722
Крючин А. Ф. 7366
Кузьминок Г. К. 7672
Куратовский К. 7038, 7225
Куфарев П. П. 7285
Кухта Г. П. 7635

Л

Лабутин Д. Н. 7105
Лага Р. Г. 7502
Ладыженская О. А. 7371
Лебедев Н. А. 7286
Левин В. И. 7103
Лёфгрен Л. 7719
Ли Ён Фир 7268
Лось Е. 7067
Лу Ци-кэн 7274
Лю Чхун Хо 7690
Лянце В. Э. 7372
Лян Цзин-цзюй 7404

М

Малахов Н. А. 7766
Мальцев А. И. 7204
Мандельштам Л. И. 7384 К
Манолов С. 7549 К
Мацухара 7547 К
Микеладзе Ш. Е. 7321
Минина О. М. 7377
Минков Н. 7411 К
Мирошниченко Б. Я. 7766
Мура 7421 К

Н

Нагаева В. М. 7052
Неванлинна Р. 7313 К
Никулин Н. А. 7669
Нужин М. Т. 7298
Нэгоро 7699 К

О

Оганесян В. А. 7195
Оти 7109

П

Пань Цзя-чжэн 7640
Песин И. Н. 7315 Д
Пејовић Т. 7419 К
Петров Г. 7565 К
Постников М. М. 7237
Привалов И. И. 7553 К

Р

Рашевский П. К. 7608
Решетняк Ю. Г. 7104
Риекстыньш Э. Я. 7441
Розовский М. И. 7382
Рывкин М. С. 7532

С

Сапогов Н. А. 7480
Сасабе 7422 К
Сафронова Г. П. 7271
Сахаров Н. В. 7320
Сенютович В. А. 7545
Симонов Н. И. 7051
Спномия 7109
Скоробогатько В. Я. 7360
Соколов Н. П. 7570
Спивак М. А. 7615 Д
Сушко Р. 7067

Т

Терских В. П. 7385 К
Трохимчук Ю. Ю. 7301
Тумаркин Г. Ц. 7296
Тумашев Г. Г. 7298
Турковский В. А. 7633

У

Улина Г. В. 7272
Уфлянд Я. С. 7380

Ф

Фейгин И. М. 7695 К
Фудзимори 7417 К

Х

Халилов З. И. 7368
Хапланов М. Г. 7324
Харадзе 7407 К
Хведелидзе 7407 К
Хирано 7415 К

Ч

Чао Т. И. 7292
Челидзе 7407 К
Чернов Е. И. 7323
Чжан Мин-юн 7300
Чжан Сяо-ли 7276

Ш

Шерман Д. И. 7390
Шингуров О. П. 7544
Ширшов А. И. 7203
Шнеерсон М. С. 7316 Д
Шуликовский В. И. 7589

Э

Эйдус Д. М. 7338
Эскин Л. Д. 7670

Ю

Юдицкий М. М. 7563
Юсупов К. Ю. 7388
Юшков П. П. 7657

Я

Яворовский И. В. 7233
Ямадзаки 7443
Ян Хай-янь 7400

A

Abdel-Aty S. H. 7508
Adamson I. T. A. C. 7249 Д
Agent R. 7696 К
Agnew P. L. 7691 К
Alda V. 7482
Allen J. S. 7785 II
Allen W. 7705
Allendoerfer C. B. 7048 К
Altman M. 7665
Andreian Cazacu C. 7304
Antosiewicz H. A. 7108
Arend S. 7662, 7685
Atiyah M. F. 7606

Babuška I. 7365
Baiada E. 7393
Baker C. C. Th. 7698 К
Barbălat I. 7330, 7333
Barner M. 7584
Barrett J. H. 7337, 7387
Bartle R. G. 7469
Bartlett M. S. 7493
Basu D. 7516
Bauer F. L. 7158, 7159, 7674
Bauer R. K. 7507
Békéssy A. 7693 К
Bell P. O. 7558
Bellman R. 7113, 7527
Benedicty M. 7117, 7118
Beresford R. S. 7530
Berger F. B. 7785 II
Berghuys J. J. W. 7536
Bhatnagar K. P. 7442
Bieberbach L. 7310 К
Billing H. 7715
Billings J. H. 7767
Birkhoff G. 7353
Bishop A. S. 7782 II
Bîtea I. 7413 К
Blackman J. 7514
Blair R. L. 7212
Blij F. van der 7111
Blum E. K. 7466
Boccioni D. 7207
Bodewig E. 7115
Bol G. 7591
Bononcini V. E. 7361
Bonsall F. F. 7450, 7451, 7452
Booth R. H. 7799
Borel A. 7242
Borsuk K. 7223
Bostrŏm L. 7747
Bott R. 7240
Bouligand G. 7045
Box G. E. P. 7522
Bradburn J. R. 7738
Brauer R. 7127
Brayer H. O. 7707
Breen J. M. 7773
Brelot M. 7306
Briquet A. 7569
Brown N. M., Jr 7813 II
Brownell F. H. 7459
Büchi J. R. 7153
Burgerhout Th. J. 7114
Burniat P. 7575, 7577
Burr I. W. 7520

C

Cagle W. R. 7050
Calvo Carbonell C. 7667, 7668
Campbell L. L. 7369
Campbell R. 7343 К
Cantoni L. 7560
Capecchi W. 7660
Carlitz L. 7086, 7091
Cerrillo M. 7403
Chapin N. 7736
Chaput I. 7568 К
Cheng H. K. 7299
Chow Hung Ching 7262
Clauser E. 7379
Clunie J. 7289, 7290
Cochran W. G. 7524
Coddington E. A. 7345 К
Cohen E. 7077
Cohn R. M. 7208
Collatz L. 7636
Colombo S. 7444
Conforto F. 7120
Constantinescu-Cătuneşti S. 7639
Conti R. 7341
Corduneanu C. 7317
Coxeter H. S. M. 7232
Craemer H. H. 7647
Crosman L. P. 7779 II
Curry H. B. 7712
Cuzzer O. 7058
Cvetkov B. 7663

D

Dale P. A. 7795 II
Dalen K. 7176
David E. E., Jr 7808, 7809
Davis D. T. 7781 II
Debrunner H. 7252
Deemer W. L., Jr 7525
Delange H. 7401, 7402
Delerue P. 7446 К
Denjoy A. 7254, 7257
Dennis S. C. R. 7322
Des Raj 7488
Dickinson A. H. 7780 II
Dieudonné J. 7154
Dingle R. B. 7675
Dommanget J. 7684, 7686
Dowker Y. N. 7474
Ducrocq A. 7771, 7772
Duff G. F. D. 7359
Dujardin I. 7800
Dunford N. 7476
Dungen F. H. van den 7641
Dunnett C. W. 7513
Duparc H. J. A. 7087
Durand D. 7497
Durand E. 7370
Dusailly J. F. 7807
Duschek A. 7556, 7557
Dye H. E. 7460

E

Eckert O. 7756
Eda Y. 7090
Edwards D. A. 7458
Edwards R. D. 7247 Д
Edwards R. E. 7467
Eggleston H. G. 7295, 7629
Ehrenpreis L. 7396, 7471
Ehrhart E. 7405
Ehrlich G. 7216 Д
Engel W. 7573
Enomoto S. 7255
Epstein B. 7519
Epstein H. 7754
Epstein M. P. 7209
Erdös P. 7251, 7256
Estrems E. 7792 II
Ettlinger H. J. 7357
Eweida M. T. 7275

F

Fairthorne R. A. 7716
Farinelli U. 7071
Faucett W. M. 7172
Femmer M. E. 7787 II
Ferra C. M. 7583 К
Fettis H. E. 7659
Fichera G. 7349
Fiedler M. 7671
Fine N. J. 7468
Fleming H. M., Jr 7778 II
Flett T. M. 7283
Ford L. R., Jr 7228
Foster A. L. 7213
Fountain L. L. 7731
Fowler K. A. 7127
Franceschi O. 7574
Freilich G. 7253
Frenkian A. 7060
Frenkiel F. N. 7511
Freudenthal H. 7617, 7620
Frieberg N. R. 7795 II
Friedlander P. H. 7689
Frühauf H. 7746
Fryer K. D. 7622
Fuchs L. 7142
Fuchs W. H. J. 7279
Fuller F. B. 7250 Д

G

Gabriel R. M. 7280
Gaeta F. 7581
Gamba A. 7071
Gant P. 7537
Garabedian P. R. 7281
Gatteschi L. 7428
Georgev G. 7652
Gergely E. 7576
Germay R. H. 7351
Geymonat L. 7243
Gherardelli F. 7123, 7578
Ghertman I. 7789 II
Ghika Al. 7155, 7156, 7193
Ghurye S. G. 7495
Gillis J. 7481
Gillman L. 7259
Glicksberg I. 7527
Godeaux L. 7319, 7595
Goldhagen E. 7348
Golomb M. 7256
Good I. J. 7092
Goodstein E. 7094
Goto M. 7601
Gotô Y. 7603
Goudet G. 7439 К
Grauert H. 7307
Gravett K. A. H. 7229
Green J. A. 7129
Greenstadt J. 7110
Gregory R. T. 7646
Gregus M. 7334
Grenville-Wells H. J. 7658
Griffin H. 7099 К
Groot J. de 7224
Gross O. 7527
Grün O. 7147
Guérindon J. 7194
Gulland J. A. 7526
Gurland J. 7484
Guttridge E. J. 7790 II

H

Halberstam B. 7075, 7076
Hall M. 7137
Halperin J. 7622
Hammersley J. M. 7486
Harley B. I. 7509
Harper H. D. 7691 К
Hassan Akbar—Zadeh 7604
Hastings C., Jr 7700 К
Haupt O. 7473
Havel V. 7567 К
Hayashi C. 7342 К
Hayman W. K. 7287
Heider L. J. 7463
Heinz E. 7596
Helgason S. 7470
Hellwig G. 7631
Henrici P. 7435
Henstock R. 7453
Herstein I. N. 7200
Hestenes M. R. 7645
Hewitt E. 7170
Hill I. D. 7487
Hiong King—Lai 7269, 7293
Hobbs L. C. 7783 II
Hobson E. W. 7436
Hochschild G. 7202
Hodge W. V. D. 7535
Hoeffding W. 7517
Hoel P. G. 7496
Hopkins W. A. 7731
Hopmann W. 7515
Hornich H. 7347
Hoyaux M. 7810
Hsu L. C. 7397
Huebsch W. 7235
Huggins P. 7802
Hunter J. S. 7522
Huppert B. 7138

I

Inagaki T. 7221
Ingraham R. L. 7612
Inkeri K. 7084

Ionescu Tulcea C. T. 7475
Isbell J. R. 7227
Iséki K. 7167
Ishihara S. 7607
Itô N. 7124, 7150
Ivan J. 7163

J

Jaeckel K. 7503
Jaeger J. C. 7447 К
Jakubík J. 7211
Jambunathan M. V. 7494
Jans J. P. 7217 Д
Jansson M. E. 7691 К
Jenkins J. A. 7284, 7302
Jenner W. E. 7184
Jonckheere A. R. 7518
Jones J., Jr 7116
Jongh B. H. de 7531
Jónsson B. 7210
Jowett G. H. 7491
Julia G. 7598 К
Jurchescu M. 7303
Jurkat W. 7426

K

Kadison R. V. 7462
Kalitzin G. St. 7143
Kamke E. 7260 К
Kampé de Fériet J. 7511
Kannenberg R. 7554 Д
Kanno K. 7392, 7425
Kanold H.-J. 7073
Karamata J. 7074
Karnaugh M. 7757
Katô T. 7328
Kaucký J. 7344 К
Keilson J. 7363
Keller O.-H. 7098 К, 7174
Keogh F. R. 7264
Klee V. L., Jr 7448
Kleene S. C. 7063
Knödel W. 7072
Knutsen K. A. 7793 П
Koch R. J. 7172
Kochendörffer R. 7139
Kochmański T. 7122
Koizumi S. 7263
Kokoris L. A. 7205, 7206
Kopal Z. 7701 К
Kroeger C. V. 7727
Krömer H. 7765
Kung Sun 7282
Kuniyoshi H. 7175
Kuntzmann J. 7676
Kunugi K. 7226
Kuratowski K. 7225
Kustaanheimo P. 7582
Kyle R. H. 7231

L

Laha R. G. 7485
Lamprecht E. 7180
Lang J. H. 7811
Lapidus L. 7215
Laue M. V. 7611
Lazard M. 7157
Leger G. F., Jr 7197
Lehmuskoski M. J. 7528
Lense J. 7437 К
Levinson N. 7345 К
Levitzki J. 7198
Löbell F. 7588
Löfgren L. 7718
Lokki O. 7270
Lombardo—Radice L. 7623, 7626
Loonstra F. 7146
Lorent H. 7541
Lorentz G. G. 7455
Lorch E. R. 7457
Loś J. 7067
Loud W. S. 7336
Love W. 7689
Lydfors J. 7796 П

M

McClung L. 7642
Macdonald N. 7704
McLachlan N. W. 7331
McLean D. 7160
Macon N. 7683
Macrobert T. M. 7433, 7434
Maharam D. 7477
Malbon W. E. 7248 Д
Mangio S. 7583 К
Mann H. B. 7499
Marcus F. 7593, 7597
Marquet S. 7391
Marriott F. H. C. 7515
Martin G. 7721
Marussi A. 7585
Mary M. 7810
Massey W. S. 7241
Masuda K. 7177
Masuyama M. 7483
Matsuyama N. 7265
Maurer I. 7149
Maxwell E. A. 7548 К
May M. 7775 П
Mayer—Kalkschmidt 7273
Mendes M. 7398
Menger K. 7619 К
Mersman W. A. 7677
Mihoc Gh. 7042
Mignot N. 7648
Miles E. P. 7429
Mills W. H. 7082
Mitsudo F. 7201
Mizuno K. 7239
Monroe W. R. 7805
Moore R. C. 7724
Mordell L. J. 7080
Morgenstern D. 7318
Moser L. 7089
Mosingiewicz K. 7654
Mukohda S. 7093

N

Nagai O. 7128
Nagata J. 7219, 7220
Nagata M. 7185, 7189
Nakaoka M. 7238
Nakayama T. 7196, 7199
Nalli P. 7609
Narayan S. 7550 К
Natucci A. 7054
Nelder J. A. 7486
Newell H. E. 7552 К
Newman M. 7179
Nicol C. A. 7085
Nicolau E. 7352
Nicolescu M. 7043
Nikodym O. M. 7182
Nitsche J. 7587
Nomizu K. 7605
Nordbotten S. 7492
Nordhaus E. A. 7215
Northcott D. G. 7186
Noshiro K. 7294
Numakura K. 7172

O

Oakley C. O. 7048 К
Odell A. D. 7788 П
Ogawara M. 7521
Orloff C. 7650, 7651
Osima M. 7130, 7134, 7191
Ostrom T. G. 7559
Ostrowski A. 7406 К, 7679
Otsuki T. 7602
Oxtoby J. C. 7251

P

Paasche I. 7095, 7681
Page E. S. 7534
Paige L. J. 7137
Palamà G. 7096
Paradine C. G. 7088
Parodi M. 7106, 7107
Pauc Ch. Y. 7473
Peck J. E. L. 7456
Pęczalski M. 7412 К
Penrose R. 7119
Peremans W. 7087
Perron O. 7097 К
Peston M. H. 7530
Peyerimhoff A. 7426
Phillips R. S. 7472
Piccard S. 7131, 7132
Pignedoli A. 7410 К
Pinl M. 7538
Pleijel A. 7362
Plessis N. du 7267
Poenaru V. 7594
Poli L. 7446 К
Pollard H. 7279
Pontrjagin L. Sz. 7245 К
Poots G. 7322
Pope J. A. 7515
Prim R. C. 7763
Primrose E. J. F. 7572
Privalov I. I. 7309 К
Prvanovitch M. 7600

R

Rabin M. 7542
Ragab F. M. 7431, 7432
Ramakrishnan A. 7479
Ransom W. R. 7661
Rathenau G. W. 7812 П
Rathie C. B. 7443
Rebollo J. M. 7399
Rédei L. 7135
Redheffer R. M. 7291
Rees D. 7186, 7187, 7192
Reichbach J. 7066
Reichbach M. 7258
Reissig R. 7332, 7335
Remmert R. 7307
Renaudie J. 7610
Reppert R. V. 7791 П
Ringrose J. R. 7449
Robbins H. 7495
Robinson A. 7369
Robinson J. 7064
Robinson R. M. 7065
Rogers K. 7081
Rogosinski W. W 7454
Roman T. 7141
Roquette P. 7181
Rosenberg M. 7776 П
Rosenblatt J. R. 7517
Rothe R. 7408 К, 7409 К
Rott N. 7299
Ruben H. 7490
Rudin M. E. 7222
Rudin W. 7394
Rühs F. 7152

S

Sad N. 7440
Sakuma M. 7188
Salzer H. E. 7653, 7680
Sampford M. R. 7489
Sánchez Pérez J. A. 7057
Sandgren L. 7046
Sandor S. 7340
Saran S. 7430
Sarhan A. E. 7504, 7506
Sarkar G. K. 7438
Sasaki S. 7601
Satô M. 7261
Sawaki S. 7093
Sayre D. 7689
Schaefer H. 7218
Schenker L. 7721
Scherk P. 7078, 7616
Schiek H. 7144, 7145
Schiffer M. 7281
Schiffer M. M. 7312 К
Schmitt A. 7687, 7688
Scholz B. 7083
Schouten J. A. 7613 К, 7614 К
Schulze H. 7678
Schütte K. 7069
Schützenberger M. P. 7164
Schwartz J. 7476
Schwarz S. 7171
Seal K. C. 7501
Seidel J. 7618
Selfridge J. L. 7085
Sen D. K. 7666
Sen R. N. 7546 К
Setzer O. 7566 К
Sexton C. R. 7682
Shank C. A. 7813 П
Sharpe A. H. 7797 П
Shirai T. 7230
Shockley W. 7763
Šik F. 7214
Simon R. 7383
Simpson S. 7664
Singer I. M. 7461, 7464
Smirnov V. I. 7414 К
Smith G. E. 7705

Smith R. M. 7750
Sobel M. 7513, 7519
Sobociński B. 7070
Soudan A. 7327
Spampinato N. 7580
Spencer D. C. 7312 К
Squires R. B. 7731
Stanavige B. 7776 II
Stankovic B. 7440
Stark R. H. 7638
Stein P. 7456
Sterne T. E. 7498
Stiefel E. 7643, 7644, 7645
Stoppelli F. 7555
Strother W. L. 7236
Struik D. J. 7056
Sugar G. R. 7510
Sundrum R. M. 7500
Süss W. 7628
Suszko R. 7067
Symon E. 7810
Szép J. 7126, 7150

T

Takács L. 7533
Takahasi M. 7151
Takahashi S. 7265
Tamura T. 7162
Tanimoto B. 7656
Tate R. F. 7512
Taussky O. 7140, 7179
Teghem J. 7395
Tenca L. 7059
Teodorescu N. 7041
Terracini A. 7112
Thébault V. 7543
Thierrin G. 7166, 7173
Thomas D. E. 7772
Thomée V. 7367
Tits J. 7627
Tocher K. D. 7713
Toyama H. 7178
Trickett W. H. 7523
Trjitzinsky W. J. 7364
Trunk E. F. 7726

U

Urabe M. 7634
Urban A. 7564 К

V

Vandiver H. S. 7085
Vasilache S. 7389
Verblunsky S. 7266
Villa M. 7630
Vincensini P. 7590
Vinti C. 7393
Voronovskaia E. V. 7637
Votaw D. F., Jr 7525

W

Wales N. B., Jr 7777 II
Wallenfang K. 7756
Waltz G. H., Jr 7804
Wang Hao 7068
Warmoltz N. 7812 II
Wartmann R. 7505
Washnitzer G. 7305
Weatherburn C. E. 7551 К
Weides E. 7756
Weiner L. M. 7102
Welch B. L. 7523
Wermer J. 7464
Wesson J. R. 7624
Weyl H. 7311 К
Wheelon A. D. 7424
Wiegmann N. A. 7121
Wielandt H. 7125
Wilkinson J. H. 7774
Williams E. 7429
Wilson R. 7288
Winger W. D. 7787 II
Wolf P. 7183
Woods-Hill W. 7781 II
Wright E. P. G. 7788 II
Wright J. B. 7153
Wyman M. 7089

Y

Yamada M. 7165, 7168
Yanagihara H. 7634
Yood B. 7465
Yoshida M. 7188, 7190
Yûjôbô Z. 7579

Z

Zappa G. 7621, 7625
Zedek M. 7055
Zemanek H. 7770
Zięba A. 7529
Zmuda A. 7642
Zuckerman H. S. 7170

ქარცივაძე ა. 7407 К
ჭელიძე ვ. 7407 К
ხარაძე ა. 7407
ხვედელიძე ი. 7407 К

井上義夫 7416 К
五味淵正詞 7423 К
瓦日夫斯基 7044
四野宮哲郎 7109
大地羊三 7109
山崎和夫 7445
岩切晴二 7418 К
平野次郎 7415 К
庫拉托夫斯基 7038
張孝禮 7276
張鳴鏞 7300
村數一郎 7421 К
松原元一 7547 К
根來祥三郎 7699
梁宗鉅 7404
楊海燕 7400
河野伊三郎 7244 К
潘家錚 7640
笹部貞市郎 7422 К
耿濟 7100
藤森良夫 7417 К
啓陸璧 7274
鬼頭史域 7692
리영원 7268
김성련 7673
류중호 7690

Технический редактор *Р. М. Денисова*